

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОСВЯЗИ «РАСТИТЕЛЬНОСТЬ-ПОЧВА» В ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМАХ**

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

**Л.А. Володченкова**

к.б.н., старший преподаватель, e-mail: Volodchenkova2007@yandex.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

**Аннотация.** В статье предложена математическая модель плодородия почвы, основанная на дифференциальном уравнении, допускающем катастрофы сборки при изменении влажности почвы. Дана также модель взаимосвязи продукции фитомассы четырёхъярусного леса и плодородия почвы.

**Ключевые слова:** модель, почва, растительность, лесная экосистема, теория катастрофа, катастрофа сборки.

### **Введение**

Модели продукции фитомассы многоярусного леса, построенные в [1], существенным образом учитывают влажность почвы, но никак не связаны со структурой почвы, с таким её важнейшим фактором как плодородие.

Цель данной статьи состоит, с одной стороны, в построении математической модели плодородия почвы, которое меняется в зависимости от влажности почвы и типа почвообразующей породы, а с другой стороны, построение модели взаимосвязи «растительность-почва».

В стационарном случае (при неизменяющемся плодородии почвы), получаем алгебраическое уравнение, из которого можно выразить влажность почвы  $W = W(y, p)$  как функцию меры плодородия почвы  $y$  и типа почвообразующей породы  $p$ . Подставляя  $W = W(y, p)$  в дифференциальное уравнение для продукции фитомассы лесной экосистемы, мы получаем уравнение, которое определяет динамику продукции фитомассы в зависимости от меры плодородия и типа почвообразующей породы.

Результаты данной статьи были анонсированы в материалах Международной научной конференции «Математическое и компьютерное моделирование» (Омск, 2014) [2, 3].

## 1. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка»

Плодородие почвы определяется содержанием в ней необходимых для растений питательных веществ, уровнем устойчивой влажности, наличием в почве воздуха, строением и структурой почвы, определяющими возможность развития корней. Уровень плодородия зависит от процента содержания гумуса — комплекса органических соединений, образовавшихся в результате разложения микроорганизмами остатков растительного и животного происхождения.

Высоким плодородием обладают почвы (суглинков), возникшие в результате разрушения мягких горных пород, низким — почвы (подзолистые почвы), образованные при разрушении твёрдых пород.

Большинство характеристик почвы связано со свойствами почвообразующей породы [4]. Условием плодородия почвы является оптимальная и постоянная влажность почвы. Вода — обязательное условие почвообразования и формирования почвенного плодородия. Если слишком сухо, почва становится плотнее, а жизнь в ней почти замирает — прекращается разложение органики и фиксация азота. При избытке воды всё в почве задыхается и начинается вредное бескислородное сбраживание органических остатков (силосование).

Учитывая сказанное, мы ограничимся при построении модели почвы только двумя её основополагающими характеристиками: типом почвообразующей породы и влажностью. Их изменение может привести к скачкообразному изменению плодородия почвы, и это мы смоделировали, вводя в правую часть уравнения, описывающего динамику плодородия почвы, функции, соответствующие катастрофам типа «сборка» (см. рис. 1).

Модель представляет собой дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma \cdot [(p - p_0) - y^2]y - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \quad (1)$$

$$0 < W_- < W_+,$$

где  $y$  — мера плодородия почвы,  $p$  — мера типа почвообразующей породы,  $W$  — влажность почвы,  $W_-$  — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно,  $W_+$  — ее избыток,  $\gamma, \delta$  — положительные константы.

В результате для определённых почв в точке  $(p_0, W_-)$  происходит катастрофа падения (от точки С к точке D) плодородия, связанная с нехваткой воды в почве, а в точке  $(p_0, W_+)$  — катастрофа падения (от точки А к точке В) плодородия при избытке влаги.

## 2. Описание взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах

Почва относится к числу основных факторов, определяющих условия произрастания деревьев. Растительность и почвы связаны потоками энергии и вещества и совместно с животными и микроорганизмами формируют целостный

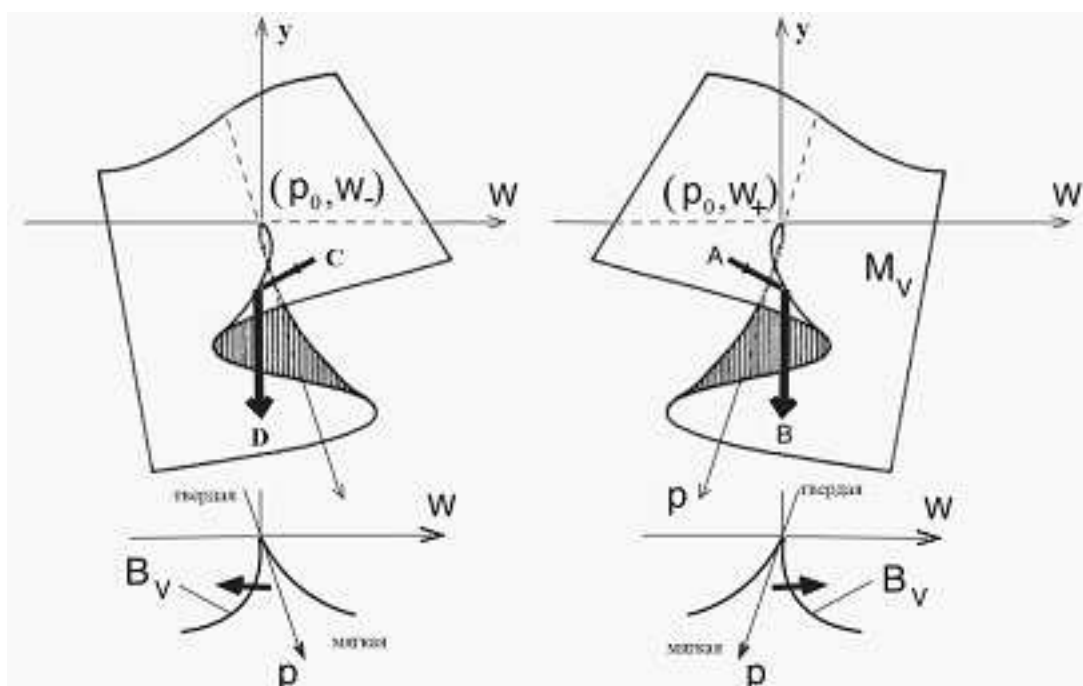


Рис. 1. Слева изображена катастрофа плодородия почвы, вызванная нехваткой влаги в почве, а справа — избытком влаги

лесной биогеоценотический покров. В [1] была предложена ярусно-мозаичная модель лесной экосистемы в виде дифференциального уравнения для продукции фитомассы с правой частью, описываемой в рамках математической теории катастроф. Взаимосвязь с почвой учитывалась посредством введения в правую часть в качестве внешнего параметра влажности почвы.

Предлагается следующая модель взаимосвязи «растительность-почва», расширяющая модель четырёхъярусного леса, предложенную в [1],

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x, k, m, a, w), \\ \frac{dy}{dt} = \gamma \cdot [(p - p_0) - y^2]y - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \end{cases} \quad (2)$$

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}(x - x_0)^6 + k(x - x_0)^4 + m(x - x_0)^3 + a(x - x_0)^2 + w(x - x_0),$$

$$k = -c_k(CI - CI_0), \quad m = c_m\left(\frac{s^2}{\mu} - 1\right),$$

$$a = -c_a(YAH - YAH_0), \quad w = A_w(W - W_0),$$

$$0 < W_- < W_0 < W_+,$$

где  $x$  — продукция фитомассы (т/га за год),  $y$  — мера плодородия почвы,  $CI$  — индекс конкуренции Вайса [1];  $s^2/\mu$  — коэффициент дисперсии, являющийся показателем равномерности распределения деревьев в пространстве; если  $s^2/\mu$  близко к нулю, то распределение регулярное, к единице — случайное, а чем

более единицы, — тем мозаичнее; УАН — уровень антропогенной нагрузки на район [1],  $p$  — мера типа почвообразующей породы,  $W$  — влажность почвы,  $W_-$  — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно,  $W_+$  — ее избыток,  $\gamma, \delta$  — положительные константы, коэффициент  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ , где  $\alpha_j$  — доля фитомассы  $j$ -го яруса в фитомассе всего леса,  $c_k, c_m, c_a, c_w$  — постоянные коэффициенты.

Величины  $CI_0, УАН_0, W_0$  — это критические значения факторов, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза [1].

Рассматривая стационарные равновесия для  $y$ , находим  $W = W(y, p)$ . Подставляя это в первое уравнение, концентрируем внимание либо на равновесных состояниях для продукции, либо на её динамике.

Первое уравнение описывает четырёхъярусный лес. Добавление второго уравнения таким способом, как это мы предлагаем, сохраняет все результаты, полученные нами для теоретико-катастрофического описания четырёхъярусного леса и подробно изложенные в [1].

Второе уравнение — это уравнение (1), введённое в § 1, реализующее упрощённое представление о плодородии почвы и учитывающее только два фактора: тип почвообразующей породы и влажность почвы. Их изменение может привести к скачкообразному изменению плодородия почвы, и это мы смоделировали, вводя в правую часть уравнения катастрофу типа «сборка». В точке  $(p_0, W_-)$  происходит катастрофа падения плодородия, связанная с нехваткой воды в почве, а в точке  $(p_0, W_+)$  — катастрофа падения плодородия при избытке влаги.

### 3. Пример двойной экологической катастрофы

Переувлажнение почвы, как видно из рис. 1, влечёт катастрофу (типа «сборка») плодородия, т.е. величина  $y$  скачком переходит к меньшему значению  $y$ . В при этом мы будем наблюдать, как было показано в [5], скачкообразный переход (катастрофа типа «бабочка») лесной экосистемы к новому равновесию, характеризующемуся крайне низкой продуктивностью (рис. 2).

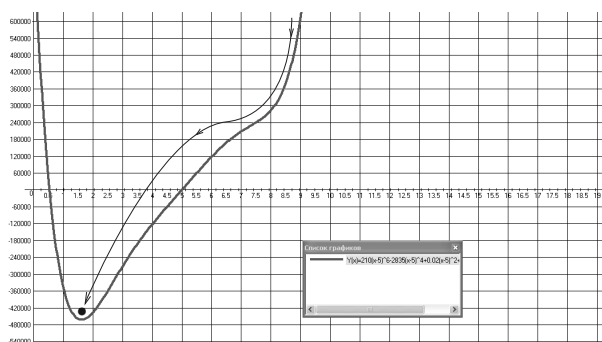


Рис. 2. График потенциала  $V(x)$  при сильной влажности почвы  $W = W_0 + 60\%$  (лес стоит в воде).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск : Изд-во КАН, 2012. 220 с.
2. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
3. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Теоретико-катастрофическая модель взаимосвязи «Растительность-почва» в лесных экосистемах // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 23–24.
4. Солодова Н.И., Христофорова Л.Б., Малахова Н.И. Основы устойчивого управления лесным хозяйством. СПб. 2006. 111 с.
5. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Динамика вымокающего лесного фитоценоза // Вестник Омского университета. 2013. Вып. 4. С. 19–22.

## MATHEMATICAL MODEL OF INTERRELATION "VEGETATION-SOIL" IN FOREST ECOSYSTEMS

**A.K. Guts**

Dr.Sc.(Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

**L.A. Volodchenkova**

Senior Lecturer, e-mail: Volodchenkova2007@yandex.ru

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

**Abstract.** In the article the mathematical model of fertility of the soil based on the differential equation allowing the cusp catastrophes at change of soil humidity is offered. Also the model of an interrelation of phytomass production for forest and soil fertility is given.

**Keywords:** model, soil, vegetation, forest ecosystem, theory of catastrophe, cusp catastrophe.