Математические структуры и моделирование
2015. № 2(34). С. 16–23

УДК 519.71

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА ГОМОТОПИИ

С.Н. Чуканов
профессор, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: ch_sn@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Аннотация. В работе предложены геометрические методы определения устойчивости состояния равновесия динамических систем в критических точках. Метод распространён на системы управления динамическими объектами, задаваемые системой дифференциальных уравнений первого порядка. Формирование управляющих воздействия системы управления приводит к изменению геометрических характеристик системы, что позволяет переводить систему из состояния неустойчивого равновесия в состояние устойчивого равновесия. Состояние устойчивости равновесия определяется методом определения индексов невырожденной критической точки функции Морса, в качестве которой используется потенциальная функция динамической системы.

Ключевые слова: система управления динамическим объектом, устойчивость состояния равновесия динамической системы, функция Морса, оператор гомотопии, теорема Якоби.

1. Введение

Для определения устойчивости состояния равновесия динамических систем в критических точках используются геометрические методы исследования [1, 3, 6]. В работе приводится метод формирования такого метрического тензора Якоби для консервативной динамической системы, что уравнения движения динамической системы совпадают с уравнениями для геодезических траекторий в римановом пространстве с этим тензором.

Метод распространён на системы управления динамическими объектами, задаваемые системой дифференциальных уравнений первого порядка. При этом формирование управляющих воздействия приводит к изменению геометрических характеристик системы, что позволяет переводить систему из состояния неустойчивого равновесия в состояние устойчивого равновесия.

Состояние неустойчивого (устойчивого) равновесия определяется методом определения индексов невырожденной критической точки функции Морса, в качестве которой используется потенциальная функция динамической системы [4]. В случае системы управления динамическим объектом показано, что индексы функции Морса могут быть приведены к значениям, соответствующим состоянию устойчивого равновесия динамической системы.

Потенциальная функция динамической системы с учётом сигналов системы управления формируется методом построения оператора гомотопии [2, 7, 8].

2. Исследование состояния равновесия консервативной динамической системы

Известно, что уравнения движения динамической системы могут быть получены с использованием вариационного исчисления [3]. Согласно принципу наименьшего действия Гамильтона движения системы определяются траекториями в фазовом пространстве, удовлетворяющими условию:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\, dt = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{q}$ — координаты системы в конфигурационном пространстве Q: $\mathbf{q} \in Q \in \Re^n$. Рассмотрим лагранжиан в форме:

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(\mathbf{q})\, \dot{q}^i \dot{q}^j - V(\mathbf{q})\, ; i, j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $a_{ij}(\mathbf{q})$ — тензор, определяющий «кинетическую» энергию $\frac{1}{2} a_{ij}(\mathbf{q})\, \dot{q}^i \dot{q}^j$, $V(\mathbf{q})$ — потенциальная функция лагранжиана.

Возможно ли такое конформное преобразование тензора $a_{ij}(\mathbf{q})$, что новый тензор учитывал бы потенциал $V(\mathbf{q})$? Ответ на этот вопрос даёт теорема Якоби [6].

Теорема 1 (Якоби)**.** *Для консервативной динамической системы с полной энергией E и лагранжианом* (2) *можно найти конформное отображение метрического тензора:*

$$g_{ij}(\mathbf{q}) = \exp(\phi(\mathbf{q})) \cdot a_{ij}, \tag{3}$$

где функция $\phi(\mathbf{q}) = \ln[2(E - V(\mathbf{q}))]$ такая, что геодезические в римановом пространстве с метрическим тензором g_{ij} — есть траектории динамической системы.

В приложении 1 показано, что можно сформировать метрический тензор:

$$\mathbf{g} = (g_{ij})\, ; g_{ij}(\mathbf{q}) = 2\,[E - V(\mathbf{q})]\, a_{ij}(\mathbf{q}) \tag{4}$$

при наличии функциональной зависимости тензора $a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q})$. Таким образом, учёт потенциальной энергии может быть реализован конформным преобразованием метрического тензора. При этом, используя принцип наименьшего действия Гамильтона, получим уравнения движения динамической системы в виде:

$$\ddot{q}^i + a^{im}\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial q^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^m}\right)\dot{q}^j\dot{q}^k + a^{ik}\frac{\partial V}{\partial q^k} = 0. \tag{5}$$

Поставим задачу нахождения такой функции Лагранжа для консервативной динамической системы, определяемой системой дифференциальных уравнений первого порядка: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q})\,; \mathbf{q} \in \Re^n; \mathbf{f}(\cdot) \in \Re^n$, что эта система дифференциальных уравнений приводится к динамическим уравнениям в форме (5). Сформируем систему дифференциальных уравнений второго порядка дифференцированием $\dot{\mathbf{q}}$ по времени:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left[\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q}\right]\mathbf{f}(\mathbf{q}) = F(\mathbf{q}) = \partial V(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q}, \tag{6}$$

так как система консервативная, в правой части (10) присутствует только потенциальный вектор [5]. Найдём скалярную потенциальную функцию $V(\mathbf{q})$ формированием оператора гомотопии [7–9]:

$$V(\mathbf{q}) = -\int\limits_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{F}(\lambda \mathbf{q}) \cdot d\lambda. \tag{7}$$

Пусть задана система с лагранжианом (2); точка $\mathbf{q}_0 \in Q$ — есть точка равновесия лагранжиана, если [3] : $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = 0$. Точка $\mathbf{q}_0$ является точкой устойчивого равновесия, если $\mathbf{q}_0$ — локальный максимум потенциальной функции V и индекс невырожденной критической точки функции V, рассматриваемой в качестве функции Морса, $\mathrm{ind}(H_V(\mathbf{q}_0)) = 0$; если $\mathrm{ind}(H_V(\mathbf{q}_0)) > 0$, то $\mathbf{q}_0$ является точкой неустойчивого равновесия (см. Приложение 2).

Пример 1: Рассмотрим динамическую систему:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \omega q_2; \\ \dot{q}_2 = \omega q_1. \end{cases} \tag{8}$$

Применяя дифференцирование по времени, получим:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega^2 q_1 = -\partial V/\partial q_1; \\ \ddot{q}_2 = \omega^2 q_2 = -\partial V/\partial q_2. \end{cases}$$

Найдём скалярную потенциальную функцию формированием оператора гомотопии [7–9]: $V(q_1, q_2) = \omega^2(-q_1^2 - q_2^2)$. Метрический тензор Якоби имеет вид:

$$\begin{aligned} &g_{ij}(\mathbf{q}) = 2\left[E + \omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right]\delta_{ij}; \\ &ds^2 = 2\left[E + \omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right]\left(dq_1^2 + dq_2^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения движения (8) соответствуют соотношениям (5). Потенциальная функция $V(q_1, q_2)$, рассматриваемая в качестве функции Морса, имеет индекс невырожденной критической точки $\operatorname{ind}(H_V(\mathbf{q}_0)) = -2$, то есть система находится в неустойчивом состоянии равновесия. □

Покажем, что формирование управляющих воздействий на динамическую систему приводит к конформному отображению метрического тензора $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{q}) = e^{\phi(\mathbf{q})} g_{ij}(\mathbf{q})$.

3. Исследование состояния равновесия системы управления нелинейным динамическим объектом

Рассмотрим систему управления гладкой нелинейной динамической системой с обратной связью по состоянию, заданную каноническими соотношениями: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$, где $\mathbf{q} \in \Re^n$ — вектор состояния системы; $\mathbf{u} \in \Re^n$ — вектор управляющих сигналов системы; матричная функция $\mathbf{f}(\cdot,\cdot)$: $\{\mathbf{f}(\cdot,\cdot) |\, \Re^n \times \Re^m \to \Re^n\}$. Дифференцируя канонические соотношения, получим:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left[{}^{\partial f(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{q}}\right] f(\mathbf{q}) + \left[{}^{\partial f(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{u}}\right] \dot{\mathbf{u}} = {}^{\partial V_u(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{q}}. \tag{10}$$

Если существует функциональная зависимость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q})$, то:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left[{}^{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{q}}\right] \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \left[{}^{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{u}}\right] \left({}^{\partial \mathbf{u}(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{u}}\right) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_u(\mathbf{q}) = {}^{\partial V_u(\mathbf{q})}\!/_{\partial \mathbf{q}}, \tag{11}$$

где потенциальную функцию $V_u(\mathbf{q})$ можно получить методом формирования оператора гомотопии [7–9]: $V_u(\mathbf{q}) = -\int\limits_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{F}_u(\lambda \mathbf{q}) \cdot d\lambda$.

Пример 2: Рассмотрим управление динамической системой:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \omega q_2 + u_1(\mathbf{q}); \\ \dot{q}_2 = \omega q_1 + u_2(\mathbf{q}). \end{cases} \tag{12}$$

При управляющих сигналах: $u_1 = +kq_2; u_2 = -kq_1$, из (12) получим:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = (\omega^2 - k^2)\, q_1 = -\partial V / \partial q_1; \\ \ddot{q}_2 = (\omega^2 - k^2)\, q_2 = -\partial V / \partial q_2. \end{cases} \tag{13}$$

При отсутствии управления ($k = 0$) метрический тензор Якоби имеет вид (9); при формировании управляющих сигналов u_1, u_2 метрический тензор Якоби имеет вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{g}_{ij}(\mathbf{q}) = 2\left[E + (\omega^2 - k^2)\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right] \delta_{ij}; \\ &ds^2 = 2\left[E + (\omega^2 - k^2)\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right] \left(dq_1^2 + dq_2^2\right), \end{aligned} \tag{14}$$

то есть метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{q})$ может быть получен из метрического тензора $g_{ij}(\mathbf{q})$ конформным отображением $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{q}) = e^{\phi(\mathbf{q})} g_{ij}(\mathbf{q})$, где $\phi(\mathbf{q}) = \ln\left[-2k^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right]$.

Уравнения движения (13) соответствуют соотношению (5) при потенциальной функции:

$$V(q_1, q_2) = \left(\omega^2 - k^2\right)\left(-q_1^2 - q_2^2\right). \tag{15}$$

Потенциальная функция (15), рассматриваемая в качестве функции Морса, имеет индекс невырожденной критической точки:

$$\mathrm{ind}\left(H_V\left(\mathbf{q}_0\right)\right) = \begin{cases} 0; & \text{if} \quad k^2 > \omega^2; \\ -2; & \text{if} \quad k^2 < \omega^2; \end{cases}$$

и для обеспечения устойчивости состояния равновесия необходимо выполнить требование: $k > \omega > 0$. □

4. Формирование состояния устойчивого равновесия линейной системы управления

Рассмотрим линейную систему управления с обратной связью по состоянию, заданную каноническими соотношениями:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{16}$$

где $\mathbf{x} \in \Re^n$ — вектор состояния системы; $\mathbf{u} \in \Re^n$ — вектор управляющих сигналов системы; $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}; \mathbf{B} \in \Re^{n\times m}; \mathbf{K} \in \Re^{m\times n}$. Дифференцируя эти соотношения, получим:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)^2 \mathbf{x}. \tag{17}$$

Для этой системы методом формирования оператора гомотопии [7–9] можно найти такую потенциальную функцию:

$$V\left(\mathbf{x}\right) = -\int\limits_0^1 \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)^2 \lambda\mathbf{x} \cdot d\lambda = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)^2 \mathbf{x}, \tag{18}$$

что соотношение (13) может быть переписано в виде: $\ddot{\mathbf{x}} = -{}^{\partial V}\!/_{\partial \mathbf{x}}$.

Динамические соотношения $\ddot{\mathbf{x}} = -{}^{\partial V}\!/_{\partial \mathbf{x}}$. могут быть получены из уравнения (5) применением метрического тензора Якоби:

$$g_{ij}\left(\mathbf{x}\right) = \left[2E + \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)^2 \mathbf{x}\right] \delta_{ij}. \tag{19}$$

Использование потенциальной функции $V\left(\mathbf{x}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)^2 \mathbf{x}$ в качестве функции Морса позволяет определить достаточные условия устойчивости состояния равновесия линейной системы управления: $\mathrm{ind}\left(\mathbf{x}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)^2 \mathbf{x}\right) = 0$.

Пример 3: Рассмотрим линейную систему управления с матрицами: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$. Тогда при $k < 1$ система находится в неустойчивом состоянии равновесия; например, при $k = 0$ в критической точке $\mathbf{x}_0 = 0$: $2V\left(\mathbf{x}\right) = -x_1^2 - x_2^2$; $\mathrm{ind}\left(H_V\left(\mathbf{x}_0\right)\right) = -2$. Тогда при $k > 0$ система находится в устойчивом состоянии равновесия; например, при $k = 2$ в критической точке $\mathbf{x}_0 = 0$: $2V\left(\mathbf{x}\right) = 3x_1^2 + 3x_2^2$; $\mathrm{ind}\left(H_V\left(\mathbf{x}_0\right)\right) = 0$. При изменении параметра k от 0 до 2 метрический тензор Якоби изменяется от $g_{ii}\left(\mathbf{x}\right) = \left[2E + x_1^2 + x_2^2\right]$, до $g_{ii}\left(\mathbf{x}\right) = \left[2E - 3x_1^2 - 3x_2^2\right]$; $i = 1, 2$, и индекс критической точки $\mathrm{ind}\left(H_V\left(\mathbf{x}_0\right)\right)$ от -2 до 0. □

5. Заключение

Рассмотрен метод определения устойчивости состояния равновесия динамических систем в критических точках на основе использования геометрических методов исследования. Приводится метод формирования такого метрического тензора Якоби для консервативной динамической системы, что уравнения движения динамической системы совпадают с уравнениями для геодезических траекторий в римановом пространстве с этим тензором. Метод распространён на системы управления динамическими объектами, задаваемые системой дифференциальных уравнений первого порядка. Формирование управляющих воздействия приводит к изменению геометрических характеристик системы, что позволяет переводить систему из состояния неустойчивого равновесия в состояние устойчивого равновесия.

Состояние устойчивого равновесия динамической системы определяется методом определения индексов невырожденной критической точки функции Морса, в качестве которой используется потенциальная функция динамической системы. В случае системы управления динамическим объектом индексы функции Морса могут быть приведены к значениям, соответствующим состоянию устойчивого равновесия динамической системы.

Приложение 1. Вывод уравнения движения динамической системы

Покажем, что можно сформировать метрический тензор $\mathbf{g} = (g_{ij})$ такой, что учёт потенциальной энергии может быть реализован конформным преобразованием метрического тензора при наличии функциональной зависимости тензора $a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q})$. Используя принцип наименьшего действия Гамильтона, получим уравнения движения динамической системы, исходя из знания метрического тензора $\mathbf{g}$. Рассмотрим консервативную динамическую систему с лагранжианом: $L = \frac{1}{2} a_{ij}(\mathbf{q})\,\dot q^i \dot q^j - V(\mathbf{q}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$ и интегралом движения — полной энергией: $E = T + V$. В этом случае гамильтонов вариационный принцип сводится к принципу наименьшего действия Мопертюи: $\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0$, так как $L = 2T - E$. Репараметризуем время $t = t(\tau)$ так, чтобы [6]: $a_{ik}(\mathbf{q}) \left({\partial q^i}/{\partial \tau}\right)\left({\partial q^k}/{\partial \tau}\right) = 1$, откуда: $d\tau = \sqrt{2W(\mathbf{q})}dt$, и: $\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} (2T)\, dt = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} a_{ik}(\mathbf{q})\,\dot q^i \dot q^k dt = \delta \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2W(\mathbf{q})} d\tau = 0$, где величина $W(\mathbf{q}) = E - V(\mathbf{q})$ принимает те же значения, что и кинетическая энергия T, но не содержит скоростей в своём выражении. Подставляя $d\tau = \sqrt{2W(\mathbf{q})}dt = \sqrt{a_{ik} dq^i dq^k}$ в вариацию $\delta \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2W(\mathbf{q})} d\tau$, получим выражение, которое не зависит от времени параметризации траекторий: $\delta \int\limits_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1} \sqrt{2W(\mathbf{q})\, a_{ik} dq^i dq^k} = 0$, где интегрирование проводится по кривой, соединяющей две фиксированные конечные точки: $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$. Таким образом, движения, полученные из принципа Гамильтона, удовлетворяют вариационному условию $0 = \delta \int (2T)\, dt = \delta \int \sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} dt = \delta \int ds$. Рассмотрим систему с метрическим тензором Якоби: $g_{ij}(\mathbf{q}) = 2W(\mathbf{q})\, a_{ij}(\mathbf{q})$, который является конформным отображением метрического тензора $a_{ij}(\mathbf{q})$ и элементом длины дуги $ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j = 2Wa_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^i dt^2 = 4W^2dt^2$, следовательно, $ds = 2Wdt$.

Кривая $\gamma_0 : \Re \to M$ называется геодезической, если векторное поле, определяемое касательным вектором $\dot{\gamma}_0$, параллельно самой кривой, то есть [1, 3]: $\nabla_{\dot{\gamma}_0}\dot{\gamma}_0 = 0$, где $\nabla_{\dot{\gamma}_0}$ ковариантная производная ассоциируемая с g_{ij}. В локальных координатах уравнение геодезической кривой [1, 3]: ${d^2q^i}/{ds^2} + \Gamma^i_{jk}{dq^j}/{ds}{dq^k}/{ds} = 0$, где Γ^i_{jk} — коэффициенты Кристоффеля: $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}\left({\partial g_{mk}}/{\partial q^j} + {\partial g_{mj}}/{\partial q^k} - {\partial g_{jk}}/{\partial q^m}\right); (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. С учётом метрического тензора Якоби $g_{ik}(\mathbf{q}) = 2W(\mathbf{q})\, a_{ik}(\mathbf{q})$, и: $\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} = 2W\frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - 2a_{ik}\frac{\partial V}{\partial q^j}$, получим:

$$\frac{d^2q^i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dq^i}{ds}\right) = \frac{1}{4W^3}\left(\ddot{q}^iW + \frac{\partial V}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j\right);$$

$$\Gamma^i_{jk}\frac{dq^j}{ds}\frac{dq^k}{ds} = \frac{1}{4W^2}a^{im}\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial q^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^m}\right)\dot{q}^j\dot{q}^k - \frac{1}{4W^3}\frac{\partial V}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{1}{4W^2}a^{ik}\frac{\partial V}{\partial q^k},$$

и динамические уравнения могут быть представлены в виде (см. (5)):

$$\ddot{q}^i + a^{im}\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial q^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^m}\right)\dot{q}^j\dot{q}^k + a^{ik}\frac{\partial V}{\partial q^k} = 0.$$

Приложение 2. Функция Морса [4]

Пусть M — m-многообразие и $f : M \to \Re$ — гладкая функция, определённая на M. Точка $\mathbf{q}_0$ является критической точкой f, если ${\partial f(\mathbf{q}_0)}/{\partial q_i} = 0; \forall i = 1, \ldots, n$, по отношению к локальной системе координат (СК — $q_1, \ldots, q_n$) в окрестности $\mathbf{q}_0$. Матрица $H_f(\mathbf{q}_0) = \left({\partial^2 f}/{\partial q_i \partial q_j}(\mathbf{q}_0)\right) \in \Re^{n\times n}; \forall i, j = 1, \ldots, n$ — гессиан функции f в критической точке $\mathbf{q}_0$. Критическая точка является невырожденной, если $\det[H_f(\mathbf{q}_0)] \neq 0$; функция $f : M \to \Re$ является функцией Морса, если любая критическая точка невырождена. Можно выбрать такую локальную СК в окрестности невырожденной $\mathbf{q}_0$, что представление f в этой СК будет иметь вид: $f = -q_1^2 - \cdots - q_\lambda^2 + q_{\lambda+1}^2 + \cdots + q_m^2 + f(\mathbf{q}_0)$, где $\mathbf{q}_0$ соответствует началу координат. Индекс невырожденной критической точки $\operatorname{ind}(H_f(\mathbf{q}_0)) = \lambda$ равен числу отрицательных диагональных элементов гессиана $H_f(\mathbf{q}_0)$ после диагонализации. Векторное поле X на координатной окрестности U многообразия M описывается формулой $X = \xi_1{\partial}/{\partial q_1} + \cdots + \xi_n{\partial}/{\partial q_n}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — функции, определённые в СК U. При выборе $\xi_i = {\partial f}/{\partial q_i}; i = 1, \ldots, n$ получим градиентное векторное поле функции f: $X_f = \left({\partial f}/{\partial q_1}\right){\partial}/{\partial q_1} + \cdots + \left({\partial f}/{\partial q_n}\right){\partial}/{\partial q_n}$. Градиентное векторное поле функции Морса в точке $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$ имеет вид:

$X_f = -2q_1\frac{\partial}{\partial q_1} - \cdots - 2q_\lambda\frac{\partial}{\partial q_\lambda} + 2q_{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial q_{\lambda+1}} + \cdots + 2q_n\frac{\partial}{\partial q_n}$, где $\mathbf{q}_0$ соответствует началу координат.

Литература

1. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. Modern Geometry – Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. New York : Springer-Verlag, 1992. 468 p.
2. Edelen D.G.B. Applied Exterior Calculus. Courier Corporation, 2005. 472 p.
3. Lewis A.D. Lagrangian mechanics, dynamics, and control. Math 439 course notes. Queen's University, 2002. 260 p.
4. Matsumoto Yu. An introduction to Morse theory. Tokyo : Iwanami Shoten, Publishers, 1997. 219 p.
5. Merkin D.R. Introduction to the Theory of Stability. New York : Springer-Verlag, 1997. 319 p.
6. Pettini M. Geometry and Topology in Hamiltonian Dynamics and Statistical Mechanics. Springer Science+Business Media, LLC. 2007. 452 p.
7. Ульянов Д.В., Чуканов С.Н. Декомпозиция векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии // Проблемы управления. 2012. № 6. С. 2–6.
8. Ульянов Д.В., Чуканов С.Н. Формирование инвариантов при визуализации векторных полей на основе построения оператора гомотопии // Компьютерная оптика. 2012. Т. 36, № 4. С. 623–627.
9. Чуканов С.Н. Определение потенциальной компоненты векторного поля системы управления на основе построения оператора гомотопии // Прикладная физика и математика. 2014. № 8. С. 40–46.

DETERMINATION OF EQUILIBRIUM STABILITY FOR DYNAMIC OBJECT CONTROL SYSTEM BY CONSTRUCTING A HOMOTOPY OPERATOR

S.N. Chukanov

Professor, Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, e-mail: ch_sn@mail.ru

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Abstract. The paper introduces geometric methods for determining stability of the equilibrium state of dynamical systems at the critical points. The methods are extended on dynamic object control systems described by a system of differential equations of the first order. Conditioning of control signals for the control system changes the geometric characteristics of the system, and it allows to transfer the system from a state of unstable equilibrium to a state of stable equilibrium. Stability of the equilibrium is determined by finding the indices of a non-degenerate critical point of the Morse function that is, in our case, the potential function of the dynamic system.

Keywords: control system of dynamic object, stability of equilibrium state of dynamic system, Morse function, homotopy operator, Jacobi theorem.