Математические структуры и моделирование 2016. № 3(39). С. 40–47

УДК 517.968, 514.17

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.Н. Степанов
доцент, к.ф.-м.н., e-mail: stpnv@yandex.ru

Омский государственный технический университет

Аннотация. В статье даны необходимые и достаточные условия аналитичности решения уравнения первого рода типа свёртки на сфере с ядром $K(t) \in L_2[-1,1])$. Доказана аналитичность некоторых функционалов замкнутой выпуклой аналитической поверхности. С помощью леммы Витушкина получена оценка для разности опорных функций двух замкнутых выпуклых аналитических поверхностей, если для них известны отклонения функционалов поверхностей и их производных на конечном множестве точек. Приведены некоторые известные результаты по проблеме устойчивости в определении выпуклой поверхности по томографическим данным.

Ключевые слова: уравнение первого рода, аналитичность, опорная функция, выпуклая поверхность, устойчивость, лемма Витушкина.

В последние годы получены различные результаты по устойчивости в определении выпуклых тел по некоторым функционалам выпуклой поверхности (томографическим данным: меры сечений и проекций, опорная функция, поверхностная функция выпуклой поверхности и т.д.). Эти теоремы утверждают, что при определённых условиях отклонение двух выпуклых тел мало (с точностью до сдвига), если томографические данные близки друг к другу. Подход, используемый для этого, может быть основан на исследовании устойчивости интегральных преобразований, тесно связанных с восстановлением выпуклого тела по томографическим данным [17, 18]. Частными случаями таких преобразований являются: сферическое преобразование Радона, полусферическое преобразование и косинус-преобразование функций, определённых на сфере.

Приведём некоторые известные и важные результаты по этой проблеме. Больший объём информации о проблеме содержится в работах [11–22].

В работах S. Campi [11, 12] даны оценки расстояния в L_2 — метрике и в метрике Хаусдорфа между двумя выпуклыми центрально-симметричными телами, телами вращения через L_2 — норму разности периметров и L_2 — норму разности площадей ортогональных проекций на плоскости всевозможных направлений.

Глубокий результат, обобщающий оценки S. Campi по размерности, был доказан J. Bourgain, J. Lindenstrauss J. [10]. Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, $\Pi(K)$ — проекционное тело (это тело с опорной функцией $H_{\Pi(K)}(u)$={$(n-1)$-мерному объёму ортогональной проекции K на гиперплоскость ортогональную

$u\}$, $\delta(K,H) = \min\{\log\lambda : \lambda^{-1}H \subset K \subset \lambda H\}$ — метрика. Тогда для любого $n \geqslant 3$ и для любого $\gamma < 2/n(n+4)$ существует такая постоянная $c(n,\gamma)$, что $\delta(K,H) \leqslant c(n,\gamma)\delta(Z(K),Z(H))^{\gamma}$.

В случае, когда томографические данные даются формулой $(T_\Phi\sigma_{n-1}(K))(u) = \int_{S^{n-1}} \Phi(\langle u,v\rangle)\sigma_{n-1}(K,dv)$, где $\sigma_{n-1}(K,\cdot)$ — поверхностная функция [6, с. 18], $\Phi(t)$ ограниченная измеримая функция на $[-1,1]$, оценка устойчивости была получена D. Hug и R. Schneider [19]: для некоторого $\gamma \in (0,1)$ существует постоянная c, зависящая только от n,r,γ,R,Φ такая, что, если $K,L \in K^d(r,R)$, то $\delta(K,L+x) \leqslant c\|T_\Phi(\sigma_{n-1}(K) - \sigma_{n-1}(L))(u)\|^{\gamma}$. Здесь $\delta(K,L)$ — метрика Хаусдорфа, $\|\cdot\|$ — L_2-норма, $K^d(r,R)$ — множество выпуклых тел, содержащихся внутри шара радиуса R и содержащих шар радиуса r.

Оценка в метрике L_2 индикатора отклонения опорных функций H_K и H_L выпуклых тел K и L в $\mathbb{R}^n$ в предположении, что мала разность $\|M(K_u) - M(L_u)\|_{L_2(S^{n-1})}$, где $M(K_u)$, $M(L_u)$ — ширины проекций тел K и L на подпространство ортогональное u, получена P. Goodey, H. Groemer в [16].

Алгоритмы реконструкции выпуклого тела по конечному набору значений томографических данных рассматривались в работах [14, 15]. Основной идеей этих алгоритмов является построение выпуклого многогранника, чья функция томографических данных наилучшим образом приближается данными измерений.

В случае когда томографическими данными являются значения функции яркости, основанием для построения таких алгоритмов может служить следующее утверждение [13,20]. Пусть K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ и $U = \{u_1,\dots,u_k\} \subset S^{n-1}$ — линейная оболочка $\mathbb{R}^n$. Среди всех выпуклых тел с одинаковыми значениями функции яркости, как для тела K в направлениях из U, существует единственный центрально-симметричный выпуклый многогранник P максимального объёма, каждая грань которого ортогональна к одному из векторов из U.

В представленной работе получена оценка для $\sup$ — нормы разности опорных функций двух выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$ с аналитической границей по значениям площадей ортогональных проекций и освещённых частей на конечном множестве направлений.

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$; $u,v \in S^{n-1}$; $\langle u,v\rangle$ — скалярное произведение. Рассмотрим уравнение первого рода типа свёртки на S^{n-1}

$$f(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u,v\rangle)z(v)d\,\omega_v, \tag{1}$$

где $d\omega$ — элемент площади.

Теорема 1. *Уравнение (1) с полным ядром $K(\langle u,v\rangle) \in L_2[-1,1]$ имеет аналитическое на сфере S^{n-1} решение $z(u)$ тогда и только тогда, когда функция $f(u)$ является аналитической на S^{n-1}.*

Доказательство. Для доказательства аналитичности воспользуемся следующим фактом. Пусть на сфере S^{n-1} задана суммируемая функция $g(u)$, и пусть $g(u) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(u)$ — её разложение в ряд по сферическим гармоникам. Тогда для того, чтобы функция $g(u)$ была аналитической, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$|Y_k(u)| \leqslant c\exp(-\eta k), u \in S^{n-1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

с некоторыми постоянными $c > 0$, $\eta > 0$ [7].

Предположим теперь, что $z(u)$ — аналитическая на S^{n-1} функция и

$$z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(u),\ \ Y_k(u) = \frac{(n+2k-2)\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}} \int_{S^{n-1}} C_k^{(n/2-1)}(\langle u, v\rangle) z(v) d\omega_v$$

– её разложение по системе сферических гармоник $\{Y_k(u)\}$. Тогда разложение функции $f(u)$ в ряд имеет вид:

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Y_k(u),$$

где λ_k — собственные значения ядра $K(\langle u, v\rangle)$. Ввиду полноты ядра все собственные значения ядра отличны от нуля. По формуле Функа-Гекке [1, с. 240]:

$$\lambda_k = \frac{\Gamma(n-2)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle) C_k^{(n/2-1)}(\langle u, v\rangle) d\,\omega_v =$$
$$= \frac{|S^{n-2}|\Gamma(n-2)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \int_{-1}^{1} K(t) C_k^{(n/2-1)}(1-t^2)^{(n-3)/2}(t) dt,$$

где $|S^{n-2}| = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}$ — площадь поверхности сферы S^{n-2}, $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $C_k^{(n/2-1)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

В статье [9] показано, что собственные значения уравнения (1) с ядром $K(\langle u, v\rangle)$ класса $L_1[-1, 1]$ при $k \to \infty$ убывают быстрее, чем $k^{-n/2+1}$. Поэтому члены разложения $f(u)$ по сферическим гармоникам убывают по экспоненциальному закону. Следовательно, $f(u)$ — аналитическая на S^{n-1} функция. Аналогично доказывается аналитичность $z(u)$, если $z(u)$ – аналитическая функция. ■

Пусть B — замкнутая выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с положительной кривизной. Через $F(u)$ обозначим площадь ортогональной проекции поверхности B на плоскость с нормальным вектором u, $S(u)$ — площадь освещённой в направлении u части поверхности. Имеют место формулы [2]:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| R_1(v) R_2(v) d\,\omega_v,\ \ S(u) = \int_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle) R_1(v) R_2(v) d\,\omega_v,$$

где χ — функция Хевисайда и формулы обращения [2, 5, 8]:

$$[R_1(u)R_2(u)]^+ = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dt}\int_{\langle u,v\rangle^2>t} \frac{(\Delta_S+2)F(u)|\langle u,v\rangle|d\,\omega_v}{\sqrt{\langle u,v\rangle^2-t}}\Bigg|_{t=0} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(\Delta_S+2)F(u) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[(\Delta_S+2)\widetilde{F}(\gamma,u)]'d\,\gamma}{\cos\gamma}\ ,$$

$$[R_1(u)R_2(u)]^- = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\langle u,v\rangle>0} \frac{\Delta_S S^-(v)d\,\omega_v}{\langle u,v\rangle} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}S^-(u) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \tan\gamma \widetilde{S}^{-\prime\prime}(\gamma,u)d\,\gamma,$$

где $f^{\pm}(u)$ — чётная и нёчетная части функции $f(u)$, Δ_S — поверхностный оператор Лаплпса, $\widetilde{f}(\gamma,u)$ — среднее значение функции $f(u)$ на окружности $\langle u,v\rangle = \cos\gamma$, $0<\gamma<\pi$.

Из этих формул следуют оценка для разности произведений $R^{(j)}(u) = R_1^{(j)}(u)\cdot R_2^{(j)}(u)$ главных радиусов кривизны поверхностей B_1 и B_2 [8]:

$$\begin{aligned}&\|R^{(2)}(u) - R^{(1)}(u)\|_{C(S^{n-1})} \leqslant \\ &\leqslant c_1\|F_2(u)-F_1(u)\|_{C^4(S^{n-1})} + c_2\|S_2(u)-S_1(u)\|_{C^3(S^{n-1})},\end{aligned} \tag{2}$$

где $c_1>0$ и $c_2>0$ — некоторые постоянные.

Если B — замкнутая выпуклая аналитическая поверхность с положительной гауссовой кривизной, то её опорная функция $H(u)$ аналитична на S^{n-1}. Для произведения главных радиусов кривизны известна формула

$$R_1(u)R_2(u) = \begin{vmatrix} H_{11}(u) & H_{12}(u) \\ H_{12}(u) & H_{22}(u)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{22}(u) & H_{23}(u) \\ H_{32}(u) & H_{33}(u)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{11}(u) & H_{13}(u) \\ H_{31}(u) & H_{33}(u)\end{vmatrix},$$

где $H_{ij}(u) = \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x=u}$, из которой следует аналитичность $R_1(u)R_2(u)$. Теперь из теоремы 1 получаем:

Следствие 1. *Если B – аналитическая поверхность, то функции $F(u)$ и $S(u)$ — аналитические.*

Пусть u_0 — фиксированная точка на сфере S^2; (θ_0,φ_0) – сферические координаты точки u_0 относительно некоторого полюса. Обозначим через J_δ множество всех тех точек $u\in S^2$, для которых $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$, $|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta$, где ϑ,φ — сферические координаты точки u относительно того же полюса и $\delta>0$ — фиксированное число.

Теорема 2. *Пусть B_1 и B_2 — замкнутые выпуклые аналитические поверхности в $\mathbb{R}^3$, гауссовы кривизны которых положительны. Тогда для всякого положительного $\varepsilon \leqslant 1/2$ в J_δ можно фиксировать $\nu \leqslant A_1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ точек $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ таких, что если в этих точках функции $f(u) = F_2(u) - F_1(u)$, $s(u) = S_2(u) - S_1(u)$ и их производные $D^\alpha f(u)$, $|\alpha| \leqslant 4$, $D^\beta s(u)$, $|\beta| \leqslant 4$, принимают значения по модулю не превосходящие ε, то при некотором расположении поверхностей B_1 и B_2 разность их опорных функций $H_2(u) - H_1(u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|H_2(u) - H_1(u)| \leqslant A_2 \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{5}} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{5}}, \ u \in S^2,$$

где ρ, r $(\rho > r > 1)$, $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $\gamma = \dfrac{2 \ln r}{\ln \rho - \ln r}$ – некоторые постоянные

Доказательство. По следствию функции $F_j(u), S_j(u), j = 1,2$ — аналитические на S^2, следовательно, и функции $f_{\alpha_1,\alpha_2}(u) = D^\alpha f(u), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 4$, $s_{\beta_1,\beta_2}(u) = D^\beta s(u), |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leqslant 3$ также аналитические на S^2. Пусть $\widetilde{f}_{\alpha_1,\alpha_2}(z,\varsigma)$ и $\widetilde{s}_{\beta_1,\beta_2}(z,\varsigma)$ — аналитические продолжения функций $f_{\alpha_1,\alpha_2}(u)$, $s_{\beta_1,\beta_2}(u)$ в замкнутую область

$$E_\rho^{\delta,\,u_0} = E_\rho^{\delta,\,\theta_0} \times E_\rho^{\delta,\,\varphi_0},$$

ограниченные в этой области некоторой константой $c > 0$. Здесь E_ρ^{δ,θ_0} — эллипс в комплексной плоскости $z = \theta + i\eta$ с фокусами в точках $(\theta_0 \mp \delta, 0)$, и $E_\rho^{\delta,\varphi_0}$ — эллипс в комплексной плоскости $\zeta = \varphi + i\tau$ с фокусами в точках $(\varphi_0 \mp \delta, 0)$ $(\eta = const$ и $\tau = const)$, причём отношение полусуммы длин осей этих эллипсов к числу $\delta > 0$ равно $\rho > 1$. Возьмём такое достаточно большое ρ $(\delta > 0$ — фиксировано) и $r, 1 < r < \sqrt[3]{\rho}$, чтобы замкнутая область E_ρ^{δ,u_0} содержала внутри себя прямоугольник $\{0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$. Применяя к функциям $\widetilde{f}_{\alpha_1,\alpha_2}(z,\varsigma)$ и $\widetilde{s}_{\beta_1,\beta_2}(z,\varsigma)$ лемму А.Г. Витушкина [3, с. 197], заключаем, что всюду в E_ρ^{δ,u_0} функции $\widetilde{f}_{\alpha_1,\alpha_2}(z,\varsigma)$, $\widetilde{s}_{\beta_1,\beta_2}(z,\varsigma)$ будут ограничены по модулю величинами

$$M_{\alpha_1,\alpha_2} \varepsilon^{1-\gamma} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^4, \ N_{\beta_1,\beta_2} \varepsilon^{1-\gamma} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^4,$$

где $\gamma = \dfrac{2 \ln r}{\ln \rho - \ln r}$, а $M_{\alpha_1,\alpha_2} > 0$, $N_{\beta_1,\beta_2} > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от ε и r, причём в силу выбора $r < \sqrt[3]{\rho}$ величина $\varepsilon^{1-\gamma} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^4 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как $\widetilde{f}_{\alpha_1,\alpha_2}(z,\varsigma)$, $\widetilde{s}_{\beta_1,\beta_2}(z,\varsigma)$ — аналитические продолжения функций $f_{\alpha_1,\alpha_2}(u), s_{\beta_1,\beta_2}(u)$, то тем более для всех $u \in S^2$

$$|D^\alpha f(u)| \leqslant M_{\alpha_1,\alpha_2} \varepsilon^{1-\gamma} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^4, \ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 4, \ u \in S^2,$$

$$\left|D^{\beta}s(u)\right| \leqslant N_{\beta_1,\beta_2}\varepsilon^{1-\gamma}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^4, \ 0 \leqslant |\beta| \leqslant 3, \ u \in S^2.$$

Пусть Q — любое множество ненулевой меры на сфере S^2. Так как поверхности B_1 и B_2 — аналитические, то их поверхностные функции $\sigma_j(Q), \ j = 1, 2$, можно записать в виде [6, с. 18]:

$$\sigma_j(Q) = \int_Q R^{(j)}(u)d\omega_v, \quad R^{(j)}(u) = R_1^{(j)}(u)R_2^{(j)}(u).$$

Поэтому

$$|\sigma_2(Q) - \sigma_1(Q)| = \left|\int_Q [R^{(2)}(u) - R^{(1)}(u)]d\omega_v\right| \leqslant mes\, Q \max |R^{(2)}(u) - R^{(1)}(u)| \leqslant$$
$$\leqslant 4\pi \|R^{(2)}(u) - R^{(1)}(u)\|_{C(\omega)}.$$

Следовательно, ввиду неравенства (2) и условий

$$\|F_2(u) - F_1(u)\|_{C^4(S^{n-1})} \leqslant \varepsilon, \quad \|S_2(u) - S_1(u)\|_{C^3(S^{n-1})} \leqslant \varepsilon\,,$$

получаем

$$|\sigma_2(Q) - \sigma_1(Q)| \leqslant c\,\varepsilon,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Применяя теперь теорему Ю.А. Волкова [4] об устойчивости решения проблемы Минковского, получаем, что при некотором расположении поверхностей B_1 и B_2 разность их опорных функций удовлетворяет неравенству

$$|H_2(u) - H_1(u)| \leqslant A_2\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{5}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{5}}, \ u \in S^2.$$

■

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М. : Наука, 1974. 296 с.
2. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. Москва, Ленинград : ОНТИ, 1935. 302 с.
3. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования. М. : Физматгиз, 1959. 215 с.
4. Волков Ю.А. Устойчивость проблемы Минковского // Вестн. ЛГУ. 1963. № 1. С. 33–43.
5. Погорелов А.В. Четвёртая проблема Гильберта. М. : Наука, 1974. 78 с.
6. Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. М. : Наука, 1975. 96 с.
7. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974. 808 с.

8. Степанов В.Н. Некоторые вопросы геометрии выпуклых поверхностей. Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений // Сб. научн. тр. Новосибирск : ВЦ СО РАН СССР. 1981. С.65–75.
9. Степанов В.Н. Асимптотика собственных значений уравнения первого рода // Омский научный вестник. 2011. № 3(103). С. 41-44.
10. Bourgain J., Lindenstrauss J. Projection bodies // Geometric Aspects of functional analysis (J. Lindenstrauss and V.D. Milman, eds) Lecture Notes in Math., vol. 1317. Springer-Verlag. New York: 1988. P. 250–270.
11. Campi S. Reconstructing a convex surface from certain Measurements of its projections // Bull. Un. Math. Ital. 1986. No. 5B, 6. P. 945–959.
12. Campi S. Recovering a centred convex body from the areas of its shadows: a stability estimate // Ann. Mat. Pura ed appl. 1988. No. 151. P. 289–302.
13. Campi S., Colesanti A., Gronchi P. Convex bodies with extremal volumes having prescribed brightness in fnitely many directions // Geom. Dedicata. 1995. No. 57. P. 121–133.
14. Gardner R., Milanfar P. Reconstruction of convex bodies from brightness functions // Discrete and Computational Geometry. January 2003. Vol. 29, Issue 2. P. 279–303.
15. Gardner R., Kiderlen M., Milanfar P. Convergence of algorithms for reconstructing convex bodies and directional measures // The Annals of Statistics. 2006. Vol. 34, No. 3. P. 1331–1374.
16. Goodey P., Groemer H. Stability results for first order projection bodies // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. 109, No. 4. P. 1103–1114.
17. Groemer H., Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 61. Cambridge University Press: Cambridge 1996. 329 c.
18. Groemer H. Stability results for convex bodies and related spherical integral transforms // Adv. Math. 1994. No. 109. C. 45–74.
19. Hug D., Schneider R. Stability results involving surface area measures of convex bodies, part II // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 2002. No. 70. P. 21–51.
20. Schneider R., Weil W. Uber die Bestimmung eines Konvexen Korpers durch die Inhalte seiner Projektiones // Math. Z. 1970. 116, No. 4. P.338–348.
21. Schneider R. Stability in Aleksandrov-Fenchel-Jenssen theorem // Mathematika. 1989. No. 36. P. 50–59.
22. Schneider R. Stable Determination of Convex Bodies From Projections // Monatsh. Math. 2007. No. 150. P. 241–247.

THE EVALUATION OF STABILITY FOR CONVEX SURFACES

V.N. Stepanov
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: stpnv@yandex.ru

Omsk State Technical University

Abstract. Necessary and sufficient conditions for the analytic solution of the first kind equation of convolution type on the sphere with the core $K(\langle u, v\rangle) \in L_2[-1, 1]$ are given in the article. Also, some functional analyticity of closed convex surface is proved. The evaluation for the difference between the support functions of the two closed convex analytic surfaces is obtained by Vitushkin's Lemma, if the deviations of surfaces functionals and their derivatives on a finite set of points are known. Some known results on the stability problem in the definition of a convex surface on the tomographic data are given.

Keywords: the equation of the first kind, analyticity, supporting function, convex surface, stability, Vitushkin's Lemma.