Математические структуры и моделирование
2016. № 1(37). С. 74–79

УДК 004.9:631.4

КОНКУРЕНЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ ЛЕСНОГО ФИТОЦЕНОЗА КАК СИСТЕМА ОТНОШЕНИЙ КУЛАКОВА-ВЛАДИМИРОВА

А.К. Гуц
профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой кибернетики ОмГУ, e-mail: aguts@mail.ru
Л.А. Володченкова
доцент, к.б.н., e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Показано, что многие индексы конкуренции деревьев в лесном фитоценозе можно вывести в рамках теории бинарных комплексных отношений Кулакова-Владимирова.

Ключевые слова: индексы конкуренции деревьев, бинарные комплексные системы отношений Кулакова-Владимирова.

Введение

Продемонстрируем возможности теории систем фундаментальных отношений, созданной физиками Ю.И. Кулаковым и Ю.С .Владимировым [1–3], применительно к описанию конкурентных взаимодействий деревьев лесного сообщества.

1. Индексы конкуренции деревьев

Конкуренция деревьев является важнейшим типом взаимодействий растений в лесных фитоценозах.

Имеется множество различных способов измерения конкуренции деревьев, называемых индексами конкуренции. Приведём некоторые из них.

Индекс конкуренции Вайса [4]

$$\frac{1}{d_i}\sum_j d_j, \tag{1}$$

где d_i и d_j — диаметр центрального i и конкурирующего j дерева.

Сумма углов между центральным деревом и конкурентом [5]

$$\sum_j \alpha_j \quad (j \neq i,\ d_j > d_i), \tag{2}$$

где α_j — угол в горизонтальной плоскости из центра ствола центрального дерева, образованный двумя касательными к проекции кроны конкурента.

Сумма углов между центральным деревом и конкурентом [5]

$$\sum_j \lambda_j \quad (j \neq i,\ h_j > h_i), \tag{3}$$

где λ_j — вертикальный угол между горизонтальными линиями, проведёнными из вершин центрального дерева и его конкурентов, h_i и h_j — высота центрального i и конкурирующего дерева j.

Световой индекс [6]

$$\sum_j \phi_j, \tag{4}$$

где ϕ_j — угол затенения на данный момент времени.

Сумма отношений объемов крон [7]

$$\frac{1}{CV_i}\sum_j CVa_j, \tag{5}$$

где CV_i — объем кроны центрального дерева i, CVa_j — объем кроны конкурента j над точкой пересечения линии угла высоты с осью ствола конкурента (a_j).

Сумма отношений размеров, взвешенных расстоянием [8]

$$\frac{1}{d_i}\sum_j \frac{d_j}{(Dist_{ij}+1)} \quad (j \neq i), \tag{6}$$

где $Dist_{ij}$ — расстояние между центральным деревом i и конкурентом j.

Существуют и другие индексы конкуренция, выражаемые с помощью более сложных формул [9], однако, мы оставим их рассмотрение для другой статьи.

2. Конкурентные взаимодействия деревьев как унарная система вещественных фундаментальных отношений

Лесной фитоценоз состоит из деревьев, членов лесного сообщества. Обозначим совокупность деревьев через $\mathcal{L}$. На данном этапе исследования лесной экосистемы мы не различаем породы деревьев.

Конкурентное взаимодействие — это отношение между деревьями лесного сообщества.

Будем обозначать деревья, элементы множества $\mathcal{L}$, малыми латинскими буквами $i, k, j, ...$. Поставим в соответствие конкурентному взаимодействию отображение $\mu : \mathcal{L}\times\ \mathcal{L} \to \mathbb{R}$. Если $i, k \in \mathcal{L}$, то значения конкурентного взаимодействия между деревом i и деревом k представляется в виде формулы

$$m_{ik} = \mu(i, k).$$

Другими словами, конкурентное взаимодействие между деревьями i и k характеризуется вещественным числом m_{ik}.

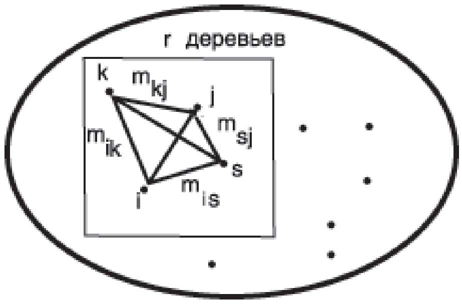

Рис. 1. Унарная система отношений = конкурентное взаимодействие

Будем предполагать, что конкурентное взаимодействие μ является *универсальным* в том смысле, что для данного взаимодействия существует натуральное число r такое, что существует отображение $\Phi : \mathbb{R}^{\frac{1}{2}r(r-1)} \to \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r деревьев $i_1, ..., i_r$ справедливо тождество

$$\Phi \begin{pmatrix} m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & \dots & m_{i_1 i_r} \\ & m_{i_2 i_3} & \dots & m_{i_2 i_r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & m_{i_{r-1} i_r} \end{pmatrix} = 0.$$

Число r называется *рангом* рассматриваемого типа конкурентного взаимодействия.

В данном определении отчётливо видна постулируемая симметрия данного отношения: любое дерево может быть заменено на любое иное. Но при этом деревья берут в количестве r. Естественно допустить, что $r \geqslant 2$, т.е. лесное сообщество должно состоять хотя бы из двух деревьев. Как следует из теории унарных систем отношений в действительности $r \geqslant 3$. Другими словами, лес начинается с трёх деревьев.

В работах Ю.И. Кулакова дана классификация унарных вещественных отношений (взаимодействий) ранга r, $3 \leqslant r \leqslant 5$. Однако полученные при этом формулы для m_{ik} мало похожи на индексы конкуренции.

Тем не менее имеется возможность выйти на эти индексы, используя так называемые бинарные комплексные системы отношений (БКСО) Ю.С. Владимирова, которые представляют перенос идей Ю.И. Кулакова с поля вещественных чисел, $m_{ik} \in \mathbb{R}$, в поле комплексных чисел, т.е. $m_{ik} \in \mathbb{C}$.

3. Вывод формул конкуренции в рамках теории БКСО

Бинарная комплексная система отношений (БКСО) ранга (r, r) сопоставляет двум множествам $\mathcal{F} = \{i, k, l, ...\}$ и $\mathcal{M} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ функции

$$u : \mathcal{F} \times \mathcal{M} \to \mathbb{C},$$

$$u_{i\alpha} = u(i,\alpha),$$

и

$$\Phi : \mathbb{C}^{r^2} \to \mathbb{C},$$

$$\Phi \begin{pmatrix} u_{i_1\alpha_1} & u_{i_1\alpha_2} & \dots & u_{i_1\alpha_r} \\ u_{i_2\alpha_1} & u_{i_2\alpha_3} & \dots & u_{i_2\alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i_r\alpha_1} & u_{i_r\alpha_2} & \dots & u_{i_r\alpha_r} \end{pmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Предполагается фундаментальная симметрия ранга (r,r), по которой в (7) любые r элементов из множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ заменяемы.

Для того чтобы вывести формулы (1)–(6), воспользуемся *бинарной комплексной системой отношений* ранга (3,3), которая сводится [3, с. 58-59] *к унарной вещественной системе отношений* ранга 5. Бинарная комплексная система отношений ранга (3,3) задаётся законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

и отношением

$$u_{i\alpha} = x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2 y_\alpha^2,$$

где $x_i^1, x_i^2, y_\alpha^1, y_\alpha^2$ — комплексные числа. Вводя сшивку множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{F}$ посредством формального сопряжения

$$x_i^1 + i \cdot x_i^2 = \overline{y_\alpha^1 + i \cdot y_\alpha^2},\ x_k^1 + i \cdot x_k^2 = \overline{y_\beta^1 + i \cdot y_\beta^2},$$

получаем унарное вещественное отношение ранга 5

$$m_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i\beta} + u_{k\alpha}) = \frac{1}{2}(x_i^1 y_\beta^1 + x_i^2 y_\beta^2 + x_k^1 y_\alpha^1 + x_k^2 y_\alpha^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + x_k^1 \overline{x_i^1} + x_k^2 \overline{x_i^2}) = \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + \overline{x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2}}).$$

Предположим, что центральное дерево — это элемент i, а остальные деревья — элементы $k, l, ..., p$. Примем, что

$$x_i^1 = \ x_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2M_i}}\ e^{i\phi} \ \text{ и } \ \phi = 0,$$

$$x_k^1 = x_k^2 = \frac{K_{ik}}{\sqrt{2M_i}}\ e^{i\phi_k}, ..., x_p^1 = x_p^2 = \frac{K_{ip}}{\sqrt{2M_i}}\ e^{i\phi_p}.$$

Тогда

$$\sum_{j=k,\dots,p} m_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2M_i}\{K_{ik}[e^{i\phi_k} + e^{-i\phi_k}] + ... + K_{ip}[e^{i\phi_p} + e^{-i\phi_p}]\} = \frac{1}{M_i}\sum_{j=k,...,p} K_{ij}\cos\phi_j.$$

Если считать, что деревья j, которые конкурируют с центральным деревом i, имеют фазу $\phi_j = 0$, то

$$\sum_{j=k,...,p} m_{ij} = \frac{1}{M_i}\sum_{j=k,...,p} K_{ij}. \qquad (8)$$

То есть мы получили общую формулу, под выражение которой подпадают все индексы конкуренции (1)–(5) с $K_{ij} = K_j$; $K_j = d_j, \alpha_j, \lambda_j, \phi_i, CVa_j$ соответственно и соответственно $M_i = d_i, 1, 1, 1, CV_i$.

Если же взять $M_i = d_i, K_{ij} = d_j/(Dist_{ij} + 1)$, то получим индекс (6).

4. Заключение

В ходе вывода формулы (8) мы делали упрощающие предположения, которые показывают, что формулы, используемые в теории лесных сообществ, являются частными случаями более сложного соотношения.

Вводя, к примеру, различные значения для фаз ϕ_j, можно более полно учитывать разнообразие в конкурентных взаимодействиях деревьев.

Теория, созданная Ю.И. Кулаковым для единого описания законов физики и различных геометрий, оказалась способной описывать социальные и экономические системы [10, 11]. Поэтому не удивительно, что она проявила себя и при описании лесных экосистем. Структуры Кулакова говорят не о том, каким образом осуществляется взаимодействие, через что идёт взаимодействие и какая материя в этом задействована, а по *какому образцу, паттерну из некоторого фиксированного множества допустимых образцов это осуществляется*.

Литература

1. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск : НГУ, 1968.
2. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М. : Архимед, 1992.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М. : МГУ, 1996.
4. Вайс А.А. Классификация деревьев и горизонтальная структура ценозов // Научный журнал КубГАУ. 2007. № 31(7). С. 1–13.
5. Pukkala T., Kolstrom T. Competition indices and the prediction of radial growth in Scots pine // Silva Fennica. 1987. V. 21. № 1. P. 55–67.
6. Кузьмичев В.В., Миндеева Т.Н., Черкашин В.П. Оценка взаимодействия деревьев в лесных фитоценозах // Известия Сибирского отделения АН СССР, серия биологических наук. 1989. № 3. С. 133–139.
7. Biging G.S., Dobbertin M. A comparison of distance-dependent competition measures for height and basal area growth of individual conifer trees // Forest Science. 1992. V. 38. P. 695–720.

8. Hegyi F. A simulation model for managing jack pine stands // Growth models for tree and stand simulation (J. Fries, ed.). Royal College of Forestry, Stockholm, Sweden. 1974. Res. Note № 30. P. 74–90.
9. Касаткин А.С. Семышев М.М. Индексы конкуренции в лесных насаждениях // Актуальные проблемы лесного комплекса. 2008. № 21. С. 88–90.
10. Гуц А.К., Лаптев А.А. и др. Математические модели социальных систем: учебное пособие. Омск : ОмГУ, 2000. 256 с.
11. Гуц А.К., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математическе методы в социологии. М. : УРСС, 2014. 214 с.

TREES COMPETITION OF FOREST PHYTOCENOSIS AS THE KULAKOV-VLADIMIROV'S SYSTEM OF RELATIONS

A.K. Guts
Dr.Sc.(Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru
L.A. Volodchenkova
Ph.D.(Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

Abstract. It has been shown that many indexes of trees competition in forest phytocenosis can be derived from the Kulakov-Vladimirov's theory of systems of relations.

Keywords: indexes of trees competition, Kulakov-Vladimirov's theory of systems of relations.