Математические структуры и моделирование
2015. № 4(36). С. 5–22

УДК 512.815.8

КОМПЛЕКСНЫЙ МОМЕНТ И СПИН-ЗАРЯДОВОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет

Аннотация. Массовая формула и собственные подпространства оператора энергии определяются в рамках комплексной оболочки (комплексного момента) групповой алгебры собственной группы Лоренца. Собственные подпространства оператора энергии отождествляются с энергетическими (массовыми) уровнями спектра элементарных частиц. Элементарная частица задаётся суперпозицией векторов состояния спин-зарядового гильбертова пространства.

Ключевые слова: комплексный момент, группа Лоренца, спинорная структура, гильбертово пространство.

1. Введение

Согласно господствующей ныне парадигме близкодействия, элементарные частицы взаимодействуют друг с другом посредством переносчиков полей взаимодействий. Ареной таких взаимодействий является пространство-время, что придаёт последнему ярко выраженный субстанциональный характер. Предполагается, что все процессы микромира разворачиваются в пространстве-времени[1]. Неудивительно, что как следствие такого представления все развитие релятивистской квантовой теории происходило в рамках картины Шрёдингера, в которой волновая функция (вектор гильбертова пространства) зависит от времени. Долгое время считалось, что картина Гейзенберга, в которой векторы состояния не зависят от времени, эквивалентна картине Шрёдингера. Первым, кто обратил внимание на неэквивалентность этих двух картин, был Дирак. Дирак [2] утверждал, что картина Шрёдингера слишком узка, поскольку векторы состояния этой картины определены в ***сепарабельном*** гильбертовом пространстве, а для описания квантовых процессов необходимы векторы состояния, определённые в более общих ***несепарабельных*** гильбертовых пространствах. Картина Гейзенберга, в силу независимости векторов состояния от пространственно-временных координат, включает в себя несепарабельные пространства. Дирак

[1]Против такой точки зрения в своё время возражал Дж. Чью [1], утверждая, что пространство-время имеет макроскопическую природу и по этой причине не является пригодным для описания микромира.

пишет: «Все это заставляет думать, *что картина Гейзенберга хорошая картина, а картина Шрёдингера плохая и что обе картины неэквивалентны*» [2, с. 14]. И далее: «Как только вы видите ссылку на картину Шрёдингера, сейчас же выбросьте её вон. При этом вы обнаружите, что без этих ссылок зачастую можно довольно хорошо обойтись и в результате такого выбрасывания вся теория становится более логичной и более вразумительной. Я сказал бы, что таким образом из обычной трактовки квантовой теории поля удаляется значительная часть хлама. То, что при этом остаётся, относится исключительно к гейзенберговской картине и составляет существо теории, и на нем нам следует сосредоточить наше внимание» [2, с. 15]. По сути, указанная Дираком неэквивалентность картин Гейзенберга и Шрёдингера, явилась первым строгим математическим доказательством существования двухуровневой структуры реальности, на что ранее указывали Гейзенберг и Фок (концепция Гейзенберга-Фока).

В данной статье, следуя концепции Гейзенберга-Фока, элементарная частица определяется как ***несепарабельное состояние*** в спин-зарядовом гильбертовом пространстве $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$. Пространство $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ позволяет учитывать ***спин***, ***заряд*** и ***массу*** элементарной частицы, при этом все эти три характеристики являются атрибутами *спинтензорного субстрата* (спинорной структуры), ассоциированного с каждым вектором гильбертова пространства $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$. Зарядовое сопряжение C интерпретируется как псевдоавтоморфизм спинорной структуры. Энергетические (массовые) уровни, задающие актуализированные состояния частиц, описываются в рамках собственных подпространств оператора энергии (комплексного момента).

2. Комплексный момент

Как известно, универсальное накрытие собственной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$ (группа вращений четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$) задаётся спинорной группой

$$\mathbf{Spin}_+(1,3) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2 : \ \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1 \right\} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Пусть $\mathfrak{g} \to T_{\mathfrak{g}}$ — произвольное линейное представление собственной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$ и пусть $\mathsf{A}_i(t) = T_{a_i(t)}$ — инфинитезимальный оператор, соответствующий вращению $a_i(t) \in \mathrm{SO}_0(1,3)$. Аналогично, пусть $\mathsf{B}_i(t) = T_{b_i(t)}$, где $b_i(t) \in \mathrm{SO}_0(1,3)$ — гиперболическое вращение. Элементы A_i и B_i образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{array}{lll} [\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2]=\mathsf{A}_3, & [\mathsf{A}_2,\mathsf{A}_3]=\mathsf{A}_1, & [\mathsf{A}_3,\mathsf{A}_1]=\mathsf{A}_2, \\ [\mathsf{B}_1,\mathsf{B}_2]=-\mathsf{A}_3, & [\mathsf{B}_2,\mathsf{B}_3]=-\mathsf{A}_1, & [\mathsf{B}_3,\mathsf{B}_1]=-\mathsf{A}_2, \\ [\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_1]=0, & [\mathsf{A}_2,\mathsf{B}_2]=0, & [\mathsf{A}_3,\mathsf{B}_3]=0, \\ [\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_2]=\mathsf{B}_3, & [\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_3]=-\mathsf{B}_2, & \\ [\mathsf{A}_2,\mathsf{B}_3]=\mathsf{B}_1, & [\mathsf{A}_2,\mathsf{B}_1]=-\mathsf{B}_3, & \\ [\mathsf{A}_3,\mathsf{B}_1]=\mathsf{B}_2, & [\mathsf{A}_3,\mathsf{B}_2]=-\mathsf{B}_1. & \end{array}\right\} \tag{1}$$

Перейдём к комплексной оболочке групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, определяя операторы

$$\mathsf{X}_l=\frac{1}{2}i(\mathsf{A}_l+i\mathsf{B}_l),\quad \mathsf{Y}_l=\frac{1}{2}i(\mathsf{A}_l-i\mathsf{B}_l), \tag{2}$$
$$(l=1,2,3).$$

Используя соотношения (1), находим

$$[\mathsf{X}_k,\mathsf{X}_l]=i\varepsilon_{klm}\mathsf{X}_m,\quad [\mathsf{Y}_l,\mathsf{Y}_m]=i\varepsilon_{lmn}\mathsf{Y}_n,\quad [\mathsf{X}_l,\mathsf{Y}_m]=0. \tag{3}$$

Из соотношений (3) следует, что каждое из множеств операторов X и Y генерирует группу $\mathrm{SU}(2)$ и эти две группы коммутируют между собой. Таким образом, из соотношений (3) следует, что группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, по существу, эквивалентна группе $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ (данный изоморфизм, безусловно, имеет локальный характер, т. е. вблизи единицы группы, поскольку $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ некомпактна).

Как известно, наиболее важной *наблюдаемой* в квантовой механике является ***энергия***. Пусть имеется эрмитов *оператор энергии* H[2], определённый на гильбертовом пространстве H_∞[3]. Тогда все возможные значения энергии являются собственными значениями оператора H. При этом, если $E'\neq E''$ — собственные значения H, а $|\psi'\rangle$, $|\psi''\rangle$ — принадлежащие им собственные векторы в пространстве H_∞, то $\langle\psi'|\psi''\rangle=0$. Все собственные векторы, принадлежащие данному собственному значению E, образуют вместе с нулевым вектором *собственное подпространство* H_E гильбертова пространства H_∞. Все собственные подпространства $\mathsf{H}_E\in\mathsf{H}_\infty$ конечномерны. Размерность H_E называется *кратностью* собственного значения E, если эта размерность r больше единицы, собственное значение E является *r-кратно вырожденным*. Как известно [3], оператор энергии H перестановочен со всеми операторами в H_∞, представляющими алгебру Ли группы $\mathrm{SU}(2)$. Следовательно, H перестановочен также со всеми операторами в H_∞, представляющими групповую алгебру группы $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$.

[2]*Спектр* этого оператора образует некоторое множество действительных чисел.

[3]Будем предполагать, что это пространство является сепарабельным, т.е. обладает счётной базой.

Рассмотрим произвольное собственное подпространство H_E оператора энергии H. Поскольку операторы X_l, Y_l и H коммутируют между собой, то, как известно [2], для этих операторов можно построить общую систему собственных функций. Это значит, что подпространство H_E инвариантно относительно операторов X_l, Y_l[4]. Каждый из операторов X_l, Y_l, например, X_3 (или Y_3) есть эрмитов оператор на H_E и, следовательно, имеет на H_E r_E независимых собственных векторов.

Далее, предположим, что дано некоторое *локальное представление* группы $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ операторами, действующими в H_∞, т. е. представление, определённое в некоторой окрестности единицы группы. Потребуем, чтобы все представляющие операторы были перестановочны с H. Тогда каждое собственное подпространство H_E оператора энергии инвариантно относительно операторов комплексного момента X_l, Y_l.

Далее, вводя операторы вида («повышающие» и «понижающие» операторы группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$)

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{X}_+=\mathsf{X}_1+i\mathsf{X}_2,\quad \mathsf{X}_-=\mathsf{X}_1-i\mathsf{X}_2,\\ &\mathsf{Y}_+=\mathsf{Y}_1+i\mathsf{Y}_2,\quad \mathsf{Y}_-=\mathsf{Y}_1-i\mathsf{Y}_2, \end{aligned}\right\}\tag{4}$$

видим, что

$$[\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_+]=\mathsf{X}_+,\quad [\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_-]=-\mathsf{X}_-,\quad [\mathsf{X}_+,\mathsf{X}_-]=2\mathsf{X}_3,$$

$$[\mathsf{Y}_3,\mathsf{Y}_+]=\mathsf{Y}_+,\quad [\mathsf{Y}_3,\mathsf{Y}_-]=-\mathsf{Y}_-,\quad [\mathsf{Y}_+,\mathsf{Y}_-]=2\mathsf{Y}_3.$$

В силу коммутативности соотношений (3) пространство неприводимого конечномерного представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ может быть натянуто на совокупность $(2l+1)(2\dot{l}+1)$ базисных кет-векторов $|l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle$ и базисных бра-векторов $\langle l,m;\dot{l},\dot{m}|$, где $l,m,\dot{l},\dot{m}$ — целые или полуцелые числа, $-l\leqslant m\leqslant l$, $-\dot{l}\leqslant\dot{m}\leqslant\dot{l}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{X}_-|l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l,m-1;\dot{l},\dot{m}\rangle\ \ (m>-l),\\
&\mathsf{X}_+|l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle=\sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l,m+1;\dot{l},\dot{m}\rangle\ \ (m<l),\\
&\mathsf{X}_3|l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle=m|l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle,\\
&\langle l,m;\dot{l},\dot{m}|\mathsf{Y}_-=\langle l,m;\dot{l},\dot{m}-1|\sqrt{(\dot{l}+\dot{m})(\dot{l}-\dot{m}+1)}\ \ (\dot{m}>-\dot{l}),\\
&\langle l,m;\dot{l},\dot{m}|\mathsf{Y}_+=\langle l,m;\dot{l},\dot{m}+1|\sqrt{(\dot{l}-\dot{m})(\dot{l}+\dot{m}+1)}\ \ (\dot{m}<\dot{l}),\\
&\langle l,m;\dot{l},\dot{m}|\mathsf{Y}_3=\langle l,m;\dot{l},\dot{m}|\dot{m}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Таким образом, комплексная оболочка групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, порождая комплексный угловой момент, приводит к *двойственности*, отражающейся в появлении двух пространств: пространства кет-векторов $|l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle$ и дуального к нему пространства бра-векторов $\langle l,m;\dot{l},\dot{m}|$.

[4]Более того, операторы X_l, Y_l можно рассматривать *только на* H_E.

2.1. Спинорная структура

Как известно [4, 5], спинтензорные представления группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$ образуют основу всех конечномерных представлений группы Лоренца. Рассмотрим связь спинтензорных представлений с комплексными алгебрами Клиффорда. С каждой комплексной алгеброй Клиффорда $\mathbb{C}_n = \mathbb{C} \otimes C\!\ell_{p,q}$ $(n = p + q)$ ассоциировано спинпространство $\mathbb{S}_{2^{n/2}}$, которое является комплексификацией минимального левого идеала вещественной подалгебры $C\!\ell_{p,q}$: $\mathbb{S}_{2^{n/2}} = \mathbb{C} \otimes I_{p,q} = \mathbb{C} \otimes C\!\ell_{p,q} f_{pq}$, где f_{pq} — примитивный идемпотент подалгебры $C\!\ell_{p,q}$. Далее, спинпространство, соответствующее бикватернионной алгебре $\mathbb{C}_2$, имеет вид $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C} \otimes I_{2,0} = \mathbb{C} \otimes C\!\ell_{2,0} f_{20}$ или $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C} \otimes I_{1,1} = \mathbb{C} \otimes C\!\ell_{1,1} f_{11} (\mathbb{C} \otimes I_{0,2} = \mathbb{C} \otimes C\!\ell_{0,2} f_{02})$. Следовательно, тензорное произведение k алгебр $\mathbb{C}_2$ индуцирует тензорное произведение k спинпространств $\mathbb{S}_2$: $\mathbb{S}_2 \otimes \mathbb{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_{2^k}$. Векторы спинпространства $\mathbb{S}_{2^k}$ (или элементы минимального левого идеала алгебры $\mathbb{C}_{2k}$) являются спинтензорами следующего вида:

$$\boldsymbol{s}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} = \sum \boldsymbol{s}^{\alpha_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_k}, \tag{6}$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$, $\alpha_i = 1, 2$.

Далее, пусть $\overset{*}{\mathbb{C}}_2$ — алгебра бикватернионов, коэффициенты которой комплексно сопряжены коэффициентам алгебры $\mathbb{C}_2$. Тензорное произведение $\overset{*}{\mathbb{C}}_2 \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_2 \otimes \cdots \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_2 \simeq \overset{*}{\mathbb{C}}_{2r}$ r алгебр $\overset{*}{\mathbb{C}}_2$ индуцирует тензорное произведение r спинпространств $\dot{\mathbb{S}}_2$: $\dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \cdots \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 = \dot{\mathbb{S}}_{2^r}$. Векторы спинпространства $\dot{\mathbb{S}}_{2^r}$ имеют вид

$$\boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cdots\dot{\alpha}_r} = \sum \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_r}. \tag{7}$$

В общем случае имеем тензорное произведение k алгебр $\mathbb{C}_2$ и r алгебр $\overset{*}{\mathbb{C}}_2$:

$$\underbrace{\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}_2}_{k \text{ раз}} \bigotimes \underbrace{\overset{*}{\mathbb{C}}_2 \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_2 \otimes \cdots \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_2}_{r \text{ раз}} \simeq \mathbb{C}_{2k} \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_{2r}, \tag{8}$$

которое индуцирует спинпространство

$$\underbrace{\mathbb{S}_2 \otimes \mathbb{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_2}_{k \text{ раз}} \bigotimes \underbrace{\dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \cdots \otimes \dot{\mathbb{S}}_2}_{r \text{ раз}} = \mathbb{S}_{2^{k+r}} \tag{9}$$

с векторами

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_r} = \sum \boldsymbol{s}^{\alpha_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_k} \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_r}. \tag{10}$$

Для каждого $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ определим линейное преобразование спинтензора $\boldsymbol{s}$ посредством формулы

$$\boldsymbol{s}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_r} \longrightarrow \sum_{(\beta)(\dot{\beta})} A^{\alpha_1\beta_1} A^{\alpha_2\beta_2} \cdots A^{\alpha_k\beta_k} \overline{A}^{\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1} \overline{A}^{\dot{\alpha}_2\dot{\beta}_2} \cdots \overline{A}^{\dot{\alpha}_r\dot{\beta}_r} \boldsymbol{s}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_r}, \tag{11}$$

где символы (β) и $\left(\dot{\beta}\right)$ означают β_1, β_2, ..., β_k и $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$, ..., $\dot{\beta}_r$. Спинтензорные представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, определяемые формулой (11), действуют в спинпространстве $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ размерности 2^{k+r}. Как правило, каждое из этих представлений редуцируется на симметричную и антисимметричную части. Выделим подпространства $\mathrm{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2^{k+r}}$ симметрических спинтензоров. Представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ в пространствах $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ образуют *полную* систему неприводимых представлений этой группы. Пространство $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ симметрических спинтензоров имеет размерность

$$\dim \mathrm{Sym}_{(k,r)} = (k+1)(r+1). \tag{12}$$

Размерность пространства $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ называется *степенью* представления $\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Легко видеть, что группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ имеет представления ***любой степени***. Это представление группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ обозначим как $\boldsymbol{\tau}_{\frac{k}{2},\frac{r}{2}} = \boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$. Произведения (8) и (9) определяют *комплексную спинорную структуру*. Представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, генерируемые в рамках этой структуры, также являются комплексными. Каждое *неприводимое* конечномерное представление группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ эквивалентно одному из представлений $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$.

2.2. Уравнения движения

В 1945 г. Баба [6] ввёл релятивистские волновые уравнения

$$i\Gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + m\psi = 0, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{13}$$

описывающие системы с многими массами и спинами[5]. В свою очередь, уравнения движения для произвольных спиновых цепочек (спиновых мультиплетов)

$$\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}},\ \boldsymbol{\tau}_{l+\frac{1}{2},\dot{l}-\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\tau}_{l+1,\dot{l}-1},\ \boldsymbol{\tau}_{l+\frac{3}{2},\dot{l}-\frac{3}{2}},\ \ldots,\ \boldsymbol{\tau}_{\dot{l}l}$$

в бивекторном пространстве $\mathbb{R}^6$ имеют вид [7,8]

$$\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l\dot{l}}\frac{\partial\psi}{\partial a_j} - i\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l\dot{l}}\frac{\partial\psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)}\dot{\psi} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l+\frac{1}{2},\dot{l}-\frac{1}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial a_j} - i\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l+\frac{1}{2}\dot{l}-\frac{1}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)}\dot{\psi} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l+1,\dot{l}-1}\frac{\partial\psi}{\partial a_j} - i\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l+1\dot{l}-1}\frac{\partial\psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)}\dot{\psi} = 0,$$

[5]Уравнения Бабы определены в пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. Эти уравнения представляют собой (как и вся теория релятивистских волновых уравнений) попытку описания элементарных частиц в терминах пространства-времени, т. е. в рамках картины Шрёдингера.

$$\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l+\frac{3}{2},\dot{l}-\frac{3}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial a_j}-i\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l+\frac{3}{2}\dot{l}-\frac{3}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial a_j^*}+m^{(s)}\dot{\psi}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l\dot{l}}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial a_j}+i\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j^{l\dot{l}}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial a_j^*}+m^{(s)}\psi=0, \tag{14}$$

где спин $s=l-\dot{l}$ изменяется следующим образом:

$$l-\dot{l},\ l-\dot{l}+1,\ l-\dot{l}+2,\ l-\dot{l}+3,\ \ldots,\ \dot{l}-l.$$

Система (14) описывает состояния частиц с различными массами и спинами. Масса состояния $m^{(s)}$, соответствующая уровню энергии $\mathsf{H}_E\simeq\mathrm{Sym}_{(k,r)}$, определяется формулой

$$m^{(s)}=\mu^0\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\dot{l}+\frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

где $s=|l-\dot{l}|$. Явный вид элементов матриц $\Lambda_i^{l\dot{l}}$ находится посредством вычисления коммутаторов

$$\left[\left[\Lambda_3^{l\dot{l}},\mathsf{X}_-^{l\dot{l}}\right],\mathsf{X}_+^{l\dot{l}}\right]=2\Lambda_3^{l\dot{l}},\quad \left[\left[\Lambda_3^{l\dot{l}},\mathsf{Y}_-^{l\dot{l}}\right],\mathsf{Y}_+^{l\dot{l}}\right]=2\Lambda_3^{l\dot{l}},$$

$$\left[\mathsf{A}_2^{l\dot{l}},\Lambda_3^{l\dot{l}}\right]=\Lambda_1^{l\dot{l}},\quad \left[\mathsf{A}_1^{l\dot{l}},\Lambda_3^{l\dot{l}}\right]=-\Lambda_2^{l\dot{l}}$$

относительно кет- и бра-векторов спирального базиса (более подробно см. [8]), здесь $\mathsf{A}_i^{l\dot{l}}=\mathsf{A}_i^l\otimes\mathbf{1}_{2\dot{l}+1}-\mathbf{1}_{2l+1}\otimes\mathsf{A}_i^{\dot{l}}$.

3. Концепция Гейзенберга-Фока

Как известно, копенгагенская интерпретация квантовой механики утверждает, что не стоит искать более глубокого описания и понимания реальности, данной нам в эксперименте. Только феномены являются реально существующими, и помимо них нет никакой более глубокой реальности. Согласно Гейзенбергу [9], за квантовым феноменом стоит более глубокий уровень реальности — бытие в возможности, что приводит к двухуровневой, двухмодусной онтологической картине: имеется модус бытия в возможности и модус бытия действительного, мир фактически существующего[6]. Гейзенберг в своих

[6]Гейзенберг отмечал, что это возвращает нас к философии Аристотеля, согласно которой реальность имеет двухуровневую структуру: $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\sigma$ (динамис) — бытие в возможности (потенция) и $\varepsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\chi\varepsilon\iota\alpha$ (энтелехия) — бытие действительного (проявленный мир). Согласно А.Ю. Севальникову [10], это приводит к изначальной «расщеплённости», многомодусности или *полионтичности бытия*. Ту же двухуровневую структуру реальности мы видим у Зурека [11] в теории декогеренции, согласно которой в основании реальности находится нелокальный квантовый субстрат (*квантовый домен*), а весь видимый мир (*классический домен*) возникает из квантового домена в результате процесса декогеренции. Двухмодусность бытия является ключевым моментом в теории физических структур Ю.И. Кулакова [12] и реляционной теории пространства-времени Ю.С. Владимирова [13].

философских работах неоднократно подчёркивал необходимость использования в квантовотеоретической онтологии аристотелевского понятия «бытие в возможности», однако, сам он не развил последовательным образом эти мысли. По сути к тем же идеям независимо пришёл В.А. Фок, но значительно более последовательным образом. Фок подчёркивает объективный характер существования потенциальных возможностей: «Описываемое волновой функцией состояние объекта является объективным в том смысле, что оно представляет объективную (**независимую от наблюдателя**) характеристику потенциальных возможностей того или иного результата взаимодействия атомного объекта с прибором. В том же смысле оно относится именно к данному, единичному объекту. Но это объективное состояние не является ещё действительным, в том смысле, что для объекта в данном состоянии указанные потенциальные возможности ещё не осуществились. Переход от потенциальной возможности к осуществившемуся происходит в заключительной стадии эксперимента» [14, с. 13]. Фок настаивает на объективном существовании потенциальной возможности, причём чётко указывает (что особенно важно!) на её соответствие с ***единичным квантовым объектом*** (например, с элементарной частицей).

4. Гильбертово пространство $\mathbf{H}^S_{2s+1}\otimes\mathbf{H}_\infty$

Согласно концепции Гейзенберга-Фока, описывающей двухмодусную структуру реальности, модус потенциального соотнесён с единичным квантовым объектом (в нашем случае этим объектом будет элементарная частица). Прежде чем приступить к построению абстрактного гильбертова пространства элементарной частицы, рассмотрим соотношение картин Шрёдингера и Гейзенберга согласно двухмодусной структуре. *Картина Шрёдингера принадлежит модусу актуального*, здесь есть пространство-время и сепарабельные гильбертовы пространства. *Картина Гейзенберга принадлежит модусу потенциального*, здесь уже нет пространства-времени в его обычном понимании, векторы состояния в этой картине не зависят от времени и определены в несепарабельных гильбертовых пространствах[7].

Согласно фон Нейману [15], «природа» векторов *абстрактного гильбертова пространства* $\mathbf{H}_\infty$ несущественна, существенно лишь выполнение аксиом сходимости, сепарабельности, сложения, умножения и скалярного (внутренне-

[7]Здесь необходимо сделать следующее уточнение. Согласно стандартному пониманию картины Гейзенберга, если векторы состояния этой картины не зависят от времени, то операторы, представляющие наблюдаемые величины, от времени зависят. Поэтому картина Гейзенберга в её стандартном понимании не может быть целиком соотнесена с модусом потенциального. С другой стороны, наблюдаемые величины есть феномены фактически существующего, проявленного мира, т. е. принадлежащими к модусу актуального. По этой причине математика линейных самосопряжённых операторов, представляющих наблюдаемые величины, не имеет смысла для модуса потенции. Эта ситуация, в некотором смысле, близка к аналитической теории S-матрицы. Вот что пишет Чью: «Теория S-матрицы не использует всего аппарата квантовой механики: в ней сохраняется только принцип суперпозиции. В теории нет ни гамильтониана, ни каких-либо других операторов, нет также изменяющихся во времени векторов состояния» [1, с. 17].

го) произведения.

Пусть $|\mathsf{A}\rangle$, $|\mathsf{B}\rangle$, $|\mathsf{C}\rangle$, … — векторы пространства $\mathbf{H}_\infty$, удовлетворяющие следующим аксиомам.

I. *Сложение.*

$$|\mathsf{A}\rangle + |\mathsf{B}\rangle = |\mathsf{B}\rangle + |\mathsf{A}\rangle\,, \quad (|\mathsf{A}\rangle + |\mathsf{B}\rangle) + |\mathsf{C}\rangle = |\mathsf{A}\rangle + (|\mathsf{B}\rangle + |\mathsf{C}\rangle)\,.$$

II. *Умножение.*

$$c_1\,(|\mathsf{A}\rangle + |\mathsf{B}\rangle) = c_1\,|\mathsf{A}\rangle + c_1\,|\mathsf{B}\rangle\,, \quad (c_1 + c_2)\,|\mathsf{A}\rangle = c_1\,|\mathsf{A}\rangle + c_2\,|\mathsf{A}\rangle\,,$$

$$(c_1 c_2)\,|\mathsf{A}\rangle = c_1\,(c_2\,|\mathsf{A}\rangle)\,, \quad 0\cdot|\mathsf{A}\rangle = 0, \quad 1\cdot|\mathsf{A}\rangle = |\mathsf{A}\rangle\,.$$

III. *Внутреннее произведение.*

$$\langle(c_1\mathsf{A} + c_2\mathsf{B})\,|\mathsf{C}\rangle = \bar{c}_1\,\langle\mathsf{A}|\mathsf{C}\rangle + \bar{c}_1\,\langle\mathsf{B}|\mathsf{C}\rangle\,, \quad \langle\mathsf{C}\,|(c_1\,|\mathsf{A}\rangle + c_2\,|\mathsf{B}\rangle)\rangle = c_1\,\langle\mathsf{C}|\mathsf{A}\rangle + c_2\,\langle\mathsf{C}|\mathsf{B}\rangle\,.$$

Всегда имеет место $\langle\mathsf{A}|\mathsf{A}\rangle \geqslant 0$. При этом, если $|\mathsf{A}\rangle \neq 0$, то $\langle\mathsf{A}|\mathsf{A}\rangle > 0$. Длина вектора $|\mathsf{A}\rangle$ определяется формулой $\|\,|\mathsf{A}\rangle\,\| = \sqrt{\langle\mathsf{A}|\mathsf{A}\rangle}$.

IV. *Условие сепарабельности*[8]. В $\mathbf{H}_\infty$ существует такая бесконечная последовательность базисных векторов ξ^1, ξ^2, …, ξ^n, …, что для любого вектора $|\mathsf{A}\rangle$ существует однозначное разложение

$$|\mathsf{A}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi^i\right\rangle \left\langle\xi^i|\mathsf{A}\right\rangle,$$

где суммирование ряда понимается в смысле

$$\lim_{n\to\infty}\left| |\mathsf{A}\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi^i\right\rangle \left\langle\xi^i|\mathsf{A}\right\rangle \right| = 0.$$

V. *Сходимость.* Пусть

$$|\mathsf{A}_m\rangle = \sum_{i=1}^{m} \left|\xi^i\right\rangle \left\langle\xi^i|\mathsf{A}\right\rangle, \quad |\mathsf{A}_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left|\xi^i\right\rangle \left\langle\xi^i|\mathsf{A}\right\rangle.$$

Если

$$\lim_{m,n\to\infty} ||\mathsf{A}_m\rangle - |\mathsf{A}_n\rangle| = 0,$$

то существует вектор $|\mathsf{A}_0\rangle$, к которому $|\mathsf{A}_n\rangle$ сходятся:

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathsf{A}_n\rangle - |\mathsf{A}_0\rangle| = 0.$$

Как известно, функции вероятности[9] могут быть интерпретированы как векторы пространства $\mathbf{H}_\infty$ (эта интерпретация возможна при выполнении аксиом

[8]При выполнении аксиомы IV имеем *сепарабельное* гильбертово пространство. В случае отсутствия аксиомы IV приходим к *несепарабельному* гильбертову пространству, которое и будем использовать в дальнейшем.

[9]Здесь мы следуем терминологии Гейзенберга, который избегал использовать термин *волновая функция* применительно к описанию квантового объекта, считая, что этот термин является рудиментом картины Шрёдингера, т. е. затемняющим существо дела.

I–III). Следуя обозначениям Дирака [2], запишем функции вероятности как $|\psi\rangle = |\mathsf{A}\rangle$, где $|\mathsf{A}\rangle \in \mathbf{H}_\infty$. Векторы $|\mathsf{A}\rangle$ могут представлять тензоры, функции на группе, представления и т. д. Мы возьмём $|\mathsf{A}\rangle$ как функции на группе Лоренца, где каждый вектор $|\mathsf{A}\rangle \in \mathbf{H}_\infty$ соответствует некоторому представлению группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. В данном контексте условие фон Неймана принимает вид

$$\int\limits_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \langle\psi|U(g)\,|\psi\rangle\,dg \;<\; \infty, \tag{16}$$

где dg — мера Хаара на группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $U(g)$ — представление группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$[10].

4.1. Спиновые мультиплеты

Перейдём к дальнейшему обобщению абстрактного гильбертова пространства $\mathbf{H}_\infty$. В 1927 г. Паули [17] ввёл первую теорию спина электрона. Главная идея этой теории состоит в *удвоении* пространства функций вероятности. Пусть $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ — векторы пространства $\mathbf{H}_\infty$. Тогда удвоенное пространство определяется формальными линейными комбинациями вида

$$c_1\,|\psi_1\rangle + c_2\,|\psi_2\rangle\,, \tag{17}$$

где c_1 и c_2 — комплексные коэффициенты. Отсюда следует, что пространство $\mathbf{H}_\infty$ необходимо заменить тензорным произведением

$$\mathbf{H}_2^S \otimes \mathbf{H}_\infty. \tag{18}$$

Далее, первым простейшим спиновым мультиплетом является *спиновый дублет*, конструируемый в рамках пространства $\mathbf{H}_2^S \otimes \mathbf{H}_\infty$ (пространства Паули). Мы имеем здесь два спиновых состояния: одно состояние принадлежит линии спина 1/2, а другое состояние принадлежит дуальной линии спина 1/2. Первый спиновый дублет (см. рис. 1) определяется следующей схемой:

$$\begin{array}{ccc} \overset{(\frac{1}{2},0)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(0,\frac{1}{2})}{\bullet} \\ \frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{1}{2} \end{array} \tag{19}$$

Здесь вторая строка означает, что представление $(1/2,0)$ описывает состояние частицы (например, электрона) со значением спина 1/2. В свою очередь, представление $(0,1/2)$ описывает состояние частицы (электрона) со значением

[10] В рамках метода усовершенствованного алгебраического квантования внутреннее произведение состояний определяется посредством техники группового усреднения. В групповом усреднении используется интеграл $\int_G\langle\phi_1|U(g)|\phi_2\rangle dg$ над калибровочной группой G, где dg — так называемая «симметричная» мера Хаара на G, $U(g)$ — представление группы G, ϕ_1 и ϕ_2 — векторы состояния, принадлежащие вспомогательному гильбертову пространству $\mathcal{H}_{aux}$. Сходящееся групповое усреднение даёт алгоритм для построения полного множества наблюдаемых квантовой системы [16].

спина $-1/2$. Дублет (19) соответствует уравнению Дирака и по этой причине должен быть назван *фундаментальным дублетом*. С другой стороны, мы можем построить спиновый дублет, используя $(1, 1/2)$- и $(1/2, 1)$-представления:

$$\begin{array}{ccc} \overset{(1,\frac{1}{2})}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(\frac{1}{2},1)}{\bullet} \\ \frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Легко видеть, что существует бесконечно много спиновых дублетов, в которых различные спиновые состояния $1/2$ и $-1/2$ принадлежат соответственно линии спина $1/2$ и дуальной линии спина $1/2$:

$$\begin{array}{ccc} \overset{(\frac{3}{2},1)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(1,\frac{3}{2})}{\bullet} \\ \frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \overset{(2,\frac{3}{2})}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(\frac{3}{2},2)}{\bullet} \\ \frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{ccc} \overset{(\frac{59}{2},29)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(29,\frac{59}{2})}{\bullet} \\ \frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Следующим спиновым мультиплетом является *спиновый триплет*, конструируемый в рамках пространства $\mathbf{H}_3^S \otimes \mathbf{H}_\infty$. Здесь имеем три спиновых состояния: два состояния 1 и -1 принадлежат линии спина 1 и дуальной линии спина 1, а третье спиновое состояние 0 принадлежит линии спина 0. Согласно рис. 1, первый спиновый триплет (*фундаментальный триплет*) задаётся следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccc} \overset{(1,0)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(0,1)}{\bullet} \\ 1 & \text{———} & 0 & \text{———} & -1 \end{array} \qquad (20)$$

Очевидно, что имеется бесконечно много спиновых триплетов. Спиновый триплет, следующий после (20), определяется схемой

$$\begin{array}{ccccc} \overset{(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(1,1)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}{\bullet} \\ 1 & \text{———} & 0 & \text{———} & -1 \end{array}$$

и т. д.

Подобным образом строятся спиновые квадруплеты и другие спиновые мультиплеты. Например, первый шестимерный мультиплет (6-плет), определяемый в $\mathbf{H}_6^S \otimes \mathbf{H}_\infty$, задаётся схемой

$$\begin{array}{ccccccccccc} \overset{(\frac{5}{2},0)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(2,\frac{1}{2})}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(\frac{3}{2},1)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(1,\frac{3}{2})}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(\frac{1}{2},2)}{\bullet} & \text{-----} & \overset{(0,\frac{5}{2})}{\bullet} \\ \frac{5}{2} & \text{———} & \frac{3}{2} & \text{———} & \frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{1}{2} & \text{———} & -\frac{3}{2} & \text{———} & -\frac{5}{2} \end{array}$$

Продолжая это построение, приходим к следующему обобщению абстрактного гильбертова пространства:

$$\mathbf{H}^S_{2s+1}\otimes\mathbf{H}_\infty, \tag{21}$$

где $s=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots$ и $s=|l-\dot{l}|$. Следует отметить, что также имеется бесконечное множество *спиновых синглетов* в $\mathbf{H}^S_{2s+1}\otimes\mathbf{H}_\infty$. Все эти синглеты принадлежат линии спина 0 и определяются представлениями $(0,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1,1)$, …, (s,s), …. Синглет, определяемый представлением $(0,0)$, называется *фундаментальным синглетом*.

Далее, при нечётном s имеем *фермионные мультиплеты* в $\mathbf{H}^S_{2s+1}\otimes\mathbf{H}_\infty$ и, соответственно, *бозонные мультиплеты* при s чётном. Все пространства $\mathbf{H}^S_{2s+1}\otimes\mathbf{H}_\infty$ являются несепарабельными гильбертовыми пространствами.

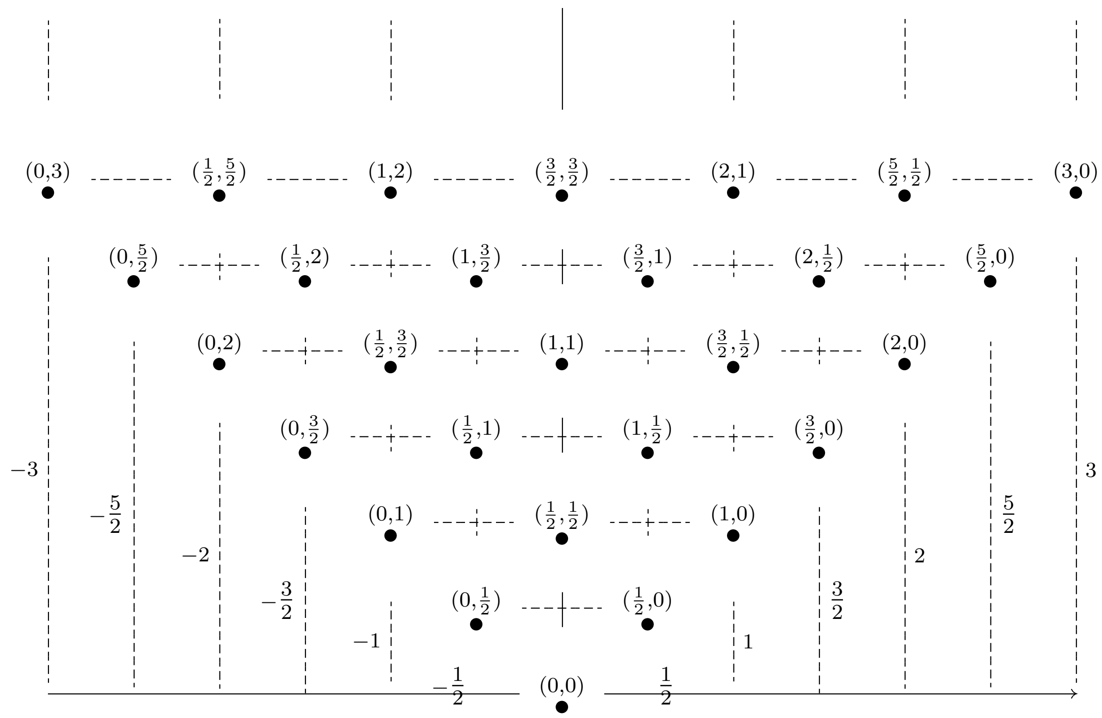

Рис. 1: Собственные подпространства $\mathsf{H}_E\simeq\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ оператора энергии H. Значение массы для каждого уровня H_E даётся формулой (15).

4.2. Первое определение элементарной частицы

Дадим первое определение элементарной частицы[11]. ***Частицей является суперпозиция векторов состояния в несепарабельном гильбертовом про-***

[11]Следует отметить, что словосочетание *элементарная частица* является рудиментом редукционистского мировоззрения. Гейзенберг в статье «Что такое элементарная частица?» пишет: «Нам неминуемо приходится пользоваться языком, коренящимся в традиционной философии. Мы спрашиваем: из чего состоит протон? Можно ли разделить электрон, или он неделим?

странстве $\mathsf{H}^S_{2s+1} \otimes \mathsf{H}_\infty$. Суперпозиция векторов состояния задаёт квантовую систему U элементарной частицы. Это определение учитывает спин и массу частицы. Сама частица есть несепарабельное состояние в пространстве $\mathsf{H}^S_{2s+1} \otimes \mathsf{H}_\infty$. Из этого определения следует, что частица, согласно концепции Гейзенберга-Фока, есть объект модуса потенциального. Переход с этого уровня на модус актуального осуществляется посредством редукции суперпозиции[12]. При редукции суперпозиции актуализируется одно из возможных состояний квантовой системы U, которое описывается в рамках собственного подпространства $\mathsf{H}_E \simeq \mathrm{Sym}_{(k,r)}$ оператора энергии H. В свою очередь на подпространстве $\mathsf{H}_E \simeq \mathrm{Sym}_{(k,r)}$ действует представление $\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$ с ассоциированной спинорной структурой, задаваемой произведениями (8) и (9). Таким образом, при редукции суперпозиции имеем $U \to \boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$ и $\mathsf{H}^S_{2s+1} \otimes \mathsf{H}_\infty \to \mathsf{H}_E \simeq \mathrm{Sym}_{(k,r)}$.

В качестве примера рассмотрим простейший случай, соответствующий фундаментальному дублету (19), т. е. электрону[13]. Итак, электрон является су-

---

Прост или составен квант света? И так далее. Но все эти вопросы поставлены неправильно, потому что слова «делить» и «состоит из» в значительной мере утратили свой смысл» [9, с. 172].

[12]Как известно, постулат Дирака-фон Неймана о редукции квантовой суперпозиции (так называемый *коллапс волновой функции*) явился объектом многочисленных споров. Утверждалось, что этот постулат противоречит логике квантовой механики и нарушает линейность квантово-механической эволюции. Предпринимались попытки исключить постулат редукции из квантовой механики, например, посредством введения многомировой интерпретации Эверетта, что есть по сути не более чем расщепление картины Шрёдингера (модуса актуального) на множество картин Шрёдингера (эвереттовских миров). В свою очередь против «квантово-механической эволюции», якобы описываемой уравнением Шрёдингера, Дирак [2] выдвинул веские доказательства, заключающиеся в том, что изменяющийся во времени вектор состояния будет выбит из сепарабельного гильбертова пространства за кратчайшее время, т. е. по сути ни о какой эволюции речи быть не может, и решения уравнения Шрёдингера не существует. С другой стороны, предпринимались попытки пространственно-временного описания редукции квантовой суперпозиции, т. е. рассматривалась возможность представить редукцию как процесс, протекающий в пространстве-времени, что, как показало время, не увенчалось успехом. Отсюда с необходимостью следует вывод: природа *коллапса функции вероятности* находится за пределами пространства и времени, т. е. принадлежит модусу потенциального.

[13]Следует отметить интересную аналогию между электроном и кубитом. Как известно, *кубит* есть несепарабельное состояние, заданное суперпозицией $|\psi\rangle = a\,|\mathbf{0}\rangle + b\,|\mathbf{1}\rangle$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Кубит есть минимально возможный (элементарный) вектор состояния. Любой вектор состояния может быть представлен множеством таких элементарных векторов, по этой причине кубит является исходным «строительным кирпичом» для всех остальных векторов состояния любой размерности. Квантовое состояние N кубитов может быть описано вектором гильбертова пространства размерности 2^N. Очевидно, что это пространство совпадает со спинпространством $\mathbb{S}_{2^N}$. Выберем в качестве ортонормированного базиса для этого пространства состояния, в которых каждый кубит имеет определённое значение $|\mathbf{0}\rangle$ или $|\mathbf{1}\rangle$. Тогда векторы базиса могут быть представлены двоичными строками вида $|\mathbf{01110010} \cdots \mathbf{1001}\rangle$. Общий нормированный вектор может быть выражен в этом базисе как $\sum_{x=0}^{2^N-1} a_x\,|x\rangle$, где a_x — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\sum_x |a_x|^2 = 1$. Уже здесь видна глубокая аналогия между кубитами и 2-компонентными спинорами. Подобно кубитам 2-компонентные спиноры являются «строительными кирпичами» фундаментальной спинорной структуры (посредством тензорных произведений алгебр $\mathbb{C}_2$ и $\overset{*}{\mathbb{C}}_2$, см. (8) и (9)). Более того, векторы гильбертова пространства $\mathsf{H}^S_{2s+1} \otimes \mathsf{H}_\infty$, представляющие актуализированные состояния частиц («двоичные строки»), строятся таким же образом.

перпозицией векторов состояния в несепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_2^S \otimes \mathbf{H}_\infty$. В случае электрона имеем два спиновых состояния: состояние 1/2, описываемое представлением $\boldsymbol{\tau}_{1/2,0}$ на линии спина 1/2, и состояние −1/2, описываемое представлением $\boldsymbol{\tau}_{0,1/2}$ на дуальной линии спина 1/2. Представления $\boldsymbol{\tau}_{1/2,0}$ и $\boldsymbol{\tau}_{0,1/2}$ действуют в пространствах $\mathrm{Sym}_{(1,0)}$ и $\mathrm{Sym}_{(0,1)}$, соответственно. Следовательно, имеются два вектора состояния: кет-вектор $|\Psi\rangle = \left|\boldsymbol{\tau}_{1/2,0}, \mathrm{Sym}_{(1,0)}, \mathbb{C}_2, \mathbb{S}_2, \right\rangle$ и бра-вектор $\langle\dot{\mathbb{S}}_2, \overset{*}{\mathbb{C}}_2, \mathrm{Sym}_{(0,1)}, \boldsymbol{\tau}_{0,1/2}| = \langle\dot{\Psi}|$. Спинорная структура задаётся прямой суммой $\mathbb{C}_2 \oplus \overset{*}{\mathbb{C}}_2$. Уравнения движения имеют вид (частный случай системы (14) для спиновой цепочки $\boldsymbol{\tau}_{1/2,0}$, $\boldsymbol{\tau}_{0,1/2}$)

$$\sum_{j=1}^{3} \overset{*}{\Lambda}{}_j^{0,\frac{1}{2}} \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\widetilde{a}_j} + i\sum_{j=1}^{3} \overset{*}{\Lambda}{}_j^{0,\frac{1}{2}} \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\widetilde{a}_j^*} + m_e\psi = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \Lambda_j^{\frac{1}{2},0} \frac{\partial\psi}{\partial a_j} - i\sum_{j=1}^{3} \Lambda_j^{\frac{1}{2},0} \frac{\partial\psi}{\partial a_j^*} + m_e\dot{\psi} = 0,$$

где

$$\Lambda_1^{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{2}c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Lambda_2^{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{2}c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Lambda_3^{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{2}c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$\overset{*}{\Lambda}{}_1^{0,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\dot{c}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \overset{*}{\Lambda}{}_2^{0,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\dot{c}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \overset{*}{\Lambda}{}_3^{0,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\dot{c}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что эти матрицы совпадают с матрицами Паули σ_i при $c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 2$.

При редукции имеем $U \to \boldsymbol{\tau}_{1/2,0}$ (или $U \to \boldsymbol{\tau}_{0,1/2}$) и $\mathbf{H}_2^S \otimes \mathbf{H}_\infty \to \mathsf{H}_E \simeq \mathrm{Sym}_{(1,0)}$ (или $\mathbf{H}_2^S \otimes \mathbf{H}_\infty \to \mathsf{H}_E \simeq \mathrm{Sym}_{(0,1)}$). Собственное подпространство H_E оператора энергии H представляет собой массовый уровень со значением массы, определяемой формулой (15). Пусть $s = l = 1/2$ и пусть $m_e = \mu^0\left(l + \frac{1}{2}\right) = \mu^0$ — масса электрона. Из массовой формулы (15) прямо следует, что масса электрона является минимальной массой покоя μ^0.

5. Гильбертово пространство $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$

Пространство $\mathbf{H}_{2s+1}^S \otimes \mathbf{H}_\infty$ и первое определение элементарной частицы позволяют учитывать только две важнейшие характеристики частицы: спин и массу. Для введения ***заряда*** (третьей важнейшей характеристики) требуется дальнейшее обобщение абстрактного гильбертова пространства.

5.1. Зарядовые мультиплеты

В 1932 г. Гейзенберг [18] предложил рассматривать протон и нейтрон как два различных состояния одной и той же частицы (нуклона). Теория Гейзенберга протонно-нейтронных состояний (*зарядовый дублет*) формально совпадает с теорией электронного спина, предложенной Паули. Главным объектом теории Гейзенберга является абстрактное гильбертово пространство следующего типа:

$$\mathsf{H}_2^Q \otimes \mathsf{H}_\infty,$$

где H_2^Q — *зарядовое пространство*, ассоциированное с фундаментальным представлением группы $\mathrm{SU}(2)$.

В 1938 г. Кеммер [19] расширил теорию Гейзенберга для случая частицы с тремя различными зарядовыми состояниями 1, 0, -1. Согласно Кеммеру, *зарядовый триплет* строится в рамках абстрактного гильбертова пространства

$$\mathsf{H}_3^Q \otimes \mathsf{H}_\infty,$$

где H_3^Q — *зарядовое пространство*, ассоциированное с представлением $\boldsymbol{\tau}_1$ группы $\mathrm{SU}(2)$.

5.2. Введение заряда. Псевдоавтоморфизм спинорной структуры

В существующей ныне форме квантовой теории заряженным частицам отвечают комплексные поля [20]. Также как и спин, заряд является внутренним понятием, принадлежащим уровню спинорной структуры (спинтензорного субстрата). Прообразом зарядового сопряжения C на этом уровне является псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ спинорной структуры [21, 22, 25, 26]. Тензорный субстрат (8) соответствует *комплексной спинорной структуре*. В согласии с [21, теорема 1] алгебры Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ соответствуют ***заряженным частицам***, таким как электрон, протон и т. д. Переходя к *вещественной спинорной структуре*, которая, очевидно, является подструктурой субстрата (8), мы видим, что преобразование C (псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$) для алгебр $C\!\ell_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ (типы $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$) редуцируется к ***обмену частица-античастица*** C' (см. [21, 22]). Как известно, нейтральные частицы описываются в рамках вещественных представлений группы Лоренца. Существуют два класса нейтральных частиц: 1) частицы, имеющие античастицы, такие как нейтроны, нейтрино и т. д.; 2) частицы, совпадающие со своими античастицами (например, фотоны, K^0-мезоны и т. д.). Первый класс описывается алгебрами $C\!\ell_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ с кольцами $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (типы $p-q \equiv 4, 6 \pmod 8$ и $p-q \equiv 5 \pmod 8$), а второй класс (***истинно нейтральные частицы***) описывается алгебрами $C\!\ell_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ с кольцами $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (типы $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$ и $p - q \equiv 1 \pmod 8$) (см. [21–26]).

5.3. Второе определение элементарной частицы

Пространства $\mathsf{H}_{2s+1}^S \otimes \mathsf{H}_\infty$ (спиновые мультиплеты) и $\mathsf{H}^Q \otimes \mathsf{H}_\infty$ (зарядовые мультиплеты), рассмотренные в предыдущих параграфах, естественным образом приводят к следующему обобщению абстрактного гильбертова пространства. Пусть

$$\mathsf{H}^S \otimes \mathsf{H}^Q \otimes \mathsf{H}_\infty \tag{22}$$

— тензорное произведение гильбертова пространства H_∞ и *спин-зарядового пространства* $\mathsf{H}^S\otimes\mathsf{H}^Q$. Векторы состояния пространства (22) описывают актуализированные состояния частиц спина $s=|l-\dot{l}|$ и заряда Q с массой m, определяемой формулой (15). Более того, векторы состояния группируются в спиновые линии: линия спина 0, линия спина 1/2, линия спина 1 и т. д. (бозонные и фермионные линии). Каждый вектор состояния представляет собой неприводимое представление $\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$ группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$ в пространстве $\mathrm{Sym}_{(k,r)}\simeq\mathsf{H}_E$ (собственное подпространство оператора энергии H). Заряд Q принимает три значения -1, 0, $+1$[14], где значения -1, $+1$ соответствуют актуализированным состояниям заряженных частиц, а значение 0 соответствует нейтральным (или истинно нейтральным) состояниям частиц. На уровне спинорной структуры заряженные частицы описываются комплексными представлениями группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, для которых псевдоавтоморфизм $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ нетривиален ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$). Действие псевдоавтоморфизма $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ заменяет комплексные представления (зарядовое состояние -1) на комплексно сопряжённые представления (зарядовое состояние $+1$). Нейтральные частицы (зарядовое состояние 0) описываются вещественными представлениями группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, для которых преобразование $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ также нетривиально ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}\simeq\mathbb{H}$), т. е. мы имеем здесь обмен частица-античастица. В свою очередь истинно нейтральные частицы описываются вещественными представлениями группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, для которых действие псевдоавтоморфизма $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ является тривиальным ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}\simeq\mathbb{R}$). Чтобы отличить этот случай от нейтральных частиц (состояние 0), обозначим это зарядовое состояние через $\overline{0}$. Следовательно, спинорная структура с помощью псевдоавтоморфизма $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ позволяет разделить вещественные представления для нейтральных (зарядовое состояние 0) и истинно нейтральных (зарядовое состояние $\overline{0}$) частиц.

Учёт заряда позволяет дать второе определение элементарной частицы. ***Частицей является суперпозиция векторов состояния в несепарабельном гильбертовом пространстве*** $\mathsf{H}^S\otimes\mathsf{H}^Q\otimes\mathsf{H}_\infty$[15]. Векторы пространства $\mathsf{H}^S\otimes\mathsf{H}^Q\otimes\mathsf{H}_\infty$ имеют вид

$$|\mathsf{A}\rangle=\left|\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}},\,\mathrm{Sym}_{(k,r)},\,\mathcal{C}\!\ell_{p,q},\,\mathbb{S}_{(p+q)/2},\,C^{a,b,c,d,e,f,g},\,\ldots\right\rangle, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\tau}_{l\dot{l}}$ — представление собственной группы Лоренца, $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ — пространство

[14] В случае зарядового квадруплета (например, $\boldsymbol{\Delta}$-квадруплет спина 3/2) имеем четыре значения -1, 0, 1, 2.

[15] Суперпозицию векторов состояния в пространстве $\mathsf{H}^S\otimes\mathsf{H}^Q\otimes\mathsf{H}_\infty$ можно рассматривать как унитарное (бесконечномерное) представление некоторой группы. Например, согласно Вигнеру [27], квантовая система, описываемая неприводимым унитарным представлением группы Пуанкаре, является элементарной частицей (интерпретация Вигнера). Очевидно, что для нашего случая группа Пуанкаре (группа движений пространства-времени), являющаяся фундаментальной симметрией модуса актуального, недостаточна. С другой стороны, группы $\mathrm{SU}(N)$, описывающие приближенные динамические симметрии (так называемые «внутренние» симметрии), также недостаточны в силу их компактности и, как следствие этого, отсутствия бесконечномерных представлений. Наиболее вероятным кандидатом на роль фундаментальной симметрии модуса потенциального является группа Румера-Фета $\mathrm{SU}(2,2)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ [28], имеющая унитарные представления и содержащая в качестве подгруппы группу Лоренца ($\mathrm{SU}(2,2)$ — универсальное накрытие конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$).

представления $\boldsymbol{\tau}_{li}$ степени (12), $C\!\ell_{p,q}$ — алгебра Клиффорда, ассоциированная с $\boldsymbol{\tau}_{li}$, $\mathbb{S}_{(p+q)/2}$ — спинпространство, ассоциированное с алгеброй $C\!\ell_{p,q}$, $C^{a,b,c,d,e,f,g}$ — CPT группа, определяемая в рамках алгебры $C\!\ell_{p,q}$. Очевидно, что главным объектом, определяющим векторы вида (23), является представление $\boldsymbol{\tau}_{li}$. Объекты $C\!\ell_{p,q}$, $\mathbb{S}_{(p+q)/2}$ и $C^{a,b,c,d,e,f,g}$ принадлежат спинорной структуре. Другими словами, представление $\boldsymbol{\tau}_{li}$ соответствует каждому вектору пространства $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$, а множество всех возможных представлений $\boldsymbol{\tau}_{li}$ генерирует $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ с векторами (23).

Литература

1. Чью Дж. Аналитическая теория S-матрицы. М. : Мир, 1968.
2. Дирак П.А.М. Лекции по квантовой теории поля. М. : Мир, 1971.
3. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970.
4. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М. : Физматлит, 1958.
5. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантованные поля. М. : Наука, 1977.
6. Bhabha H.J. Relativistic Wave Equations for the Elementary Particles // Rev. Mod. Phys. 1945. V. 17. P. 200–216.
7. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations // Int. J. Theor. Phys. 2003. V. 42. P. 583–633; arXiv:math-ph/0209036 (2002).
8. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations II: Arbitrary Spin Chains // Int. J. Theor. Phys. 2007. V. 46. P. 741–805; arXiv:math-ph/0503058 (2005).
9. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
10. Севальников А.Ю. Интерпретации квантовой механики: В поисках новой онтологии. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
11. Zurek W.H. Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 715; arXiv:quant-ph/0105127 (2001).
12. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. Новосибирск : Изд-во «Альфа Виста», 2004.
13. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. М. : МГУ, 1998.
14. Фок В.А. Об интерпретации квантовой механики. М., 1957.
15. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М. : Наука, 1964.
16. Варламов В.В. Групповое усреднение для свободных полей в терминах гиперсферических функций над группой де Ситтера // ТМФ. 2010. Т. 164:3. С. 473–480.
17. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons // Z. Phys. 1927. V. 43. P. 601–623.
18. Heisenberg W. Über den Bau der Atomkerne // Z. Phys. 1932. V. 77. P. 1–11.
19. Kemmer N. The charge-dependence of nuclear forces // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1938. V. 34. P. 354–364.
20. Wick G.G., Wigner E.P., Wightman A.S. Intrinsic Parity of Elementary Particles // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 101.
21. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 7. С. 114–127.

22. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168; arXiv:math-ph/0405040 (2004).
23. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191; arXiv:math-ph/0508050 (2005).
24. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // Int. J. Theor. Phys. 2012. V. 51. P. 1453–1481; arXiv: 1107.4156 [math-ph] (2011).
25. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516; arXiv: 1401.7723 [math-ph](2014).
26. Varlamov V.V. Cyclic structures of Cliffordian supergroups and particle representations of $\mathbf{Spin}_+(1,3)$ // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2014. V. 24. P. 849–874; arXiv: 1207.6162 [math-ph] (2012).
27. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.
28. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.

COMPLEX MOMENTUM AND SPIN-CHARGE HILBERT SPACE

V.V. Varlamov
Dr.Sc.(Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University

Abstract. Mass formula and eigenspaces of energy operator are defined within a complex envelope (complex momentum) of the group algebra of the proper orthochronous Lorentz group. Eigenspaces of the energy operator are identified with the mass levels of the elementary particle spectrum. An elementary particle is understood as a superposition of the state vectors in a spin-charge Hilbert space.

Keywords: complex momentum, Lorentz group, spinor structure, mass spectrum, Hilbert space.