Математические структуры и моделирование
2016. № 2(38). С. 5–15

УДК 519.214

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Факультет компьютерных наук, Омский государственный университет

Аннотация. Получена асимптотика хвостов распределения определённого класса функций от независимых случайных величин. Показано, как с помощью этой асимптотики можно характеризовать предельные распределения таких функций.

Ключевые слова: предельные теоремы, функции от случайных величин, хвосты распределения, правильно меняющиеся функции.

В работе [1] введён некоторый класс бинарных операций, названных обобщёнными суммами, доказаны предельные теоремы для обобщённых сумм независимых случайных величин, описан класс предельных распределений, и получены минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для обобщённых сумм.

В настоящей работе показывается, как разработанную в [1] технику модифицировать для более общей ситуации — для функций от случайных величин, не являющихся, вообще говоря, результатом последовательного применения бинарных операций.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена вещественнозначная функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ (то есть определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем предполагать, что f удовлетворяет следующим условиям:

A_1. Симметричность: $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

A_2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

A_3. Для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant g(x_{k+1}, , ..., x_n)$, где функция g удовлетворяет условиям $A_1 - A_3$. (Согласно сказанному выше $f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$.) Для условия A_3 будем также использовать обозначение $A_3(g)$, если условие A_3 выполняется с $g = f$, то, естественно, оно будет обозначаться $A_3(f)$.

Приведём некоторые примеры функций, удовлетворяющих условиям $A_1 - A_3$

Пример 1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Пример 2. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Пример 3. Пусть функция $f \geqslant 0$ удовлетворяет условиям

$$f(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \tag{1}$$

причём можно потребовать, чтобы (1) выполнялось только с $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, 0..., 0)$, $\mathbf{y} = (0, ..., 0, x_{k+1}, ..., x_n)$ при любом $k < n$. В этом случае из (1) следует

$$-f(x_{k+1}, x_2, ..., x_n) \leqslant f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k) \leqslant f(x_{k+1}, x_2, ..., x_n),$$

то есть выполнено условие $A_3(f)$. В (1) соотношение $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ можно заменить на $f(x_1, x_2, ..., x_k) \geqslant f(x_1, x_2, ..., x_l)$, $k \geqslant l$. В этом случае

$$0 \leqslant f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k) \leqslant f(x_{k+1}, x_2, ..., x_n)$$

и снова выполняется $A_3(f)$.

Пример 3а.

Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 0$ — возрастающая полуаддитивная функция на $\mathbb{R}_+$ (т. е. $\varphi(u + v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$), а $h(\mathbf{x}) \geqslant 0$ удовлетворяет условию (1). Тогда $f(\mathbf{x}) = \varphi(h(\mathbf{x}))$ также удовлетворяет условию (1) и, следовательно, условию $A_3(f)$. Поэтому, например, функции

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(x_1 + ... + x_n), \quad f(\mathbf{x}) = \varphi(\max(x_1, ..., x_n), \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_+$$

и т. п. удовлетворяют условиям $A_1 - A_3$.

A_4. Будем говорить, что выполнено условие A_4, если при любом $\lambda > 0$

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}),$$

а если для функции f выполнены условия $A_1, A_2, A_3(f)$ и A_4, то будем говорить, что выполнены условия $\mathbf{A}$.

Замечание 1. Если f удовлетворяет условию A_4, и $x_i \neq 0$, $i = 1, ..., n$, то

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = |x_n| f\left(\frac{x_1}{|x_n|}, \frac{x_2}{|x_n|}, ..., \frac{x_n}{|x_n|}\right) \leqslant |x_n| g\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) + f(x_1, ..., x_{n-1}) \leqslant ...$$

$$\leqslant C|x_n| + f(x_1, ..., x_{n-1}) \leqslant C(|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|), \quad C = \max\{g(1), g(-1)\}. \tag{2}$$

С другой стороны, пусть $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, $x_i^* = x_i / \max(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., n$. Тогда $0 \leqslant x_i^* \leqslant 1$ и существует $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ такое, что $x_{i_0}^* = 1$, поэтому если, скажем, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не убывает по каждому аргументу (в приводимых здесь примерах это так), то

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max(x_1, ..., x_n) f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geqslant f(1) \max(x_1, ..., x_n).$$

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *симметрической калибровочной функцией* (см., например, [2, с.107]), если

(i) $f(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \neq 0$;

(ii) $f(\gamma\mathbf{x}) = |\gamma| f(\mathbf{x}),\ \gamma \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$;

(iiii) $f(x_1, ..., x_n) = f(\varepsilon_1 x_{i_1}, ..., \varepsilon_n x_{i_n})$ где $\varepsilon_i = \pm 1$, а $(i_1, ..., i_n)$ — перестановка множества $(1, ..., n)$.

Нетрудно видеть, что из (iii) и (iiii) следует (1), так что симметрическая калибровочная функция удовлетворяет условиям A_1 $A_3(f)$ и A_4.

Примеры симметрических калибровочных функций, удовлетворяющих условию A_2 (а, следовательно, условиям $\mathbf{A}$) на $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Пример 3б.

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$.

Пример 3в.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p},\ p \geqslant 1.$$

Пример 3г.

$$T_k(\mathbf{x}) = \max_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} (|x_{i_1}| + ... + |x_{i_k}|)\,.$$

Нетрудно видеть, что

$$\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} = T_1(\mathbf{x}) \leqslant T_2(\mathbf{x}) \leqslant ... \leqslant T_n(\mathbf{x}) = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|,$$

так что функции $T_1, ..., T_n$ образуют некоторый «спектр промежуточных функций» между «крайностями» $\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ и $|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ (см. замечание 1).

Пример 3д. Полной симметрической функцией называется

$$C_k(\mathbf{x}) = C_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\substack{k_1 + ... + k_n = k \\ k_i \geqslant 0.}} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n},\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, ..., n.$$

Имеет место следующее неравенство:

$$[C_k(\mathbf{x}+\mathbf{y})]^{1/k} \leqslant [C_k(\mathbf{x})]^{1/k} + [C_k(\mathbf{y})]^{1/k}$$

(см., например, [2, с. 91]), так что функция

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C_k^{1/k}(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$$

является симметрической калибровочной и удовлетворяет условиям $\mathbf{A}$.

Пример 4. Если $\sup\limits_{x_1,...,x_n \in \mathbb{D}} \left| \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_n) \right| \leqslant C < \infty,\ i = 1, ..., n$, то для f выполнено условие $A_3(g)$ с $g(x_1, ..., x_n) = C(|x_1| + ... + |x_n|)$.

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых величин. Будем обозначать

$$X_{k,m}(b) = f\left(\frac{\xi_k}{b}, ..., \frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_n(b) = X_{1,n}(b),$$

$$X_n = X_n(1), \quad \overline{X}_n(b) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k(b)|, \quad Y_{k,m}(b) = g\left(\frac{\xi_k}{b}, ..., \frac{\xi_m}{b}\right),$$

$$Y_n(b) = Y_{1,n}(b), \ \overline{Y}_n(b) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k(b), \ k, m, n \in \mathbb{N}, \ b > 0,$$

$$\delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{Y_k(c_n) \geqslant \varepsilon\}, \ c_n > 0.$$

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $x > 0$ и $m \leqslant n$, а функция f удовлетворяет условиям A_1, A_2 и A_3. Если последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\delta_n < 1$, то*

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geqslant x + \varepsilon\} \leqslant (1 - \delta_n)^{-1} \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geqslant x\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < x+\varepsilon \leqslant |X_k(c_n)|\}$, $k = 1, ..., m$, $\varepsilon > 0$. Тогда $E_i E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{m-1} E_k = \{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geqslant x + \varepsilon\}$, а в силу свойства A_3

$$\{|X_k(c_n)| \geqslant x + \varepsilon, \ Y_{k+1,m}(c_n) < \varepsilon\} \subseteq \{|X_m(c_n)| \geqslant x\},$$

то есть

$$\{|X_m(c_n)| < x\} \subseteq \{|X_k(c_n)| < x + \varepsilon\} \cup \{Y_{k+1,m}(c_n) \geqslant \varepsilon\},$$

откуда

$$\{|X_m(c_n)| < x, \ E_k\} \subseteq \{Y_{k+1,m}(c_n) \geqslant \varepsilon, \ E_k\}, \ k = 1, ..., m - 1. \tag{3}$$

С помощью (3) получаем:

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geqslant x + \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geqslant x\} + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| < x, \ E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geqslant x\} + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{Y_{k+1,m}(c_n) \geqslant \varepsilon, \ E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geqslant x\} + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{Y_k(c_n) \geqslant \varepsilon\} \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geqslant x\} + \delta_n \cdot \mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geqslant x + \varepsilon\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 2. *Если функция f удовлетворяет условиям A_1, A_2, A_3, последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\delta_n < 1$, то при любом $x > 0$ и $0 < \varepsilon < x$*

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geqslant x\} \geqslant n\mathbf{P}\{X_1(c_n) \geqslant (x + 3\varepsilon)\}(1 - 3(1 - \delta_n)^{-1}\delta_n).$$

Доказательство. Пусть $A_n = \left\{ Y_{n-1}(c_n) < 2\varepsilon,\ f\left(\frac{\xi_n}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon \right\}$

$$A_k = \left\{ Y_{k-1}(c_n) < 2\varepsilon,\ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon,\ Y_{k+1,n}(c_n) < \varepsilon \right\},\ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

В силу A_3

$$\left| X_n(c_n) - f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \right| \leqslant Y_{k-1}(c_n) + Y_{k+1,n}(c_n), \tag{4}$$

так что

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geqslant x\} \geqslant \mathbf{P}\left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\overline{A}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{k-1} A_k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{A_k\} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{ A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right\}. \tag{5}$$

При $1 \leqslant k \leqslant n-1$ получаем

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon \right\} -$$

$$-\mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon,\ (\{Y_{k-1}(c_n) \geqslant 2\varepsilon\} \cup \{Y_{k+1,n}(c_n) \geqslant \varepsilon\}) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant (x + 3\varepsilon) \right\} (1 - \mathbf{P}\{Y_{k+1,n}(c_n) \geqslant \varepsilon\} - \mathbf{P}\{Y_{k-1}(c_n) \geqslant 2\varepsilon\}) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant (x + 3\varepsilon) \right\} (1 - 2\delta_n). \tag{6}$$

$\mathbf{P}\{A_n\}$ оценивается аналогично. Далее

$$\left\{ Y_{j-1}(c_n) < 2\varepsilon,\ f\left(\frac{\xi_j}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon \right\} \subseteq \{Y_{j-1}(c_n) < 2\varepsilon,\ X_j(c_n) \geqslant x + \varepsilon\},$$

так что если $\varepsilon < x$, то

$$\mathbf{P}\left\{ A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon,\ \bigcup_{j=1}^{k-1} \left(Y_{j-1}(c_n) < 2\varepsilon, f\left(\frac{\xi_j}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant x + 3\varepsilon \right\} \mathbf{P}\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \geqslant 2\varepsilon\}. \tag{7}$$

и тогда из (5), (6) и (7) и леммы 1 следует

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geqslant x\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{ f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right) \geqslant x + \varepsilon \right\} \left(1 - 3(1-\delta_n)^{-1}\delta_n\right).$$

Лемма доказана. ■

Следующее предложение - это модификация леммы 3.1 из [4].

Лемма 3. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ \varepsilon>0$ и последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\delta_n<1$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon\}\leqslant \delta_n^2(1-\delta_n)^{-1}+n\mathbf{P}\left\{X_1(c_n)\geqslant x\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k=\{\overline{Y}_{k-1}(c_n)<2\varepsilon\leqslant Y_k(c_n)\}, k=1,...,n$. Тогда $E_iE_j=\varnothing,\ i\neq j,\ \bigcup\limits_{k=1}^{n-1}E_k=\{\overline{Y}_{n-1}(c_n)\geqslant 2\varepsilon\}$. В силу (4) при $1\leqslant k\leqslant n-1$

$$\left\{Y_{k+1,n}(c_n)<\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}\subseteq\left\{X_n(c_n)<x+3\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\},$$

откуда

$$\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}\subseteq\{E_k,\ Y_{k+1,n}(c_n)\geqslant\varepsilon\}. \tag{8}$$

Аналогично выводится

$$\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}\subseteq\left\{\overline{Y}_{n-1}(c_n)\geqslant 2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}.$$

Отсюда

$$\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,\ \max_{1\leqslant kn}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}=$$

$$=\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,\ \overline{Y}_{n-1}(c_n)\geqslant 2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}. \tag{9}$$

С помощью (8) и (9) получаем $\mathbf{P}\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon\}\leqslant$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)\geqslant x\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,\overline{Y}_{n-1}(c_n)\geqslant 2\varepsilon,\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)\geqslant x\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}\left\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon,E_k,\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)<x\right\}+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)\geqslant x\right\}. \tag{10}$$

Из соотношения (4) следует

$$Y_{k+1,n}(c_n)\geqslant X_n(c_n)-f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)-Y_{k-1}(c_n),$$

и из (10) выводим

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n)\geqslant x+3\varepsilon\}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}\{Y_{k+1,n}(c_n)\geqslant\varepsilon,E_k\}+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}f\left(\frac{\xi_k}{c_n}\right)\geqslant x\right\}\leqslant$$

$$\leqslant n\mathbf{P}\{X_1(c_n) \geqslant x\} + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{Y_k(c_n) \geqslant \varepsilon\} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{E_k\} =$$

$$= \delta_n \mathbf{P}\{\overline{Y}_{n-1}(c_n) \geqslant 2\varepsilon\} + n\mathbf{P}\{X_1(c_n) \geqslant x\}.$$

Из этого соотношения с помощью Леммы 1 выводим утверждение леммы. ■

Замечание 2. Совершенно аналогично доказываются оценки для $\mathbf{P}\{X_n(c_n) \leqslant -x\},\ x > 0$, поэтому леммы 2 и 3 выполняются после замены в них $X_n(c_n)$ на $|X_n(c_n)|$ и $X_1(c_n)$ на $|X_1(c_n)|$.

Замечание 3. Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение: если последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ такова, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{Y_k(c_n) \geqslant \varepsilon\} \to 0,\ n \to \infty$$

и при любых $x > 0,\ \varepsilon > 0$ выполняется одно из следующих предположений:

$$\delta_n^2 = o\left(\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\}\right), \quad n \to \infty, \tag{11}$$

$$\delta_n^2 = o\left(n\mathbf{P}\{|X_1(c_n)| \geqslant x\}\right), \ n \to \infty, \tag{12}$$

то при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geqslant x\} \sim n\mathbf{P}\{X_1(c_n) \geqslant x\},\ \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} \sim n\mathbf{P}\{|X_1(c_n)| \geqslant x\}. \tag{13}$$

Замечание 4. Если для функции f выполнено условие A_4, то $|X_1(c_n)| = C|\xi_1|/c_n,\ C > 0$ и соотношение (13) означает тогда, что в указанных предположениях хвосты распределений величин $X_n(c_n)$ имеют одинаковую, не зависящую от вида функции f асимптотику.

Замечание 5. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, то $\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geqslant x\} \leqslant n\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant xc_n\}$, что вместе с леммой 2 обеспечивает выполнение (13) без предположений (11) или (12).

Из (2) следует, например, что если $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, то $\mathbf{E}|f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)|^p < \infty$.
Будем обозначать

$$a_n = \sup\left\{x : n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\} \geqslant 1\right\}.$$

Если $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, то $\{a_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho$ [5, стр. 111],

$$n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant xa_n\} \to \frac{1}{x^\rho}, \quad n \to \infty \tag{14}$$

[5, стр. 94] и $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty,\ 0 < p < \rho$ [5, стр. 103].

Пусть при любых $n \in \mathbb{N}$ и $z > 0$ $\mathbf{E}|X_n(z)|^p < \infty$. Положим

$$b_n(p) = \inf\left\{z > 0 : \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k(z)|^p \leqslant 1\right\}.$$

Если имеет место А4 и $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, то $b_n^p(p) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|^p$.

В [1] на примере $X_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ показано, что соотношение

$$\liminf_{n\to\infty} n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant \varepsilon b_n(p)\} > 0, \quad \text{при некотором } \varepsilon > 0 \tag{15}$$

выделяет ситуацию, когда предельное распределение величин $X_n(b_n)$ определяется асимптотикой «хвостов распределения» величины ξ_1, а поскольку ранее мы вывели универсальную (то есть не зависящую от вида функции f) асимптотику этих «хвостов» (следствие 1), мы будем исследовать поведение распределения величин $X_n(b_n)$ при $n \to \infty$, используя предположение (15). Там же [1, Замечание 6] показано, что вместо (15) можно использовать предположение $b_n(p) = O(a_n)$.

Покажем, как соотношения (13) помогают характеризовать предельное распределение величин $X_n(a_n)$. Предположим, что при каждом $x > 0$ существует

$$H(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n(a_n)| \geqslant x\}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяет условиям* $\mathbf{A}$ *на* $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. *$H(x)$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, $\rho > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$ и при любых $0 < p < \rho$ $b_n(p) = O(a_n)$.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, $\rho > 0$ и $b_n(p) = O(a_n)$, $p < \rho$, $n \to \infty$. Пусть $k = k(n) \to \infty$. Если $k(n)$ растёт достаточно медленно, то

$$\max_{1\leqslant m\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_m| \geqslant \varepsilon a_{nk}\} \leqslant \frac{\max\limits_{1\leqslant m\leqslant n} \mathbf{E}|X_m|^p}{\varepsilon^p a_{nk}^p} = O(a_n^p a_{nk}^{-p}) = O\left(k^{-p/\rho}\right). \tag{17}$$

Отсюда

$$\delta_n^2 = \max_{1\leqslant m\leqslant n} \mathbf{P}^2\{|X_m| \geqslant \varepsilon a_{nk}\} = O\left(k^{-2p/\rho}\right), \quad (c_n = a_{nk}),$$

и так как в силу (14) $n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x a_{nk}\} \sim (kx^\rho)^{-1}$, то при $p > \rho/2$ выполняется условие (12) и из (13) и (14) получаем

$$k\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant x a_{nk}\} \sim nk\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x a_{nk}\} \sim x^{-\rho}. \tag{18}$$

Далее, поскольку $a_{nk} \sim k^{1/\rho} a_n$, $n \to \infty$, то с помощью (16), (18) и условия A_4 выводим

$$\lim_{k\to\infty} kH(k^{1/\rho}x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} k\mathbf{P}\{|X_n(a_{nk})| \geqslant x\} = x^{-\rho},$$

откуда следует, что $H(x)$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, $\rho > 0$.

Необходимость. Пусть $H(x)$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho,\ \rho > 0$. Последовательность $\{a_n\}$ по определению является неубывающей, так что если $m = m(n) < n,\ m(n) \to \infty,\ n \to \infty$, то

$$\max_{m\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant Na_n\} \leqslant \max_{m\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant Na_k\} = H(N) + o_n(1).$$

Если же $m(n) \to \infty$ достаточно медленно, то

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant Na_n\} = o_n(1),$$

так что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant Na_n\} = o_n(1) + o_N(1). \tag{19}$$

Пусть $a_n = o(c_n),\ n \to \infty$. Из (19) получаем

$$\delta_n^2 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant \varepsilon c_n\} \to 0,\ n \to \infty,$$

и если $k(n) = c_n/a_n$ стремится к бесконечности достаточно медленно, то в силу (16), леммы 1 и правильного изменения функции $H(x)$ имеем

$$\delta_n^2 = O(\mathbf{P}^2\{|X_n| \geqslant \varepsilon c_n\}) = O(H^2(\varepsilon k)) = o(H(kx)) = o(\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant xc_n\}),$$

то есть, имеет место (11) и, следовательно, (13). Пусть $k = k(n) = c_n/a_n$ — монотонная последовательность такая, что $k(n+1)/k(n) \to 1,\ n \to \infty$. Тогда последовательность $\lambda(n) = n/H(k(n))$ удовлетворяет условию $\dfrac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)} \to 1,\ n \to \infty$ и если $k(n)$ растёт достаточно медленно, то из (13) выводим

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(n)\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant xc_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant xc_n\}}{H(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{H(kx)}{H(k)} = x^{-\rho},$$

что имеет место только тогда, когда $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$ при $x \to \infty$ ([6, с. 318]).

Далее, пусть $\varepsilon > 0$. Выберем с помощью (19) $N > 0$ таким, чтобы при достаточно больших n

$$\delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant \varepsilon Na_n\} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{4(1+\varepsilon)^p} < 1,\ p < \rho.$$

Из леммы 3 при $y \geqslant N \geqslant 3$ и при достаточно больших n получаем

$$\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant (1+\varepsilon)ya_n\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_n| \geqslant (y+3\varepsilon)a_n\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta_n\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant \varepsilon ya_n\} + n\mathbf{P}\{|X_1| \geqslant ya_n\}.$$

Будем обозначать $\mathbf{E}\{\xi, A\} = \int\limits_A \xi\mathbf{P}(d\omega)$. Поскольку $|X_1(a_n)| = \dfrac{C|\xi_1|}{a_n},\ C > 0$, из последнего соотношения следует

$$(1+\varepsilon)^{-p}a_n^{-p}\mathbf{E}\left\{|X_n|^p, |X_n| \geqslant (1+\varepsilon)Na_n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta_n \varepsilon^{-p} a_n^{-p} \mathbf{E}\left\{|X_n||^p, |X_n| \geqslant \varepsilon N a_n\right\} + nC^p a_n^{-p} \mathbf{E}\left\{|\xi_1|^p, \xi_1 \geqslant N a_n\right\}. \tag{20}$$

Так как $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant y\}$ — правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, $\rho > 0$, то

$$\mathbf{E}\left\{|\xi_1|^p, \xi_1 \geqslant y\right\} \sim C' y^p \mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant y\},\ y \to \infty,\ C' > 0,\ p < \rho \tag{21}$$

[6, с. 324]. С помощью (14) и (21) выводим

$$nC^p a_n^{-p} \mathbf{E}\left\{|\xi_1|^p, \xi_1 \geqslant N a_n\right\} \sim C' C^p N^p n \mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant N a_n\} \to C' C^p N^{p-\rho} = o_N(1). \tag{22}$$

Обозначим

$$A = \lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} a_n^{-p} \mathbf{E}\left\{|X_n|^p, |X_n| \geqslant N a_n\right\}.$$

Из (20) и (22) следует теперь $A \leqslant \dfrac{2\delta_n (1+\varepsilon)^p}{\varepsilon^p} A \leqslant \dfrac{A}{2}$. Следовательно, $A = 0$, то есть последовательность $\{a_n^{-p}|X_n|^p\}$ равномерно интегрируема, что вместе с (16) даёт

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-p} \mathbf{E}|X_n|^p = B = \int_0^\infty x^p dH(x).$$

В силу монотонности последовательности $\{a_n\}$

$$b_n^p(p) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|^p \sim B a_n^p = O(a_n^p).$$

■

Литература

1. Гринь А.Г. Условия слабой зависимости в предельных теоремах для обобщённых сумм // Математические структуры и моделирование. 2014. № 1(29). С. 4–12.
2. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и её приложения. М. : Мир, 1983. 574 с.
3. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и её применения. 2009. Т. 54, № 2. С. 344–354.
4. Peligrad M. An invariance principle for φ– mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, № 4. P. 1304–1313.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М. : Мир, 1984. 751 с.

ON LIMIT THEOREMS FOR FUNCTIONS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

A.G. Grin'
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The asymptotic of distribution tails of a certain class of functions of independent random variables is obtained in this article. It is shown how to characterize the limit distribution of such functions using this asymptotic.

Keywords: limit theorems, functions of random variables, distribution tails, regularly varying functions.