Математические структуры и моделирование
2016. №1(37). С. 30–35

УДК 577

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХИЩНИК – ЖЕРТВА

М.И. Лебедева
студент, e-mail: m.mandrygina@gmail.com
А.В. Норин
доцент, к.ф.-м.н., e-mail: norina@land.ru

Естественнонаучный факультет, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики.

Аннотация. Пожалуй, самой важной проблемой в экологии при построении математических моделей является проблема устойчивости [5]. Чтобы популяция существовала, необходимо, чтобы модель, описывающая её, была устойчива в каком-то смысле. В работе [2] предлагается следующая зависимость трофической функции хищника при его насыщении и в отсутствии конкуренции за жертву: $\dfrac{cxy}{(1+dx)}$. Если её представить в виде: $\dfrac{cxy}{(1+dx)} = -\dfrac{cy}{d(1+dx)} + \dfrac{cy}{d}$, то оказывается, что модель хищник – жертва с запаздыванием по времени, при линейной рождаемости хищника и жертвы устойчива по Ляпунову. В работе показано аналитически и подтверждено численным счётом, что система уравнений с запаздыванием имеет особенность типа центра, что приводит к периодическим колебаниям численности особей в модели хищник – жертва.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени, неклассическая модель хищник – жертва, устойчивость решения системы дифференциальных уравнений.

Введение

Мы отклонимся от классической модели хищник – жертва Лотка-Вольтерра, предложенной в [3, 6], в которой, очевидно, двигались не от биологии, а от математики, пытаясь решить проблему устойчивости. После этого появился целый «поток» моделей хищник – жертва, которые будем называть неклассическими моделями. Представление о них можно получить в работах [1, 2, 4].

С биологической точки зрения модель Лотка-Вольтерра имеет недостатки, которые «правильней рассматривать как возможности совершенствования и развития» [2].

1. Неклассическая модель хищник – жертва. Постановка задачи

Предположим, что два вида – хищники и жертвы – живут вместе, и особи одного вида питаются особями другого вида. Это единственная пища для хищников, и в отсутствии жертв хищники вымирают.

Пусть t — время жизни популяций. $x(t)$, $y(t)$ — функции, описывающие плотности особей (жертв и хищников, соответственно) в момент времени t .

Определение 1. Трофической функцией хищника называется зависимость скорости выедания жертвы от плотности популяции жертвы при фиксированной плотности популяции хищника.

В качестве трофической функции хищника выберем функцию: $\dfrac{cxy}{(1+dx)}$, которая отвечает за насыщение хищника. Разложим трофическую функцию на слагаемые: $\dfrac{cxy}{(1+dx)} = -\dfrac{cy}{d(1+dx)} + \dfrac{cy}{d}$.

Тогда функция $\dfrac{cy}{d}$ будет отвечать за естественную рождаемость хищников, а функция $-\dfrac{cy}{d(1+dx)}$ будет описывать неестественную смертность хищников, обусловленную взаимодействием хищник – жертва.

Предположим также, что кроме естественной смертности жертв, линейно зависящей от плотностей $x(t)$, с коэффициентом k_1 есть «неестественная» смертность, обусловленная взаимодействием хищник – жертва. Кроме того, будем пренебрегать возрастными, половыми и генетическими различиями как у хищников, так и у жертв, и будем считать, что количество особей, рождённых в данный момент времени, зависит от количества особей в предыдущий момент времени $(t - \triangle t_1)$ и $(t - \triangle t_2)$, где $\triangle t_1$ и $\triangle t_2$ – периоды беременности самок жертв и хищников соответственно.

Тогда математическая модель явления представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздываниями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1 x(t) - bx(t)y(t) + a_1 x(t - \triangle t_1) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -k_2 y(t) - \dfrac{cy(t)}{d(1+dx(t))} + \dfrac{cy(t-\triangle t_2)}{d}. \end{cases}$$

Будем считать, что $\triangle t_1$, $\triangle t_2$ малы по сравнению с текущим временем t.

2. Устойчивость модели

Рассмотрим систему без запаздываний и проанализируем её на устойчивость:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1 x - bxy + a_1 x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2 y - \dfrac{cy}{d(1+dx)} + \dfrac{cy}{d}. \end{cases}$$

При $x \to +\infty$ второй член во втором уравнении стремится к нулю, и всё сводится к насыщению и линейной рождаемости хищника. При этом $\dfrac{c}{d} > k_2$, т.е. при обилии пищи хищник линейно размножается.

Найдём точки x_0, y_0, при которых $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$ равны нулю: $x_0 = \dfrac{k_2}{c - dk_2}$, $y_0 = \dfrac{a_1 - k_1}{b}$. При положительном естественном приросте x_0, y_0 больше нуля. Будем рассматривать только положительные значения x_0, y_0.

Линеаризуем систему по $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1(\tilde{x} + x_0) - b(\tilde{x} + x_0)(\tilde{y} + y_0) + a_1(\tilde{x} + x_0) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2(\tilde{y} + y_0) - \dfrac{c(\tilde{y} + y_0)}{d(1 + d(\tilde{x} + x_0))} + \dfrac{c(\tilde{y} + y_0)}{d}, \end{cases}$$

после чего получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{x}(-k_1 + a_1 - by_0) - bx_0\tilde{y} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \tilde{x}\dfrac{cy_0}{(1+dx_0)^2} + \tilde{y}(\dfrac{c}{d} - k_2 - \dfrac{c}{d(1+dx_0)}). \end{cases}$$

Собственными значениями системы являются $\pm i\sqrt{\dfrac{bcx_0y_0}{(1+dx_0)^2}}$. Поэтому особая точка системы — центр. На рисунках 1, 2, 3 изображены фазовые портреты системы при разных значениях коэффициентов.

Вернёмся к системе с запаздываниями и проанализируем её устойчивость:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1 x(t) - bx(t)y(t) + a_1 x(t - \triangle t_1) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2 y(t) - \dfrac{cy(t)}{d(1+dx(t))} + \dfrac{cy(t - \triangle t_2)}{d}. \end{cases}$$

Разложим $x(t - \triangle t_1)$ и $y(t - \triangle t_2)$ в ряд Тейлора с сохранением только линейных членов по $\triangle t_1$ и $\triangle t_2$. Подставим получившиеся ряды обратно в систему.

Получим следующую систему:

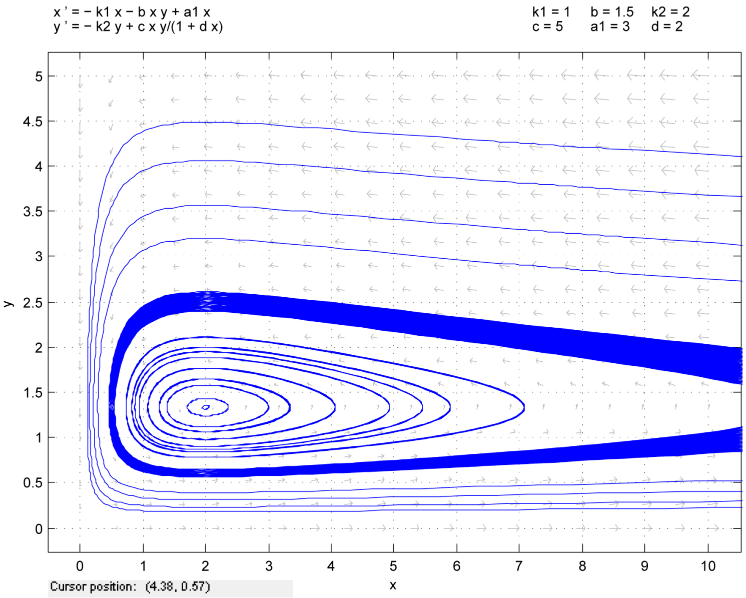

Рис. 1. Фазовый портрет системы

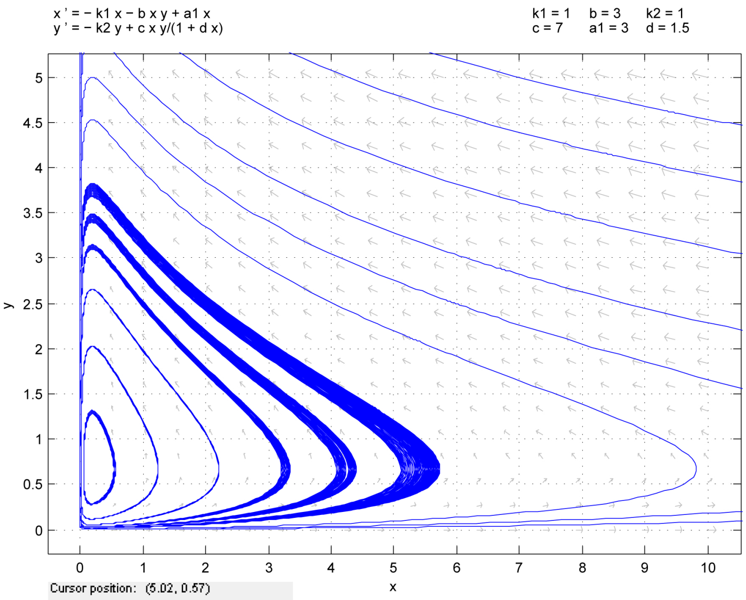

Рис. 2. Фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(1 + a_1 \triangle t_1) = -k_1 x(t) - bx(t)y(t) + a_1 x(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt}(1 + \dfrac{c}{d} \triangle t_2) = -k_2 y(t) - \dfrac{cy(t)}{d(1 + dx(t))} + \dfrac{cy(t)}{d}. \end{cases}$$

Из системы видно, что модель с запаздываниями (с сохранением только

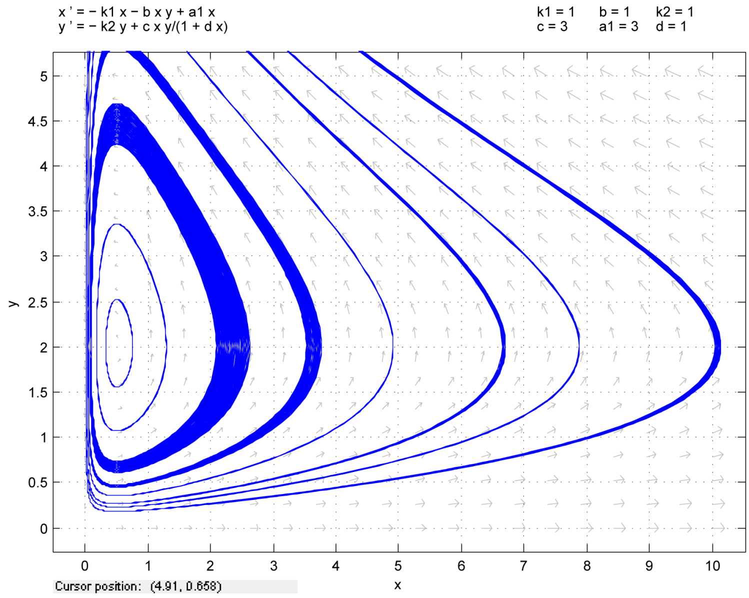

Рис. 3. Фазовый портрет системы

линейных членов по $\triangle t_1$ и $\triangle t_2$) отличается от модели без запаздываний умножением левых частей системы на положительную константу. Тогда модель с запаздываниями будет иметь точно такой же тип устойчивости, как и модель без запаздываний.

3. Заключение

В работе была рассмотрена система дифференциальных уравнений с запаздыванием, описывающих вид взаимодействия хищник – жертва с учётом насыщения хищника. Показано, что модель является устойчивой.

4. Acknowledgments

This work was partially financially supported by the Government of the Russian Federation (grant 074-U01), by Ministry of Education and Science of the Russian Federation (GOSZADANIE 2014/190, Project14.Z50.31.0031 and ZADANIE No. 1.754.2014/K), by grant of Russian Foundation for Basic Researches and grant of the President of Russia (MK-2736.2015.2).

Литература

1. Апонин Ю.М., Апонина Е.А. Математическая модель сообщества хищник – жертва с нижним порогом численности жертвы // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т. 1, № 1. С. 51–56.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М. : Наука, 1985. 181 с.

3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М. : Наука, 1976. 286 с.
4. Гайко В.А. Глобальный бифуркационный анализ квартичной модели «хищник – жертва» // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 2. С. 125–134.
5. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М. : Наука. 1978.
6. Lotka A.J. Elements of physical biology. Baltimor, 1925. 460 c.

NONCLASSICAL PREDATOR-PREY MODEL

M.I. Lebedeva
Student, e-mail: m.mandrygina@gmail.com
A.V. Norin
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: norina@land.ru

ITMO University, Department of Natural Science

Abstract. Probably, the most important ecological problem in the mathematic modeling is stability one [5]. It is necessary for population existence that the model, which describes it, should be stable in a one sense. We can see [2] the following dependence of predator's trophic function attached to his satiation and the absence of competition for a prey in the work: $\frac{cxy}{(1+dx)}$. If we represent it as: $\frac{cxy}{(1+dx)} = -\frac{cy}{d(1+dx)} + \frac{cy}{d}$, it could be given that the predator-prey model with lagging attached to linear birth rate of predator and prey is stable in the Lyapunov sense. The set of equations with lagging has peculiarity as a center that leads to periodic oscillations of quantity of individuals in the predator-prey model as it is analytically shown and confirmed by numeral counting.

Keywords: system of delay differential equations, non-classical predator-prey model, stability of solution of system of differential equations.