*Математические
структуры и моделирование
2015. №4(36). С. 29–39*

УДК 510

КОНЦЕПЦИЯ ФРАКТАЛА МАНДЕЛЬБРОТА С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ФИЛОСОФСКОЙ ТОЧЕК ЗРЕНИЯ

В.А. Еровенко
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: erovenko@bsu.by

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Статья посвящена философско-математическим аспектам концепции фрактала Мандельброта, которая стала реализацией синтеза геометрического и виртуально-социокультурного восприятия мира, возродившего экспериментальную математику «неидеализированных» объектов.

Ключевые слова: фрактал Мандельброта, фрактальная геометрия, фрактальная размерность, фрактальная реальность, современный компьютер.

Выдающийся французский и американский математик польского происхождения Бенуа Мандельброт (1924–2010) основатель и создатель теории фракталов изменил мировоззренческую парадигму традиционного восприятия хаоса, показав, что хаос и сложность могут возникать в результате действия простых математических законов. Современная наука переживает эволюцию, связанную с заменой «непрерывной» парадигмы на «фрактальную». Введя в научный оборот понятие фрактала, он не только продемонстрировал универсальность фрактальных структур в природе, дав им в 1975 году название «фрактальная геометрия», но и создал математику для её описания, с помощью которой появилась возможность выделения порядка в многообразии хаоса, который до этого выглядел неприступным. Методологической целью фрактальной геометрии был математический анализ изломанных, «морщинистых» и нечётких геометрических форм, для которых Мандельброт использовал слово «фрактал», наткнувшись однажды в словаре на латинское прилагательное *fractus*, являющееся производным от глагола *fracture*, что означает «ломать». Философско-математическая суть фракталов в самоподобии, когда их геометрическая структура остаётся приблизительно той же в любом масштабе рассмотрения, поэтому, несмотря на то, что понятие фрактала появилось сравнительно недавно, как принцип мироустройства, они существовали всегда, так как самоподобие — это универсальное свойство природы.

Высшим достижением фрактальной геометрии стало открытие Мандельбротом математической структуры, которая, с одной стороны, обладает поразительной сложностью, а с другой стороны, может быть воспроизведена с помощью очень простой итеративной процедуры. Речь идёт о множестве Мандельброта — примере чисто математической абстракции, которая, однако, представима графически и может рассматриваться как геометрический объект. Неровность этого множества является центральной темой фрактальной геометрии, изучая которую, Мандельброт обнаружил «фрактальный порядок» там, где до него видели только беспорядок. Основным методом для построения математических фракталов служит итерация, то есть многократное повторение определённой геометрической операции, а так как геометрические фигуры зависимы от пространства, то в философском контексте они помещаются между чувственным миром и миром идеальным. Это, вообще говоря, неудивительно, так как в абстрактной математике многие из умопостигаемых математических сущностей оказываются в то же время представимы пространственно, то есть имеют аналоги в чувственно воспринимаемом мире. Следует также отметить, что поскольку Мандельброт не дал окончательного определения фрактала, то его широкое философское толкование позволило включить в число фракталов хорошо известные в современной математике множества Кантора, Коха, Серпинского, Пеано, Жюлиа и много других.

Интерпретация фрактальных структур в конкретных познавательных установках заставила философов математики по-новому оценить хорошо известные математические понятия и сущности, в частности, различные типы размерности, парадоксы измерений, а также такой простейший фрактал, как знаменитое канторово множество, возникшее при попытке решения проблемы гипотезы континуума. С философской точки зрения концепция фрактала Мандельброта дистанцируется от таких традиционных понятий задания и описания геометрической формы, как граница, длина, ширина. Этих смысловых понятий там просто нет, так как они перестают работать внутри концепции фрактала, и потому совершенно не понятно, как их применять. Неожиданное продолжение эти наблюдения получили в новой области математического знания — теории фракталов, которая смещает познавательные установки от строгой рациональности до интуитивно-образного мышления. С математической точки зрения интересно то, что для введения понятия «фрактал» не потребовалось изобретать каких-то абсолютно новых формализаций или математических понятий. Заметим, что фракталами принято иногда называть объекты дробной размерности, которые обладают свойством масштабной инвариантности, или «самоподобия», когда изменение масштаба не меняет их структуры. Современный геометрический аспект теории масштабной инвариантности был разработан Бенуа Мандельбротом до математической теории новых геометрических форм, имеющих дробную размерность, которая с полным на то основанием была названа им «фрактальной геометрией». Это научное направление, которое изначально опиралось на математические парадоксы, совершенно неожиданно подарило неповторимые интеллектуальные и эстетические впечатления от красоты многих фракталов. Они связаны со свойством фрактальных множеств «выглядеть» в любом масштабе примерно одинаково, которое сейчас называется «масштабной инвариантностью». По этому поводу Мандельброт писал: «Моя увлечённость масштабной инвариантностью постоянно подпитывалась новым энтузиазмом и, обогащаясь, благодаря сменам области исследований, новыми инструментами и идеями, постепенно подводила меня к созданию полноценной общей теории» [1, с. 587]. Другими словами, масштабная инвариантность означает, что малый фрагмент структуры фрактального объекта подобен другому более крупному фрагменту этого объекта или даже структуре в целом, как например, в «*снежинке Коха*». Граница снежинки, придуманной шведским математиком Гельгомом фон Кохом в 1904 году, описывается кривой, составленной из трёх одинаковых фракталов. Каждая треть снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника, которая в итоге даёт стандартный пример известного фрактала — «*кривую Коха*».

Математическое построение этой кривой начинается с единичного отрезка, который заменяется ломаной из четырёх отрезков, каждый из которых имеет длину равную $1/3$, а именно, убирается средняя треть отрезка, и, рассматривая её как основание равностороннего треугольника, добавляются два новых отрезка, строящихся как боковые стороны треугольника. Затем многократно повторяем данную процедуру, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Длина полученной ломаной линии после n-го шага будет равна $(4/3)n$, поэтому результирующая длина кривой Коха бесконечна: $\lim(4/3)^n = \infty$ при $n \to \infty$. Если построение начинается с треугольника, то получается снежинка Коха, которую ещё называют «*островом Коха*». Мы можем фотографировать этот остров в океане из космоса с любым увеличением, хотя мелкие детали в крупном масштабе, естественно, будут теряться, но поскольку фракталы обладают масштабной инвариантностью, то при увеличении мы вновь и вновь будем видеть масштабно некорректируемую конструкцию. С точки зрения философии и методологии современной математики, важна не сама длина, а то, как она зависит от размеров линейки, то есть важно некое число, называемое «фрактальной размерностью».

В классической математике понятие размерности употребляется, в силу его определения, сугубо дискретно, например, $n = 1, 2, 3, ...$ и так далее. В современной математике существуют математические объекты, реально используемые в математической практике, для вычисления размерности которых классического определения явно недостаточно. Для решения такого рода современных проблем неклассической математики используется понятие хаусдорфовой размерности. Строго математическое определение этой размерности даётся с помощью технически сложного понятия меры Хаусдорфа, но его суть можно прояснить следующим образом. Пусть отрезок длины A покрывается отрезками длины ε, или квадрат площадью A покрывается квадратами со стороной длины ε, или куб площадью A покрывается кубами со стороной длины ε. Тогда, соответственно, для отрезка $A = N(\varepsilon)\varepsilon$, для квадрата $A = N(\varepsilon)\varepsilon^2$ и для куба $A = N(\varepsilon)\varepsilon^3$, где $N(\varepsilon)$ — обозначает минимальное число отрезков, соответственно, квадратов или кубов, необходимых для покрытия множества A. В приведённых примерах показатель степени в каждом случае совпадает с классической размерностью рассмотренных математических объектов, поэтому можно записать, что $A = N(\varepsilon)\varepsilon^d$, где d – размерность, и, следовательно, при $\varepsilon \to \infty$ имеем, что $N(\varepsilon)$ растёт пропорционально ε^{-d}. Прологарифмировав последнее равенство для A, получим, что $d = (\ln A - \ln N(\varepsilon))/\ln\varepsilon$. Поэтому хаусдорфова размерность произвольного объекта в n-мерном пространстве определяется по формуле:

$$d = -\lim(\ln N(\varepsilon))/\ln\varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Заметим, что так называемая хаусдорфова размерность кривой Коха равна: $d = \ln 4/\ln 3 \approx 1,262$, то есть для береговой линии острова Коха она лежит между числами 1 и 2. В частности, для этой линии, как и для кривой, описываемой функцией Вейерштрасса, нельзя провести касательную ни в одной точке. Экзотический пример острова Коха показывает, что конечная площадь фигуры может не влиять на бесконечную длину её периметра.

Отметим, что первоначальное определение фрактала, опиралось на классическое представление о хаусдорфовой размерности, у которой есть другое название — размерность Хаусдорфа-Безиковича, поскольку математик Феликс Хаусдорф ввёл это понятие, а Абрам Безикович придал ему окончательный вид. Использование Мандельбротом дробной размерности в 1975 году шокировало математический мир. Хотя тем, кто возражает против «нелепой», с их точки зрения, дробной размерности, аргументируя это тем, что ей нельзя придать наглядный смысл, можно также возразить, что никто «не присягал» на незыблемость целочисленной размерности, лишь потому, что топологическая размерность принимает исключительно целые значения. Фрактальная размерность уже доказала свою методологическую полезность. Эффективность новых теоретических инструментов заслуживает особого внимания с точки зрения переноса «фрактальной геометрии природы» на абстрактную математическую основу. Но возникает вопрос: так что такое фрактал? Общепринятого определения этого понятия не существует, так как даже определение фрактала по Мандельброту — «множество, хаусдорфова размерность которого превышает его топологическую размерность», вряд ли можно считать удовлетворительным. Действительно, со временем, как заметил популяризатор математики Ю.А. Данилов, выяснилось «обстоятельство почти криминального характера: размерность Хаусдорфа-Безиковича некоторых фракталов оказалась целой» [2, с. 189]. Хотя точного определения фрактала до сих пор не предложено, такое определение, при наличии разрушающих его контрпримеров, особо и не нужно в силу сложившейся «интерсубъективной практики» научного применения этой категории математики. Это тот случай, когда нужно продолжать знакомство с новым понятием не с уточнения его определения, а с рассмотрения конкретизирующих его контрпримеров.

Во фрактальной геометрии понятие самоподобия, говорящее о том, что часть в каком-то смысле подобна целому, в новом методологическом контексте меняет познавательный статус философского понятия «часть», а также его смысл последнего, установившийся в евклидовой геометрии. Отметим, что «*канторово множество*» задаётся с помощью двузначного отображения вида $f(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$, где $f_1(x) = (1/3)x$ и $f_2(x) = (1/3)x + 2/3$, а это и есть преобразования подобия отрезка [0, 1], которое влечёт свойство самоподобия канторова множества. Геометрическое свойство, присущее фрактальным математическим объектам, — это самоподобие, состоящее в том, что структура, которую объект имеет на «микроуровне», повторяется в нем и на «макроуровне», поэтому оно обладает определённым эвристическим потенциалом, поскольку такое свойство присуще некоторым природным формам более общей концепции. Методологически понятие «самоподобие», вообще говоря, неприменимо для описания некоторых фрактальных множеств, например, для множества Мандельброта, фрагменты которых, строго говоря, не отображаются во все множество с помощью преобразования подобия.

Множество Мандельброта, граница которого представляет собой фрактальное множество, описывает конкретные процессы и явления реальности, связанные со свойствами устойчивости и хаоса в динамических системах, стимулируя тем самым исследования фрактальных множеств на комплексной плоскости. Специалист в области концепции обучения фрактальной геометрии В.С. Секованов считает: «Полезны комплексные фракталы для реализации дидактических целей, поскольку математические исследования здесь органически переплетаются с разработкой алгоритмов, реализуемых с помощью современных информационных и коммуникативных технологий...» [3, с. 37]. Бесконечный итерационный процесс как повторное применение операций, порождающий множество Мандельброта, задаётся с помощью квадратичного отображения $z \to z^2 + c$, где z и c — комплексные числа. Итерационный процесс начинается с какого-нибудь фиксированного числа z, например, в канонической форме это $z = 0$. Затем, в нем каждый раз в алгебраическое выражение $z^2 + c$ подставляется значение z, полученное на предыдущем шаге, а если выбирать различные значения c, то полученные последовательности комплексных чисел стремятся к бесконечности или ограничены в своём движении определённой областью, принимающей форму «*множества Мандельброта*». Математики, которые с помощью компьютера получили графическое изображение множества Мандельброта, считают, что это множество представляет собой самый сложный геометрический объект в математике. Если следовать противоположному правилу, когда значение c фиксировано, а z принимает различные значения, то получающееся в результате такого итерационного процесса множество отличается от множества Мандельброта, а его граница тоже является фрактальным множеством и называется «*множеством Жюлиа*» по имени французского математика Гастона Жюлиа.

Несмотря на определённую аналогию в несущей конструкции, эти множества различаются тем, что структура множества Жюлиа подобна самой себе, естественно, в различном масштабе, в то время как для множества Мандельброта, даже для его границы, это не так. Для преодоления этого затруднения, отстаивая релевантность принятого методологического подхода, можно расширить описания фракталов не только через преобразования подобия, но и через другие виды геометрических преобразований, например, аффинных. Аффинное преобразование, как теоретический конструкт, представляет собой линейное преобразование вместе с последующим преобразованием сдвига, то есть это не что иное, как формула для изменения масштаба, поворотов и перемещений геометрических фигур. Если последовательность таких преобразований применять к фигуре бесконечно, то результат будет подобен самому себе, а именно, ее увеличенная часть выглядит аналогично целому, что характерно для фракталов. Математическая проблематика, которая проявляется в том, что надо знать, какие преобразования следует выбирать, тесно связана с философскими императивами. В качестве иллюстративного примера можно показать, как, используя небольшой набор аффинных преобразований, можно создавать абстракции, подобные простому самоподобному фракталу под названием «*салфетка Серпинского*», придуманному известным польским математиком Вацлавом Серпинским. Пусть исходное множество — равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобъём его на четыре меньшие треугольные области, соединив отрезками середины сторон исходного треугольника, и удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Затем повторим процесс такого построения для каждой из трёх оставшихся треугольных областей. Бесконечно продолжая итерации подобным образом, получим последовательность вложенных множеств, чьё пересечение и образует нужное множество.

Конструктивное построение этого фрактала показывает, что полученное множество представляет собой объединение трёх непересекающихся и уменьшенных в два раза копий, следовательно, это пример самоподобного фрактала с размерностью $d = \ln 3/\ln 2 \approx 1,585$. Заметим, что «площадь» салфетки Серпинского равна нулю, но она слишком «дырява», чтобы иметь площадь в смысле стандартного определения. Действительно, на первом шаге выбросили 1/4 часть площади, на втором шаге выбросили 3 треугольника, причём площадь каждого из них равна 1/42 площади исходного треугольника. Рассуждая таким образом, получим, что полная доля выкинутой площади составила: $1/4 + 3(1/42) + 32(1/43) + ... + 3n - 1(1/4n) + ... = 1$. Поэтому можно утверждать, что оставшееся множество имеет площадь меры нуль. В математике хорошо известна ещё одна конструкция под названием «*ковёр Серпинского*», который определяется совершенно аналогично, а разница состоит только в том, что салфетка строится на основе треугольника, а ковёр — на основе квадрата. В частности, можно описать совершенно случайный процесс, в результате которого появляется симметричный узор фрактала Серпинского, то есть можно говорить о репрезентации философской импликации — «случайность порождает порядок». Даже если феномен самоподобия может возникнуть там, где его совершенно не ждут, почему математики и философы в своих исследованиях обратились к концепции фракталов? «В этой концепции философско-математического синтеза изумлённому взгляду открывается совершенно новый мир чистой пластической красоты, заложенный давным-давно в слово «геометрия»; открывается особый, парадоксальный тип сложности, удивительный мир синергии хаоса и порядка» [4, с. 37]. Фрактальную геометрию природы, как философско-мировоззренческую концепцию, заставившую исследователей по-новому взглянуть на мир, можно отнести к философии постнеклассической математики, возникшей в конце XX века.

Рассмотрим теперь другой популярный пример простейшего фрактала из неклассической математики, изучаемый студентами-математиками в классическом университете. Для этого посчитаем хаусдорфову размерность канторова множества, которое было построено Кантором, при попытке найти промежуточное по мощности множество между рядом натуральных чисел N и континуумом вида [0, 1]. Оно получается последовательным выбрасыванием третей из сегмента [0, 1]. То есть единичный отрезок прямой делится на три равные части, и средняя часть выбрасывается. С каждой из двух оставшихся частей совершается такая же операция (см. рис. 1).

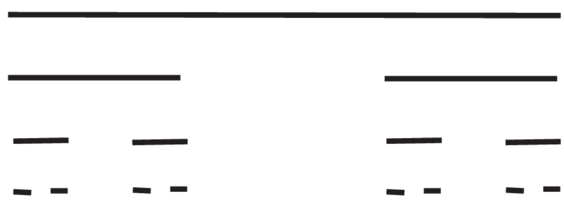

Рис. 1. Пример простейшего фрактала

Продолжая этот процесс, получим, что на n-м шаге имеем $N(\varepsilon) = 2^n$ кусков отрезка длины $\epsilon = 3^{-n}$. Таким образом, их суммарная длина будет равна $\mathrm{A}_n = (2/3)^n$, а при $n \to \infty$ получаем, что $\mathrm{A}_n \to 0$. Нетрудно понять, что в пределе от отрезка [0, 1] почти ничего не остаётся, а то, что остаётся, называется «канторовым множеством». Действительно, так как длина выброшенных третей равна $1/3 + 2/9 + 4/27 + ... + (2n - 1)/(3n) + ... = 1$, то, по существу, «вся длина» отрезка [0, 1] выбрасывается. Однако феноменальность этой процедуры состоит в том, что оставшееся после выбрасывания третей «тощее множество», которое было названо канторовым, оказалось равномощным континууму [0, 1]. Для Георга Кантора это был настоящий шок! Но пример канторова множества мы рассматривали ради того, чтобы посчитать его хаусдорфову размерность, которая равна $d = \ln 2/\ln 3 = \log_3 32 = 0,631... < 1$, так что размерность канторова множества больше, чем у точки, но меньше, чем у линии. Напомним, что аналитические характеристики математических объектов выражаются через алгебраические, топологические и порядковые структуры математики, хотя «дробномерный» мир фракталов является нестандартным обобщением классического понятия размерности, совершенно не похожим на линейность математических объектов с единственным измерением.

Во фрактальных объектах переплелись современные проблемы математического познания в целом — логика и вычисление, независимость от человека и зависимость от него, сложность и простота. Визуализация такого сложного объекта, как множество Мандельброта, стала возможной лишь благодаря современному компьютеру, но это не означает, что его можно полностью изобразить. Поскольку теоретические структуры современной математики для «тонких» моделей слишком сложны, то переход к компьютерному моделированию стимулирует принятие сравнительно «грубых» моделей, которые начали подменять собой реальность. Акцент в этом предположении надо поставить на слове «подменять», так как непосредственно вычислить фрактальные множества Мандельброта и Жюлиа непросто. По мнению специалиста по вычислению фрактальных множеств А.К. Дьюдни, «точность выполнения арифметических операций компьютером может не позволить точно указать точки, которые с самого начала должны находиться на границе, а когда начинается итерационный процесс, точность ещё более снижается и итерируемые переменные уходят из поля зрения» [5, с. 92]. Тем не менее, считает он, даже с помощью сравнительно несложной программы современный компьютер можно превратить в «своеобразный микроскоп» и наблюдать с его помощью за поведением границы фрактального множества.

Философия фрактальной геометрии рационализирует и конкретизирует восточный принцип «одно во всем и все в одном», указывая на область его применимости и одновременно методологически открывая простоту сложного. Поэтому благодаря этому новому разделу математики, зная ход процессов на малых масштабах, можно открывать возможность их определения на больших масштабах и, соответственно, наоборот. Заметим, что число различных масштабов длины природных объектов для практических целей бесконечно, так как реальность обладает не просто большей сложностью, а, вообще говоря, сложностью другого уровня. Фрактальная геометрия, занимающаяся изучением инвариантов группы «самоаффинных» преобразований, описывает весьма широкий класс природных явлений. С точки зрения принципа дополнительности, вопросы нельзя ставить в плане логических исключений, поскольку «линейная» или «фрактальная» установки наблюдателя оказывают влияние на результаты измерения. Длину и фрактальную размерность измерить одновременно, при одном и том же масштабном преобразовании, вообще говоря, нельзя, поскольку соответствующие утверждения об измерениях дополнительны друг к другу. Кроме того, разные способы задания размерностей могут конституировать разные математические понятия. Но если предположить «линеарность» объекта измерения, выражаемую целой размерностью, то тем самым конструируется определение длины, лишающей смысла понятие фрактала, так как тогда фрактал теоретически не наблюдаем.

В определённом смысле множество Мандельброта и подобные ему фрактальные множества нельзя считать созданием компьютера, так как вычислительный процесс должен продолжаться бесконечно долго, и поэтому эти множества невозможно окончательно и точно вычислить. Существование, приписанное множеству Мандельброта, можно трактовать как свойство его абсолютной природы. Когда Мандельброт увидел самые первые компьютерные изображения, он счёл полученные размытые структуры результатом сбоя и только потом убедился в том, что они действительно являются частью строящегося множества, хотя сложную структуру множества Мандельброта во всех её деталях не под силу охватить никому, так как её невозможно полностью отобразить на компьютере. Результатом исследования любого математика, работающего на компьютере, будет приближение к единой фундаментальной математической структуре, которая уже существует где-то вне нас. В этом случае даже самая изощрённая математическая интуиция, возможно, представляет собой всего лишь некоторое знание поведения математических объектов в «виртуальной реальности», создающей впечатление человека о пребывании в искусственно созданном мире. На мировоззренческом уровне фрактал уже становится философской категорией, и «по степени сложности традиционно выделяют следующие типы фрактальных образований: геометрический, алгебраический, стохастический» [6, с. 211]. Философская концепция фрактала Мандельброта изменила и компьютеризованную социокультурную действительность, в которой виртуальная реальность отражает целостное единство субъективного и объективного в человеке.

Наибольшей степенью наглядности обладают фракталы геометрического типа, примерами которых являются снежинка Коха и салфетка Серпинского. Наиболее известными фракталами алгебраического типа, которые называют динамическими, являются множество Мандельброта и множество Жюлиа. В математическом отношении фракталы стохастического типа самые сложные, так как образуются в том случае, когда в процессе случайным образом изменяется какой-либо параметр, например, представление о фрактальных признаках стохастического поведения физической системы возникает при рассмотрении броуновского движения. Современная вычислительная математика, сочетающая в своём методологическом обосновании формализм теоретической математики и конструктивизм прикладной математики, с учётом все более совершенствующихся компьютеров, вообще говоря, не ограничена в своём движении к надёжности и согласованности с имеющимися доказательствами математического существования. Несущую конструкцию современной математики можно представить в виде постепенного накопления «некорректируемых структур», к которым, несомненно, относятся теория чисел, аналитическая и алгебраическая геометрия, дифференциальные и интегральные уравнения, вещественный, комплексный и функциональный анализ и многие другие теории. Отличительным признаком полной структурной стабилизации развитых математических теорий является их аксиоматизация. Но если понимать современную математику только как науку об абстрактных аксиоматических структурах, то большая часть вычислительной математики в нее явно не укладывается. Поэтому в контексте системного подхода к обоснованию математических теорий следует стремиться к их объединению, синтезу и замыканию их, в конце концов, в системную целостность.

С точки зрения философского и математического подходов к обоснованию математических теорий, спекуляции о компьютерных неожиданностях в сфере фракталов постепенно утихают, хотя обнаруженные эффекты не только нетривиальны, но и в определённой степени фундаментальны в современной теории познания. Хотя фрактальные объекты были известны довольно давно, познавательный интерес к ним появился после активной популяризаторской деятельности Бенуа Мандельброта, работавшего в корпорации IBM, благодаря которому математики и информатики сумели открыть удивительный мир, по-новому взглянув на хорошо знакомые математические объекты и явления. Возможно поэтому в конце прошлого века на страницах журнала "Mathematical Intelligencer" прошла дискуссия под названием «Кто же открыл фрактал Мандельброта?» [7]. Хотя Мандельброт опубликовал свою пионерскую работу в 1980 году, некоторые математики, упомянутые в указанной дискуссии, заявляли, что наблюдали множество Мандельброта на дисплее своего компьютера еще раньше, и даже опубликовали соответствующую работу. Но именно Мандельброт развил интуитивное понимание хаусдорфовой размерности до практической реализации концепции фрактальной размерности. Вполне аргументированные возражения Мандельброта сводились к тому, что определения и построения сами по себе «ничего не значат», если при этом не было сказано, почему они важны, а ещё лучше было бы убедить других в этой важности. Но, все равно, не следует утверждать, что новую науку создал один человек, имея в виду его предшественников.

С помощью фрактальных объектов природа на языке математики демонстрирует не просто значительно более высокую степень сложности, соответствующей современному уровню развития науки, а принципиально другой уровень. Когда появляется дополнительная мотивация в контексте новых философских подходов к репрезентации фрактальной геометрии природы, созданной, прежде всего, для нужд естествознания и играющей ведущую роль в возрождении теории итераций, иногда удаётся отойти от шаблона, которому обычно следуют при изучении различных тем классической математики, и вернуться к анализу новых математических объектов с меньшей предубеждённостью. Особый интерес в философии математики представляет один из основных принципов методологии современной науки — «принцип нелинейности», согласно которому, любая сложная развивающаяся система не может быть эксплицирована аддитивным способом, поскольку её целостность нельзя описать через суммативность составляющих её частей. Поэтому философская составляющая в практической реализации математики выступает как конструктивный методологический ориентир, что очень важно для формирования познавательного и преобразовательного мировоззрения студентов, поскольку в каждый конкретный период исторической эволюции математического знания можно выявить философско-методологическое сосуществование математических методов, находящихся на разных этапах эволюции.

Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М. : Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. Данилов Ю.А. Красота фракталов // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. М. : Прогресс-Традиция, 2000. С. 186–190.
3. Секованов В.С. О множествах Мандельброта и Жюлиа для многочленов комплексной переменной // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2011. Т. 17, № 3. С. 37–43.
4. Дунаев В.Ю., Курганская В.Д. Фрактальная геометрия природы и архитектоника смыслового пространства культуры // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. 2012. Т. 10, Вып. 4. С. 34–41.
5. Дьюдни А.К. Множество Мандельброта и родственные ему множества Жюлиа // В мире науки. 1988. № 1. С. 88–93.
6. Елхова О.И. Фрактальность виртуальной реальности // Вестник Башкирского университета. 2014. Т. 19, № 1. С. 210–214.
7. Андрианов И. Кто же открыл фрактал Мандельброта? // Знание — сила. 1997. № 11. С. 70–73.

CONCEPT OF MANDELBROT FRACTAL FROM THE MATHEMATICAL AND PHILOSOPHICAL POINTS OF VIEW

V.A. Erovenko
Dr.Sc.(Phys.-Math.), Professor, e-mail: erovenko@bsu.by

Belarusian State University, Minsk, Belarus'

Abstract. The article is devoted to the philosophical and mathematical aspects of the concept of Mandelbrot fractal which was the implementation of the synthesis of geometric and virtual-sociocultural perception of the world revived the experimental mathematics of "nonidealized" objects.

Keywords: Mandelbrot fractal, fractal geometry, fractal dimension, fractal reality modern computer.