Математические структуры и моделирование
2016. № 3(39). С. 5–23

УДК 512.815.8

СПЕКТР МАТЕРИИ ГЕЙЗЕНБЕРГА В АБСТРАКТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет

Аннотация. Исследуется алгебраическая структура спектра материи. Показывается, что базовой конструкцией, лежащей в основании понятия спектра материи, введённого Гейзенбергом, является двухуровневое гильбертово пространство. Двухуровневая структура гильбертова пространства задаётся следующей парой: 1) сепарабельное гильбертово пространство, в рамках которого определяются операторные алгебры и фундаментальные симметрии; 2) несепарабельное (физическое) гильбертово пространство, т.е. пространство состояний (энергетических уровней) спектра материи, в котором действуют динамические и калибровочные симметрии. Приведено разложение физического гильбертова пространства на когерентные подпространства, что позволяет единым образом охватить весь наблюдаемый спектр состояний, включая лептонный, мезонный и барионный секторы спектра материи.

Ключевые слова: спектр материи, гильбертово пространство, когерентные подпространства, принцип суперпозиции, принцип редукции, симметрии.

1. Введение

В настоящее время накоплен огромный наблюдательный материал по спектроскопии элементарных частиц. Открытие динамических симметрий (SU(3)- и SU(6)-симметрии и т.д.) позволило частично упорядочить и систематизировать эти наблюдательные данные, главным образом в области барионного спектра. Однако до сих пор остаётся неясной общая структура спектра элементарных частиц. По мнению Гейзенберга [1], главной причиной создавшейся ситуации является непонимание природы элементарной частицы. Кварковые модели, базирующиеся на приближенных динамических SU(N)-симметриях, не дают ответа на этот вопрос, поскольку эти модели не включают в себя лептонный сектор. В стандартной модели фиксируется разделение адронного (кваркового) и лептонного секторов, плюс к этим двум добавляется калибровочный сектор (сектор полей-переносчиков взаимодействий). Такое тройственное разделение спектра частиц в стандартной модели на три класса «фундаментальных частиц» привело к ещё большей путанице в понимании общей структуры этого спектра, что и послужило главным мотивом в стремлении многих физиков-теоретиков выйти за пределы стандартной модели, т.е. найти другую альтернативную схему описания спектра элементарных частиц.

Одной из наиболее интересных и многообещающих альтернативных схем является исследовательская программа, предложенная Гейзенбергом [2]. Главной идеей этой программы является представление о том, что всё огромное множество элементарных частиц есть ***спектр материи***, а каждая элементарная частица представляет собой тот или иной энергетический уровень этого спектра. Принципиально важным моментом всей программы является отказ Гейзенберга от понятия фундаментальной частицы (все уровни спектра материи равноправны). Гейзенберг утверждает, что понятие «состоит из» уже не работает в физике элементарных частиц. Если продолжить применять это понятие, то получим ответ, что каждая данная частица состоит из всех известных частиц. Таким образом, физическое знание подошло к границам той области, где понятие «состоит из» оказывается уже не имеющим смысла. Гейзенберг пишет: «... при столкновении двух элементарных частиц высоких энергий в процессе их распада могут возникать разнообразные частицы, однако, эти частицы не обязательно окажутся меньше тех, что подверглись делению. Речь идёт фактически о возникновении новых элементарных частиц из кинетической энергии сталкивающихся объектов. Понятие деления тем самым утратило свой смысл, как и понятие наименьшей частицы. Когда энергия становится материей, возможность чего была давно уже признана теорией относительности, энергия принимает форму элементарной частицы» [2, с. 346]. И далее: «... все многообразие элементарных частиц объясняется некоторой универсальной первоматерией, которую можно назвать энергией или материей. В этом случае ни одна из элементарных частиц принципиально не выделяется среди других в качестве фундаментальной частицы» [3, с. 29]. Место фундаментальных частиц занимают фундаментальные симметрии: «Спрашивается, чем же тогда заменить понятие фундаментальной частицы. Полагаю, что нам следовало бы заменить его понятием фундаментальной симметрии. Фундаментальными симметриями определяется основополагающий закон, обусловливающий спектр элементарных частиц ... Тщательный анализ наблюдений даёт мне основание заключить, что, помимо Лоренцовой группы подлинными симметриями являются также SU_2, принцип масштабной инвариантности и дискретные преобразования P, C, T, но я не стал бы причислять к фундаментальным симметриям SU_3 или более высокие симметрии этого рода, поскольку они могут возникать благодаря динамике системы в качестве приближенных симметрий» [2, с. 106].

В настоящей статье представлена абстрактно-алгебраическая формулировка основных положений спектра материи. Общая алгебраическая структура спектра материи, определяемая двухуровневым гильбертовым пространством, исследуется в п. 2. Показывается, что основные энергетические уровни (состояния) спектра материи строятся на основе циклических представлений в рамках конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала. Конкретная реализация операторной алгебры осуществляется посредством спинорной структуры, ассоциированной с каждым циклическим представлением. Чистые состояния (циклические представления), задающие уровни спектра материи, подразделяются относительно заряда (действия псевдоавтоморфизма спинорной структуры) на подмножества заряженных, нейтральных и истинно нейтральных состояний. Показывается, что структура спектра материи задаётся разбиением физического гильбертова пространства (пространства состояний) на когерентные подпространства, при этом принцип суперпозиции имеет место в ограниченной форме, т.е. в пределах когерентных подпространств. Ни один уровень (состояние) спектра материи не является выделенным или «фундаментальным», все уровни представляют собой актуализированные (локализованные) состояния квантовых микрообъектов (квантовой системы≡спектра материи). Ключевую роль играет понятие симметрии. Симметрии спектра материи разделяются на три вида: *фундаментальные* симметрии, участвующие в формировании состояний, *динамические* и *калибровочные* симметрии, связывающие состояния между собой.

2. Общая алгебраическая структура спектра материи

В этом параграфе рассмотрим общую структуру спектра материи, которая задаётся строением гильбертова пространства элементарной частицы. В свою очередь, это гильбертово пространство имеет двухуровневую структуру. На первом уровне имеем *сепарабельное гильбертово пространство* H_∞, в котором согласно стандартным правилам локальной квантовой феноменологии (картины Шредингера) определяются ***наблюдаемые*** (C^*-алгебры), состояния, спектры наблюдаемых и *фундаментальные симметрии*. Основной наблюдаемой является *энергия* (эрмитов оператор H), фундаментальная симметрия задаётся группой Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$. На втором уровне имеем *несепарабельное гильбертово пространство* $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$[1], в котором главными структурными составляющими являются ***состояния***[2] (лучи). Векторы состояния в $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ конструируются из неприводимых конечномерных представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Эти представления определены в собственных подпространствах $\mathsf{H}_E \subset \mathsf{H}_\infty$ оператора энергии H. Таким образом, векторы состояния в $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ задают спиновые и зарядовые степени свободы элементарной

[1] Как известно, фундаментальная двойственность природы, впервые обнаруженная в эксперименте Штерна-Герлаха, привела к введению спина в квантовой механике. В 1927 г. Паули [4] дал строгий метод введения спина в квантовую механику посредством определения удвоенного гильбертова пространства $\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_\infty$. В свою очередь, гильбертово пространство $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ является естественным обобщением пространства Паули $\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_\infty$.

[2] Как отмечал Сигал [5], в качестве основного объекта, связанного с физической системой, можно взять или наблюдаемую или состояние: «*Относительно первичности состояний или наблюдаемых*. Что более фундаментально: наблюдаемые или состояния — этот вопрос во многом подобен аналогичному вопросу о курице или яйце. Если оставить в стороне метафизику, ни одно из этих понятий не имеет решающего преимущества как фундаментальная концепция. Однако в настоящее время не существует аналитической трактовки, исходящей из состояний и развитой в такой же мере, как трактовка, основанная на понятии наблюдаемой» [5, с. 32]. Сигал отмечает также, что в работах Биркгофа и фон Неймана [6] и Макки [7] сформулированы предварительные положения трактовки, основанной на понятии состояния. Однако трактовка Биркгофа-фон Неймана-Макки не получила дальнейшего развития в силу очевидных (главным образом исторических) обстоятельств.

частицы. Сама же элементарная частица представляет собой суперпозицию векторов состояния в $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$, т.е. в случае чистых (запутанных) состояний имеем несепарабельное (нелокальное) состояние. Следовательно, двухуровневая структура гильбертова пространства элементарной частицы задаётся парой $(\mathsf{H}_\infty, \mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty)$[3].

2.1. Гильбертово пространство H_∞

Итак, на первом уровне имеем сепарабельное гильбертово пространство H_∞, т.е. H_∞ является банаховым пространством со счётной базой, всюду плотной в H_∞ (любой элемент из H_∞ представляется как предел последовательности элементов из счётного множества). На уровне H_∞ главную роль играют наблюдаемые. Исходным объектом рассмотрения является C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ с единицей (*алгебра наблюдаемых* или алгебра ограниченных наблюдаемых). Эрмитовы элементы этой алгебры являются ограниченными *наблюдаемыми*[4]. Положительный функционал ω над $\mathfrak{A}$, нормированный условием $\|\omega\| \equiv \omega(1) = 1$, называется *состоянием* алгебры $\mathfrak{A}$. Множество всех состояний алгебры $\mathfrak{A}$ будем обозначать через $S(\mathfrak{A})$. Величина $\omega(A)$ при $A = A^*$ понимается как *среднее значение* наблюдаемой A в состоянии ω. Множество $S(\mathfrak{A})$ является *выпуклым*, т.е. для любых двух состояний ω_1, ω_2 и λ_1, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеем $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in S(\mathfrak{A})$. Состояние ω называется *смешанным* (или статистической смесью), если оно представимо в *виде* $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$, где $0 < \lambda < 1$ и ω_1, ω_2 — два различных состояния алгебры $\mathfrak{A}$. Состояния, не являющиеся смешанными, называются *чистыми* (чистые состояния есть экстремальные точки множества $S(\mathfrak{A})$). Множество всех чистых состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $PS(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество таких состояний алгебры $\mathfrak{A}$, для которых выполняется условие $\omega(A) \geqslant 0$ для всех $\omega \in \mathfrak{S}$, т.е. A есть положительный элемент алгебры $\mathfrak{A}$ (A представимо в виде $A = B^*B$). Тогда множество $\mathfrak{S}$ будем называть множеством *физических состояний* алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$, а пару $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ будем также называть *физической системой*.

Для произвольной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ вероятность перехода между двумя чистыми состояниями ω_1, $\omega_2 \in PS(\mathfrak{A})$ определяется формулой $|\langle\Phi_1 \mid \Phi_2\rangle|^2 = \omega_1 \cdot \omega_2 = 1 - 1/4\|\omega_1 - \omega_2\|^2$ (см. [10]), где $|\Phi_1\rangle$ и $|\Phi_2\rangle$ — единичные векторы пространства H_∞. При этом $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_2 \cdot \omega_1$ и $\omega_1 \cdot \omega_2$ всегда заключено на отрезке $[0, 1]$. Соответственно $\omega_1 \cdot \omega_2 = 1$ в точности тогда, когда $\omega_1 = \omega_2$. Будем называть два чистых состояния ω_1 и ω_2 *ортогональными*, если вероятность перехода $\omega_1 \cdot \omega_2$ равна нулю. Соответственно два подмножества S_1 и S_2 в $PS(\mathfrak{A})$ являются взаимно ортогональными, если $\omega_1 \cdot \omega_2 = 0$ для всех $\omega_1 \in S_1$ и $\omega_2 \in S_2$. Далее, непустое под-

[3] В согласии с концепцией Гейзенберга-Фока [2,8], реальность имеет двухуровневую структуру: *потенциальная реальность* и *актуальная реальность*. Гейзенберг утверждал, что любой квантовый объект (например, элементарная частица) принадлежит обеим сторонам реальности: во-первых, потенциальной реальности как суперпозиция, и, во-вторых, актуальной реальности после редукции суперпозиции, т.е. измерения (более подробно см. [2,8,9]).

[4] Эрмитовы элементы C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ образуют *алгебру Иордана* $\mathfrak{A}_h$. В $\mathfrak{A}_h$ определяются линейные комбинации с вещественными коэффициентами и квадрат каждого элемента с симметрическим произведением (псевдопроизведением) $A \circ B = 1/4[(A+B)^2 - (A-B)^2]$.

множество $S \in PS(\mathfrak{A})$ называется *нераспадающимся*, если его нельзя разбить на два непустых ортогональных подмножества. Следуя [10], будем считать, что всякое максимальное нераспадающееся множество (т.е. нераспадающееся множество, не являющееся собственным подмножеством другого нераспадающегося множества чистых состояний из $PS(\mathfrak{A})$) является *сектором*. Итак, $PS(\mathfrak{A})$ разбивается на секторы, следовательно, в $PS(\mathfrak{A})$ существует отношение эквивалентности $\omega_1 \sim \omega_2$ в точности тогда, когда существует нераспадающееся множество в $PS(\mathfrak{A})$, содержащее ω_1 и ω_2. Следовательно, $PS(\mathfrak{A})$ единственным образом разбивается на попарно непересекающиеся и взаимно ортогональные секторы, которые в точности совпадают с *классами эквивалентности* в $PS(\mathfrak{A})$.

Одним из важнейших аспектов теории C^*-алгебр является двойственность между состояниями и представлениями. Связь между состояниями и неприводимыми представлениями операторных алгебр была впервые явно сформулирована Сигалом [11]. Пусть π есть некоторое представление алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H_∞, тогда для любого ненулевого вектора $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$ выражение

$$\omega_\Phi(A) = \frac{\langle \Phi \mid \pi(A)\Phi \rangle}{\langle \Phi \mid \Phi \rangle} \tag{1}$$

определяет состояние $\omega_\Phi(A)$ алгебры $\mathfrak{A}$, называемое *векторным состоянием*, ассоциированным с представлением π и соответствующим вектору $|\Phi\rangle$. Если ρ — матрица плотности в H_∞, то

$$\omega_\rho(A) = \mathrm{Tr}\left(\rho\pi(A)\right).$$

Аналогично, $\omega_\rho(A)$ является состоянием, ассоциированным с представлением π и соответствующим матрице плотности ρ. Состояния $\omega_\rho(A)$ суть статистические смеси векторных состояний (1). Пусть S_π — множество всех состояний, ассоциированных с представлением π. Два представления π_1 и π_2 с одним и тем же множеством ассоциированных состояний (т.е. с $S_{\pi_1} = S_{\pi_2}$) называются феноменологически эквивалентными, что соответствует унитарно эквивалентным представлениям. Более того, множество $PS(\mathfrak{A})$ всех чистых состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством всех векторных состояний, ассоциированных со всеми *неприводимыми представлениями* алгебры $\mathfrak{A}$. Всякий сектор в $PS(\mathfrak{A})$ в точности совпадает с множеством всех векторных состояний, ассоциированных с некоторым неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{A}$. При этом два унитарно эквивалентные (соответственно унитарно неэквивалентные) неприводимые представления определяют один и тот же сектор (соответственно взаимно ортогональные секторы).

Далее, пусть π — представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в H_∞ и пусть $|\Phi\rangle$ — циклический вектор[5] представления π, определяющий состояние ω_Φ. Тогда согласно

[5]Вектор $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$ называется циклическим для представления π, если все векторы вида $|\pi(A)\Phi\rangle$ (где $A \in \mathfrak{A}$) образуют тотальное множество в H_∞, т.е. такое множество, замыкание линейной оболочки которого всюду плотно в H_∞. Представление π с циклическим вектором называется циклическим.

конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала (см. [10]) каждое состояние определяет некоторое представление алгебры $\mathfrak{A}$, причём результирующее представление неприводимо в точности тогда, когда состояние является чистым. Тесная связь между состояниями и представлениями C^*-алгебры, следующая из конструкции ГНС, позволяет рассматривать представления алгебры как эффективный способ организации состояний. Это станет ещё более очевидным при конкретной реализации $\pi(\mathfrak{A})$.

2.1.1. Фундаментальные симметрии

В абстрактно-алгебраической формулировке под симметрией понимается преобразование физической системы, не изменяющее ее структурных свойств. В свою очередь, физическая система характеризуется алгеброй наблюдаемых $\mathfrak{A}$ и множеством состояний $S(\mathfrak{A})$. Следуя Гейзенбергу, условимся считать, что на уровне сепарабельного гильбертова пространства H_∞ мы имеем *фундаментальные (первичные) симметрии*. Определим фундаментальную симметрию как пару биекций $\alpha:\ \mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}$ и $\alpha':\ S(\mathfrak{A})\rightarrow S(\mathfrak{A})$, удовлетворяющих условию согласования: $(\alpha'\omega)(\alpha A)=\omega(A)$ для всех $A\in\mathfrak{A}$, $\omega\in S(\mathfrak{A})$. Множество всех симметрий физической системы образует группу с умножением, определяемым композицией биекций. Произведение двух симметрий (α,α') и (β,β') есть симметрия $(\alpha\beta,\alpha'\beta')$, где $(\alpha\beta)(A)\equiv\alpha[\beta(A)]$ и $(\alpha'\beta')(\omega)=\alpha'[\beta'(\omega)]$.

Будем называть группу G *группой фундаментальной симметрии* C^*-алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$, если задан гомоморфизм $g\rightarrow(\alpha_g,\alpha'_g)$ группы G в группу всех симметрий системы $(\mathfrak{A},S(\mathfrak{A}))$. Будем всегда предполагать, что G — некомпактная группа Ли (например, группа Лоренца, группа Пуанкаре или конформная группа). Тогда выполняется следующее условие непрерывности: при любом физическом состоянии $\omega\in\mathfrak{S}$ и любом фиксированном $A\in\mathfrak{A}$ функция $g\rightarrow\omega(\alpha_g(A))$ непрерывна по g. При этом группа G унитарно-антиунитарно реализована, если существует непрерывное представление $g\rightarrow U_g$ группы G унитарными или антиунитарными операторами (в соответствии с тем, являются ли α_g алгебраическими автоморфизмами или антиавтоморфизмами) в гильбертовом пространстве H_∞ такое, что для всех $A\in\mathfrak{A}$, $g\in G$ имеет место $\alpha_g(A)=U_gA^{(*)}U_g^{-1}$, где $A^{(*)}$ есть A для унитарного U_g и A^* для антиунитарного U_g.

2.1.2. Конкретная реализация $\pi(\mathfrak{A})$

В этом пункте рассмотрим конкретную реализацию операторной алгебры $\mathfrak{A}$. Переход $\mathfrak{A}\Rightarrow\pi(\mathfrak{A})$ от $\mathfrak{A}$ к конкретной алгебре $\pi(\mathfrak{A})$ иногда называют «одеванием». Итак, основной наблюдаемой спектра материи является *энергия*, которой соответствует эрмитов оператор H. Пусть $G=\mathrm{SO}_0(1,3)\simeq\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ — группа фундаментальной симметрии, где $\mathrm{SO}_0(1,3)$ — группа Лоренца. В силу локального изоморфизма $\mathrm{SL}(2,C)\simeq\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ будем рассматривать *универсальную накрывающую* фундаментальной симметрии $\widetilde{G}\simeq\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$, т.е. вблизи единицы группы. Пусть оператор энергии H определён на сепарабельном гильбертовом пространстве H_∞. Тогда все возможные значения энергии (состояния) являются собственными значениями оператора H. При этом, если $E_1 \neq E_2$ — собственные значения H, а $|\Phi_1\rangle$ и $|\Phi_2\rangle$ — принадлежащие им собственные векторы в пространстве H_∞, то $\langle \Phi_1 \mid \Phi_2\rangle = 0$. Все собственные векторы, принадлежащие данному собственному значению E, образуют вместе с нулевым вектором *собственное подпространство* H_E гильбертова пространства H_∞. Все собственные подпространства $\mathsf{H}_E \in \mathsf{H}_\infty$ конечномерны. Размерность H_E называется *кратностью* собственного значения E, если эта размерность r больше единицы, собственное значение E является *r-кратно вырожденным*. Далее, пусть X_l, Y_l — инфинитезимальные операторы комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ универсальной накрывающей $\widetilde{G}$, $l = 1, 2, 3$. Как известно [12], оператор энергии H перестановочен со всеми операторами в H_∞, представляющими алгебру Ли группы $\widetilde{G}$. Рассмотрим произвольное собственное подпространство H_E оператора энергии H. Поскольку операторы X_l, Y_l и H коммутируют между собой, то, как следствие, для этих операторов можно построить общую систему собственных функций. Это значит, что подпространство H_E инвариантно относительно операторов X_l, Y_l (более того, операторы X_l, Y_l можно рассматривать *только на* H_E). Далее, пусть дано некоторое *локальное представление* группы $\widetilde{G}$ операторами, действующими в H_∞. Потребуем, чтобы все представляющие операторы были перестановочны с H. Тогда каждое собственное подпространство H_E оператора энергии инвариантно относительно операторов комплексного момента X_l, Y_l. Это позволяет отождествить подпространства H_E с симметрическими пространствами $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ зацепляющихся представлений $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ группы Лоренца и тем самым получить конкретную реализацию («одевание») операторной алгебры $\pi(\mathfrak{A}) \to \pi(H)$, где $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$. На рис. 1 представлена система зацепляющихся представлений группы Лоренца. Отсюда следует, что каждое возможное значение энергии (энергетический уровень) является векторным состоянием вида (1):

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi \mid \pi(H)\Phi\rangle}{\langle \Phi \mid \Phi\rangle} = \frac{\langle \Phi \mid \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)\Phi\rangle}{\langle \Phi \mid \Phi\rangle}, \tag{2}$$

ассоциированным с представлением $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ и соответствующим ненулевому (циклическому) вектору $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$. Аналогично, если ρ — матрица плотности в H_∞, то

$$\omega_\rho(H) = \mathrm{Tr}\left(\rho\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)\right)$$

– статистическая смесь векторных состояний (2).

Далее, в силу изоморфизма $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$ будем рассматривать универсальную накрывающую $\widetilde{G}$ как *спинорную группу*, что позволит в дальнейшем дополнительно ассоциировать с каждым циклическим вектором $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$ *спинорную структуру* (в некотором смысле это будет второй слой в процессе «одевания» операторной алгебры). Спинтензорные представления группы $\widetilde{G} \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$ образуют *субстрат* зацепляющихся представлений $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ группы Лоренца, реализуемых в пространствах $\mathrm{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2^{k+r}}$, где $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ — спинпространство. В свою очередь, как известно [13], спинпространство является минимальным левым идеалом алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, т.е. существует

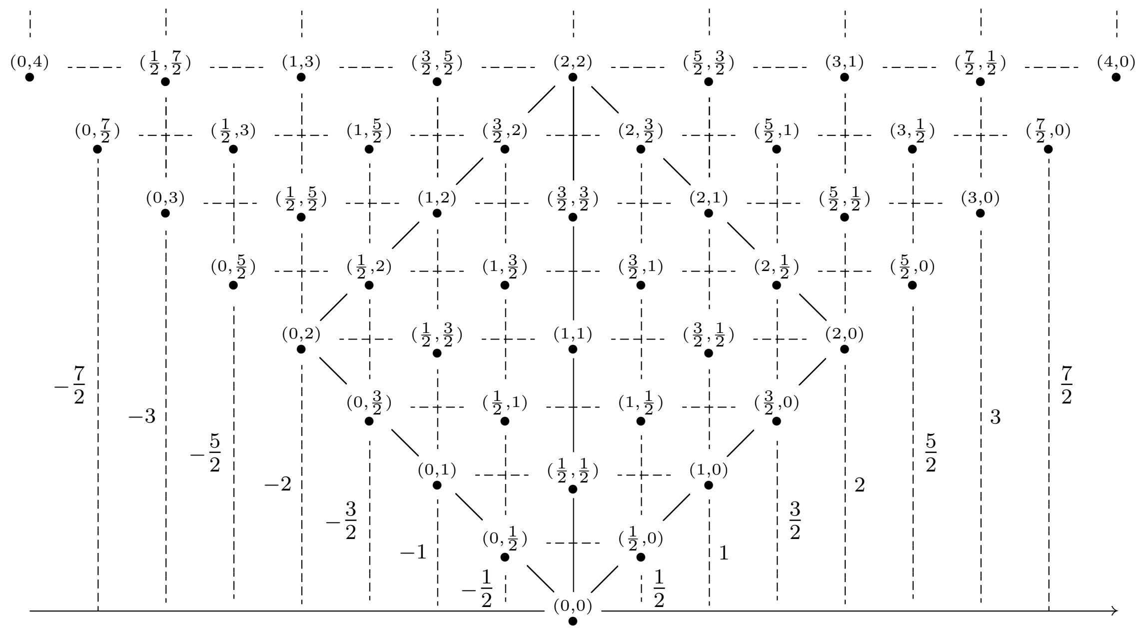

Рис. 1: Собственные подпространства $\mathsf{H}_E \simeq \mathrm{Sym}_{(k,r)}$ оператора энергии H. Каждое подпространство H_E является пространством неприводимого представления $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ из системы зацепляющихся представлений группы Лоренца (группы фундаментальной симметрии). Сплошными линиями обозначена первая клетка спинорной шахматной доски второго порядка.

изоморфизм $\mathbb{S}_{2^m}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = C\!\ell_{p,q} f$, где f — примитивный идемпотент алгебры $C\!\ell_{p,q}$, а $\mathbb{K} = fC\!\ell_{p,q}f$ — кольцо деления для $C\!\ell_{p,q}$, $m = (p+q)/2$. Комплексное спинпространство $\mathbb{S}_{2^m}(\mathbb{C})$ является комплексификацией $\mathbb{C} \otimes I_{p,q}$ минимального левого идеала $I_{p,q}$ вещественной подалгебры $C\!\ell_{p,q}$. Так, $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ является минимальным левым идеалом комплексной алгебры $\mathbb{C}_{2k} \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_{2r} \simeq \mathbb{C}_{2(k+r)}$ (более подробно см. [14, 15]). Определим систему *базисных циклических* векторов, наделённых комплексной спинорной структурой и соответствующих системе зацепляющихся представлений группы Лоренца:

$$|\mathbb{C}_0, \boldsymbol{\tau}_{0,0}(H)\Phi\rangle;$$

$$|\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,0}(H)\Phi\rangle, \quad |\overset{*}{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,1/2}(H)\Phi\rangle;$$

$$|\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{1,0}(H)\Phi\rangle, \quad |\mathbb{C}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,1/2}(H)\Phi\rangle, \quad |\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,1}(H)\Phi\rangle;$$

$$|\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{3/2,0}(H)\Phi\rangle, \quad |\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1,1/2}(H)\Phi\rangle, \quad |\mathbb{C}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,1}(H)\Phi\rangle, \quad |\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,3/2}(H)\Phi\rangle;$$

. . . .

Следовательно, согласно конструкции ГНС имеем комплексные векторные состояния вида

$$\omega^c_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi \mid \mathbb{C}_{2(k+r)}, \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)\Phi\rangle}{\langle \Phi \mid \Phi\rangle}, \tag{3}$$

ассоциированные с комплексными представлениями $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)$ (т.е. снабжёнными комплексной спинорной структурой) и соответствующими циклическим векторам $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$.

Как известно, в лагранжевом формализме стандартной квантовой теории поля *заряженным частицам* соответствуют *комплексные поля*. В нашем случае чистые состояния вида (3) соответствуют *заряженным состояниям*. При этом знак заряда меняется на обратный под действием псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ комплексной спинорной структуры (более подробно см. [16–18]). Продолжая аналогию с лагранжевым формализмом, в котором *нейтральным частицам* соответствуют *вещественные поля*, введём векторные состояния следующего вида:

$$\omega^r_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi \mid C\!\ell_{p,q}, \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)\Phi\rangle}{\langle \Phi \mid \Phi\rangle}. \tag{4}$$

Состояния (4) ассоциированы с вещественными представлениями $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)$, т.е. с представлениями, снабжёнными *вещественной спинорной структурой*, где $C\!\ell_{p,q}$ — вещественная подалгебра алгебры $\mathbb{C}_{2(k+r)}$. Состояния вида (4) соответствуют *нейтральным состояниям*. Поскольку вещественная спинорная структура появляется в результате редукции $\mathbb{C}_{2(k+r)} \to C\!\ell_{p,q}$, то, как следствие, *зарядовое сопряжение* C (псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$) для алгебр $C\!\ell_{p,q}$ над вещественным числовым полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ (типы $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$) редуцируется к *обмену частица-античастица* C' (см. [16–18]). Как известно, существуют два класса нейтральных частиц: 1) частицы, имеющие античастицы, такие как нейтроны, нейтрино и т.д.; 2) частицы, совпадающие со своими античастицами (например, фотоны, π^0-мезоны и т.д.), т.е. так называемые *истинно нейтральные частицы*. Первый класс описывается нейтральными состояниями $\omega^r_\Phi(H)$ с алгебрами $C\!\ell_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ с кольцами $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (типы $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$ и $p - q \equiv 5 \pmod 8$). Для описания второго класса нейтральных частиц введём *истинно нейтральные состояния* $\omega^{r_0}_\Phi(H)$ с алгебрами $C\!\ell_{p,q}$ над числовым полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и вещественными кольцами деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (типы $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$ и $p - q \equiv 1 \pmod 8$). В случае состояний $\omega^{r_0}_\Phi(H)$ псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ редуцируется к тождественному преобразованию (частица совпадает со своей античастицей).

Далее, если ρ — матрица плотности в H_∞, то $\omega^c_\rho(H)$, $\omega^r_\rho(H)$ и $\omega^{r_0}_\rho(H)$ — статистические смеси заряженных, нейтральных и истинно нейтральных состояний.

Прежде чем приступить к построению физического гильбертова пространства, рассмотрим более подробно структуру состояний вида (2)-(4). Состояния (2)-(4) представляют собой уровни спектра материи, т.е. актуализированные (локализованные) состояния квантовых микрообъектов («элементарных частиц»). Каждое из состояний вида (2)-(4) обладает следующими характеристиками (свойствами): энергия (масса), спин и заряд (первые два слоя «одевания» операторной алгебры). На этом уровне описания *состояние* приобретает первичное значение (в духе трактовки Биркгофа-фон Неймана-Макки), а *наблюдаемые* характеристики (энергия, спин, заряд, ...) являются свойствами состояния. Дальнейшее «одевание» операторной алгебры приводит к введению новых свойств (характеристик) состояния. Например, дискретные симметрии (инверсия пространства P, обращение времени T, зарядовое сопряжение C и их комбинации) появляются как автоморфизмы спинорной структуры, ассоциированной с каждым состоянием вида (2)-(4) [19–22]. Далее, фрактальная структура спектра материи определяется периодичностью Картана-Ботта спинорной структуры[6]. Однако подробное рассмотрение этих характеристик состояний выходит за рамки данной статьи.

2.2. Физическое гильбертово пространство

Множество всех чистых состояний $\omega_\Phi(H)$, определённых согласно конструкции ГНС равенством (2), при выполнении условия $\omega_\Phi(H) \geqslant 0$ образует *физическое гильбертово пространство*

$$\mathbf{H}_{\rm phys} = \mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty.$$

Легко проверить, что при этом выполняются аксиомы сложения, умножения и скалярного (внутреннего) произведения для векторов $\omega_\Phi(H) \to |\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$. Будем предполагать, что определённое таким образом гильбертово пространство является *несепарабельным*, т.е. в общем случае в $\mathbf{H}_{\rm phys}$ не выполняется аксиома сепарабельности[7].

Пространство $\mathbf{H}_{\rm phys}$, будучи вторым членом пары $(\mathsf{H}_\infty, \mathbf{H}_{\rm phys})$, задающей двухуровневую структуру гильбертова пространства элементарной частицы, описывает спиновые и зарядовые степени свободы этой частицы. В соответствии с зарядовыми степенями свободы выделим три *базовых подпространства* в $\mathbf{H}_{\rm phys}$.
1) *Подпространство заряженных состояний* $\mathbf{H}^\pm_{\rm phys} = \mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^\pm \otimes \mathbf{H}_\infty$.

---

[6] Фрактальная структура энергетического спектра образуется действием группы Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$. Действие группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ связывает различные типы вещественных алгебр Клифформа, которые образуют вещественную подструктуру спинтензорного субстрата. Циклическое действие группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ генерирует фрактальную структуру на спинтензорном субстрате. Эта структура аналогична ковру Серпинского с фрактальной размерностью (размерность Безиковича-Хаусдорфа) $D = \ln 63/\ln 8 \approx 1,9924$ (см. [23, 24]). Далее, в силу отображения $C\!\ell_{p,q} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{S})$, $\quad u \longrightarrow \gamma(u)$, $\quad \gamma(u)\boldsymbol{s} = u\boldsymbol{s}$, где $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{2^r}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = C\!\ell_{p,q}f$ — *вещественное спинпространство*, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r} \in \mathbb{S}_{2^r}$, фрактальная структура спинтензорного субстрата переносится на представления группы $\mathbf{Spin}_+(1,3) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

[7] Следует отметить, что первым к идее введения в квантовую теорию несепарабельных гильбертовых пространств пришёл Дирак. Дирак показал [25], что в квантовой теории поля в силу интенсивности взаимодействий шредингеровский вектор состояния будет выбит из сепарабельного гильбертова пространства за кратчайшее время. Как следствие этого не существует решения уравнения Шредингера и в целом шредингеровская картина, на которой базируется вся аксиоматика локальной квантовой теории поля, является неработоспособной.

2) *Подпространство нейтральных состояний* $\mathbf{H}^0_{\rm phys} = \mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^0 \otimes \mathbf{H}_\infty$.
3) *Подпространство истинно нейтральных состояний* $\mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys} = \mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^{\overline{0}} \otimes \mathbf{H}_\infty$.
Базисные векторы $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}$ образованы состояниями $\omega^c_\Phi(H)$ (см. (3)), соответственно $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}^0_{\rm phys}$ и $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}$ образуют состояния $\omega^r_\rho(H)$ и $\omega^{r_0}_\rho(H)$.

Следуя трактовке Биркгофа-фон Неймана-Макки, будем считать, что на уровне физического гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$ исходным (первичным) понятием является *состояние* (***луч***). Пусть $|\Psi\rangle$ — вектор состояния в пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}$, тогда $\boldsymbol{\Psi} = e^{i\alpha}|\Psi\rangle$, где α пробегает все вещественные числа и $\sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle} = 1$, называется *единичным лучом*. Следовательно, единичный луч $\boldsymbol{\Psi}$ — это совокупность базисных векторов состояния $\{\lambda|\Psi\rangle\}$, $\lambda = e^{i\alpha}$, $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$. Величины, связанные с наблюдаемыми эффектами, являются абсолютными значениями полубилинейной формы $|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2$, не зависящими от параметров λ, характеризующих луч. Таким образом, *пространство лучей* есть фактор-пространство $\hat{H} = \mathbf{H}_{\rm phys}/S^1$, т.е. проективное пространство одномерных подпространств из $\mathbf{H}_{\rm phys}$. Все состояния физической (квантовой) системы (в нашем случае элементарной частицы) описываются единичными лучами. Предположим, что основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$ включает *принцип суперпозиции* квантовой теории, т.е. существует набор базисных состояний, таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций. Дадим общее определение элементарной частицы. *Элементарная частица* (***единичная квантовая микросистема***) *является суперпозицией векторов состояния в физическом гильбертовом пространстве* $\mathbf{H}_{\rm phys}$.

2.2.1. Групповое действие в $\mathbf{H}_{\rm phys}$

Предположим, что одна и та же квантовая система может быть описана двумя различными способами в одном и том же подпространстве $\mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}$ ($\mathbf{H}^0_{\rm phys}$ или $\mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}$) пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$ один раз лучами $\boldsymbol{\Psi}_1$, $\boldsymbol{\Psi}_2$, … и другой раз лучами $\boldsymbol{\Psi}'_1$, $\boldsymbol{\Psi}'_2$, …. Это значит, что имеет место симметрия квантовой системы, когда одно и то же физическое состояние описывается при помощи луча $\boldsymbol{\Psi}_1$ в первом случае, а во втором — при помощи $\boldsymbol{\Psi}'_1$, так что вероятности переходов одинаковы. Следовательно, имеем отображение $\hat{T}$ между лучами $\boldsymbol{\Psi}_1$ и $\boldsymbol{\Psi}'_1$. Так как инвариантны только абсолютные значения, преобразование $\hat{T}$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}$ может быть унитарным или антиунитарным. Обе эти возможности реализуются в случае подпространства $\mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}$, векторы состояния которого наделены комплексной спинорной структурой, поскольку комплексное поле имеет два (и только два) автоморфизма, сохраняющих абсолютные значения: тождественный автоморфизм и комплексное сопряжение. Также обе эти возможности реализуются в подпространстве $\mathbf{H}^0_{\rm phys}$, поскольку в этом случае векторы состояния наделены вещественной спинорной структурой с кватернионным кольцом деления. В случае подпространства $\mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}$ имеем только унитарные преобразования $\hat{T}$, поскольку вещественная спинорная структура с вещественным кольцом деления допускает только тождественный автоморфизм.

Пусть $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$, ... — единичные векторы, выбранные из первой совокупности лучей $\boldsymbol{\Psi}_1$, $\boldsymbol{\Psi}_2$, ..., и пусть $|\Psi'_1\rangle$, $|\Psi'_2\rangle$, ... — единичные векторы, выбранные из второй совокупности лучей $\boldsymbol{\Psi}'_1$, $\boldsymbol{\Psi}'_2$, ..., так что соответствие $|\Psi_1\rangle \leftrightarrow |\Psi'_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle \leftrightarrow |\Psi'_2\rangle$, ... является унитарным или антиунитарным. Первый набор соответствует состояниям $\{\omega\}$, а второй набор соответствует преобразованным состояниям $\{g\omega\}$. Выберем векторы $|\Psi_1\rangle \in \boldsymbol{\Psi}_1$, $|\Psi_2\rangle \in \boldsymbol{\Psi}_2$, ... и $|\Psi'_1\rangle \in \boldsymbol{\Psi}'_1$, $|\Psi'_2\rangle \in \boldsymbol{\Psi}'_2$, ... так что

$$|\Psi'_1\rangle = T_g\,|\Psi_1\rangle\,, \quad |\Psi'_2\rangle = T_g\,|\Psi_2\rangle\,, \quad \ldots \tag{5}$$

Это значит, что если $|\Psi_1\rangle$ — вектор, ассоциированный с лучом $\boldsymbol{\Psi}_1$, то $T_g\,|\Psi_1\rangle$ — вектор, ассоциированный с лучом $\boldsymbol{\Psi}'_1$. Если существуют два оператора T_g и $T_{g'}$ со свойством (5), то они могут отличаться только постоянным множителем, по модулю равным единице. Следовательно,

$$T_{gg'} = \phi(g,g')T_gT_{g'}, \tag{6}$$

где $\phi(g,g')$ — фазовый множитель. Представления вида (6) называются *лучевыми (проективными) представлениями*. Это означает также, что имеет место соответствие между физическими состояниями и лучами гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$. Отсюда следует, что лучевое представление T *топологической группы* G является непрерывным гомоморфизмом $T:\ G \rightarrow L(\hat{H})$, где $L(\hat{H})$ — множество линейных операторов в проективном пространстве $\hat{H}$ с фактортопологией относительно отображения $\hat{H} \rightarrow \mathbf{H}_{\rm phys}$, т.е. $|\Psi\rangle \rightarrow \boldsymbol{\Psi}$. Однако при $\phi(g,g') \neq 1$ мы не можем непосредственно применить математическую теорию обычных представлений (в силу неоднозначности фазы). С целью обойти это препятствие построим более широкую группу $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ таким образом, что обычные представления группы $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ дадут все неэквивалентные лучевые представления (6) группы G. Эта задача может быть решена посредством *подъёма* проективных представлений группы G в обычные представления группы $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ — абелева группа, порождаемая умножением неэквивалентных фаз $\phi(g,g')$, удовлетворяющих условию

$$\phi(g,g')\phi(gg',g'') = \phi(g',g'')\phi(g,g'g'').$$

Рассмотрим пары (ϕ,x), где $\phi \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$, $x \in G$, в частности, $\boldsymbol{\mathcal{K}} = \{(\phi,e)\}$, $G = \{(e,x)\}$. Пары (ϕ,x) образуют группу с законом умножения типа полупрямого произведения: $(\phi_1,x_1)(\phi_2,x_2) = (\phi_1\phi(x_1,x_2)\phi_2, x_1x_2)$. Группа $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{(\phi,x)\}$ называется *центральным расширением* группы G посредством группы $\boldsymbol{\mathcal{K}}$. Векторные представления группы $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ содержат все лучевые представления группы G. Следовательно, группа симметрии G физической системы индуцирует представление T обратимых отображений пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$ на себя, которое является унитарным или антиунитарным и является представлением центрального расширения $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ группы G либо группы, накрывающей группу G.

На уровне физического гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$ под группой симметрии G будем понимать группу из последовательности унитарных унимодулярных групп: $\mathrm{SU}_T(2)$ (группа изоспина), $\mathrm{SU}(3)$, ..., $\mathrm{SU}(N)$, ... (группы так называемых «внутренних» симметрий). Согласно Гейзенбергу, группы $\mathrm{SU}(N)$ определяют *динамические (**вторичные**) симметрии*. Таким образом, в соответствии с двухуровневой структурой гильбертова пространства элементарной частицы (единичной квантовой микросистемы), задаваемой парой $(\mathsf{H}_\infty, \mathbf{H}_{\mathrm{phys}})$, все множество групп симметрий G разбивается на два класса: 1) *группы фундаментальных (первичных) симметрий* G_f, участвующих в образовании векторов состояния квантовой микросистемы; 2) *группы динамических (вторичных) симметрий* G_d, описывающие приближенные симметрии между векторами состояния квантовой системы[8].

2.2.2. Принцип редукции

Итак, динамические симметрии G_d связывают между собой различные состояния квантовой системы (векторы состояния $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$). Симметрия G_d квантовой системы может быть представлена как квантовый *переход* между её состояниями (уровнями спектра материи). Например, если взять барионы и пренебречь лептонами и мезонами, то реакция $N \to Pe^-\nu$, в которой нейтрон распадается на протон, электрон и нейтрино, может рассматриваться как переход $N \to P$, реакция $\Sigma^- \to N\pi^-$ как переход $\Sigma \to N$ и т.д. При этом предполагается, что представляющие операторы комплексной оболочки алгебры Ли группы G_d осуществляют все возможные квантовые переходы системы. Например, если $G_d = \mathrm{SU}(3)$, то операторы Окубо $\mathbf{A}^\sigma_\tau$ переводят друг в друга состояния (частицы) октета. Естественно считать, что операторы группы G_d или её подгруппы соединяют между собой родственные состояния. Цепочка вложенных подгрупп приводит к иерархической классификации состояний.

Динамическая симметрия задаётся цепочкой вложенных в друг друга групп Ли:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k.$$

Система с данной динамической симметрией задаётся неприводимым унитарным представлением $\mathfrak{P}$ группы G в физическом гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$. Редукция G/G_1 представления $\mathfrak{P}$ группы G по подгруппе G_1 приводит к разложению $\mathfrak{P}$ в ортогональную сумму неприводимых представлений $\mathfrak{P}^{(1)}_i$

---

[8] Согласно Вигнеру [26], квантовая система, описываемая неприводимым унитарным *представлением* группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, называется элементарной частицей. С другой стороны, в согласии с $\mathrm{SU}(3)$-теорией элементарная частица описывается *вектором* неприводимого представления группы $\mathrm{SU}(3)$. Например, в так называемом «восьмеричном пути» Гелл-Манна–Неемана [27] адроны (барионы и мезоны) представлены векторами восьмимерного регулярного представления $\mathrm{Sym}^0_{(1,1)}$ группы $\mathrm{SU}(3)$. Таким образом, имеем две взаимно исключающие друг друга интерпретации элементарной частицы: как *представления* группы $\mathcal{P}$ и как *вектора* представления группы $\mathrm{SU}(3)$. Это противопоставление исчезает, если принять, что все «элементарные частицы» суть локализованные состояния (уровни) спектра материи, реализованного посредством физического гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$, векторы состояния которого задаются циклическими представлениями операторной алгебры (оператора энергии H). На этом уровне описания группа $\mathrm{SU}(3)$, задаваемая в $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$ посредством центрального расширения, описывает динамические (приближенные) симметрии между различными состояниями (как будет показано ниже, между состояниями из различных когерентных подпространств в $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$).

подгруппы G_1:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{(1)} \oplus \mathfrak{P}_2^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{P}_i^{(1)} \oplus \ldots .$$

В свою очередь редукция G_1/G_2 представления группы G_1 по подгруппе G_2 приводит к разложению представлений $\mathfrak{P}_i^{(1)}$ на неприводимые представления $\mathfrak{P}_{ij}^{(2)}$ группы G_2:

$$\mathfrak{P}_i^{(1)} = \mathfrak{P}_{i1}^{(2)} \oplus \mathfrak{P}_{i2}^{(2)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{P}_{ij}^{(2)} \oplus \ldots$$

и т.д.[9]

3. Когерентные подпространства

В этом параграфе продолжим исследование структуры физического гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$. Как известно [30], не все единичные лучи являются физически реализуемыми. Существуют физические ограничения (*правила суперотбора*) на выполнение принципа суперпозиции. В 1952 г. Вигнер, Уайтман и Вик [30] показали, что существование правил суперотбора связано с измеримостью относительной фазы суперпозиции. Это означает, что чистое состояние не может быть реализовано в виде суперпозиции некоторых состояний, например, не существует чистого состояния (когерентной суперпозиции) из бозонного $|\Psi_b\rangle$ и фермионного $|\Psi_f\rangle$ состояний (правило суперотбора по спину). Однако, если в $\mathbf{H}_{\rm phys}$ определена матрица плотности ρ, то суперпозиция $|\Psi_b\rangle + |\Psi_f\rangle$ определяет смешанное состояние.

Теорема 1. *Физическое гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\rm phys}$ разлагается в прямую сумму (ненулевых) когерентных подпространств*

$$\mathbf{H}_{\rm phys} = \mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys} \bigoplus \mathbf{H}^{0}_{\rm phys} \bigoplus \mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}, \qquad (7)$$

где

$$\mathbf{H}^{Q}_{\rm phys} = \bigoplus_{s=-|l-\dot{l}|}^{|l-\dot{l}|} \mathbf{H}^{2|s|+1} \otimes \mathbf{H}^{Q} \otimes \mathbf{H}_{\infty}, \quad Q = \{\pm, 0, \overline{0}\}. \qquad (8)$$

При этом принцип суперпозиции имеет место в ограниченной форме, т.е. в пределах когерентных подпространств. Ненулевая линейная комбинация векторов чистых состояний есть вектор чистого состояния при условии, что все исходные векторы лежат в одном и том же когерентном подпространстве. Суперпозиция векторов чистых состояний из различных когерентных подпространств определяет смешанное состояние.

[9]Например, один из базовых супермультиплетов SU(3)-теории (барионный октет $F_{1/2}$), основанный на восьмимерном регулярном представлении $\mathrm{Sym}^0_{(1,1)}$, допускает следующую SU(3)/SU(2)-редукцию на изотопические мультиплеты подгруппы SU(2): $\mathrm{Sym}^0_{(1,1)} = \Phi_3 \oplus \Phi_2 \oplus \overset{*}{\Phi}_2 \oplus \Phi_0$, где Φ_3 — триплет, Φ_2 и $\overset{*}{\Phi}_2$ — дублеты, Φ_0 — синглет. Аналогично, для гипермультиплетов SU(6)-теории (56-плет барионов и 35-плет мезонов) имеют место SU(6)/SU(3)- и SU(6)/SU(4)-редукции, где SU(4) — подгруппа Вигнера [28, 29].

Доказательство. Исходным пунктом доказательства является соответствие $\omega_\Phi(H) \leftrightarrow |\Psi\rangle$ между состояниями операторной алгебры и базисными векторами пространства $\mathbf{H}_{\text{phys}}$. Как было показано в п. 2.1, множество всех чистых состояний $PS(\mathfrak{A})$ операторной алгебры $\mathfrak{A}$ разбивается на попарно непересекающиеся и взаимно ортогональные секторы в силу отношения эквивалентности $\omega_1 \sim \omega_2$, которые совпадают с классами эквивалентности в $PS(\mathfrak{A})$ (по сути сектор является алгебраическим двойником когерентного подпространства). Далее, пусть некоторое множество векторов в физическом гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\text{phys}}$, содержащее чистые состояния алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$, образует тотальное множество в $\mathbf{H}_{\text{phys}}$, т.е. такое множество X, замыкание линейной оболочки которого всюду плотно в $\mathbf{H}_{\text{phys}}$. Тогда X нельзя представить в виде объединения двух (или более) непустых взаимно ортогональных подмножеств. Будем говорить, что векторы $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle \in X$ связаны соотношением $|\Psi_1\rangle \sim |\Psi_2\rangle$, если $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$ принадлежат линейной оболочке из X. Легко видеть, что соотношение $|\Psi_1\rangle \sim |\Psi_2\rangle$ индуцируется соотношением эквивалентности $\omega_1 \sim \omega_2$ из $PS(\mathfrak{A})$. Следовательно, отношение $|\Psi_1\rangle \sim |\Psi_2\rangle$ есть отношение эквивалентности и классы эквивалентности в X образуют разбиение X на взаимно ортогональные системы X_ν, где $\{\nu\} = N$ — некоторое семейство индексов. Взяв теперь в качестве $\mathbf{H}^\nu_{\text{phys}}$ замкнутую линейную оболочку множества X_ν, мы приходим к искомому разложению $\mathbf{H}_{\text{phys}}$ в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств $\mathbf{H}^\nu_{\text{phys}}$:

$$\mathbf{H}_{\text{phys}} = \bigoplus_{\nu \in N} \mathbf{H}^\nu_{\text{phys}}.$$

Таким образом, чистые состояния находятся во взаимно однозначном соответствии с единичными лучами в $\cup_\nu \mathbf{H}^\nu_{\text{phys}}$. Отсюда следует ограниченная форма принципа суперпозиции (а именно, в пределах подпространств $\mathbf{H}^\nu_{\text{phys}}$). Очевидно, что три базовых подпространства $\mathbf{H}^\pm_{\text{phys}}$, $\mathbf{H}^0_{\text{phys}}$ и $\mathbf{H}^{\overline{0}}_{\text{phys}}$ являются когерентными подпространствами (относительно заряда) исходного физического пространства $\mathbf{H}_{\text{phys}}$, отсюда следует разложение (7). Дальнейшее разложение $\mathbf{H}_{\text{phys}}$ на когерентные подпространства осуществляется относительно спина, т.е. относительно составляющей $\mathbf{H}^S$ в $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ (формула (8)). ■

Пример. Согласно современным данным, нейтрино является суперпозицией трёх массовых нейтринных состояний: электронного, мюонного и τ-лептонного нейтрино. Все три состояния лежат в когерентных подпространствах $\mathbf{H}^2 \otimes \mathbf{H}^0 \otimes \mathbf{H}_\infty$, которые принадлежат линии спина 1/2 базового подпространства $\mathbf{H}^0_{\text{phys}}$ (подпространство нейтральных состояний). Все три нейтринных уровня спектра материи, принадлежа одному и тому же когерентному подпространству, тем не менее, отличаются друг от друга значением энергии, что характеризуется различным расположением соответствующих представлений на линии спина 1/2.

3.1. Калибровочные симметрии

Пусть в $\mathbf{H}_{\rm phys}$ определена (посредством центрального расширения) связная компактная n-параметрическая абелева группа $G = U(1)^n \equiv U(1) \times \ldots U(1)$ (*калибровочная группа*). Произвольный элемент этой группы представляется набором n фазовых множителей:

$$g(s_1, \ldots, s_n) \equiv (e^{i\alpha_1}, \ldots, e^{i\alpha_n}), \quad 0 \leqslant \alpha_j < 2\pi.$$

В пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}$ зададим точное унитарное представление $\mathfrak{U}$ группы G. Соответствующие калибровочные преобразования в $\mathbf{H}_{\rm phys}$ имеют вид

$$\mathfrak{U}(g) = s_1^{Q_1} \ldots s_n^{Q_n} \equiv e^{i(\alpha_1 Q_1 + \ldots + \alpha_n Q_n)}.$$

Генераторы Q_1, ..., Q_n калибровочных преобразований являются взаимно коммутирующими самосопряжёнными операторами с целочисленным спектром (они называются *зарядами*, соответствующими данной калибровочной группе). Тогда $\mathbf{H}_{\rm phys}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbf{H}_{\rm phys} = \bigoplus_{q_1,\ldots,q_n \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}_{\rm phys}(q_1, \ldots, q_n) \tag{9}$$

соответствующих спектральных подпространств, состоящих из всех векторов $|\Psi\rangle$ таких, что $(Q_j - q_j)\,|\Psi\rangle = 0$, $j = 1, \ldots, n$. При этом произвольный ненулевой вектор $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$ определяет чистое состояние алгебры наблюдаемых в точности тогда, когда он является собственным вектором для всех зарядов. Таким образом, в $\mathbf{H}_{\rm phys}$ задаются *стандартные правила суперотбора*, причём (9) есть разложение $\mathbf{H}_{\rm phys}$ в прямую сумму когерентных подпространств $\mathbf{H}_{\rm phys}(q_1, \ldots, q_n)$[10]. Согласно современному состоянию в физике элементарных частиц правила суперотбора могут быть довольно полно описаны электрическим Q $(= Q_1)$, барионным B $(= Q_2)$ и лептонным L $(= Q_3)$ зарядами, так что разложение на когерентные подпространства имеет вид

$$\mathbf{H}_{\rm phys} = \bigoplus_{q,b,\ell \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}_{\rm phys}(q, b, \ell).$$

[10]В настоящее время популярна гипотеза о существовании строгой (калибровочной) *неабелевой* SU(3)-симметрии, называемой *цветной* SU(3). Рассмотрение такой симметрии призвано объяснить, почему с точки зрения модели кварков все наблюдаемые адроны являются связанными состояниями либо трёх кварков, либо кварка и антикварка. Ненарушенность «цветной симметрии» ответственна по этим представлениям за то, что свободные кварки и (цветные) глюоны не наблюдаются (конфайнмент). Здесь по умолчанию предполагается, что кварки не являются исключительно математическими объектами (например, как спиноры), а обладают некоторой «реальностью», хотя и ненаблюдаемой в опыте. Однако, прежде всего, кварки математически — это векторы фундаментального представления группы SU(3), а кварковая модель является производной конструкцией от динамической (приближенной) SU(3)-симметрии (по так называемому *аромату*). Более того, все основные факты SU(3)- и SU(6)-теорий, касающиеся систематизации адронных спектров, могут быть получены без использования кварковой гипотезы (см. [28]). Кроме того, следует добавить, что открытие экзотических барионов (пентакварков) поставило под сомнение фундаментальность цветной SU(3)-симметрии.

Разложение физического гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}$ на когерентные подпространства относительно заряда и спина даётся формулой (7) (теорема 1). С целью описать весь спектр наблюдаемых состояний (уровней спектра материи) введём 2-параметрическую калибровочную группу $G = U(1)^2 \equiv U(1) \times U(1)$ относительно барионного B и лептонного L зарядов. Тогда разложение $\mathbf{H}_{\rm phys}$ на когерентные подпространства имеет вид:

$$\mathbf{H}_{\rm phys} = \bigoplus_{b,\ell\in\mathbb{Z}} \left[\mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}(b,\ell) \bigoplus \mathbf{H}^{0}_{\rm phys}(b,\ell) \bigoplus \mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}(b,\ell)\right], \qquad (10)$$

где

$$\mathbf{H}^{Q}_{\rm phys}(b,\ell) = \bigoplus_{s=-|l-\dot{l}|}^{|l-\dot{l}|} \mathbf{H}^{2|s|+1} \otimes \mathbf{H}^{Q}(b,\ell) \otimes \mathbf{H}_{\infty}, \quad Q = \{\pm, 0, \overline{0}\}.$$

Разложение (10) позволяет охватить практически весь наблюдаемый спектр состояний (см. Particle Data Group). Прежде всего, спектр материи подразделяется на три сектора: лептонный, мезонный и барионный секторы. Лептонный сектор включает в себя заряженные лептоны: электрон e^-, мюон μ^-, τ^--лептон (и их античастицы). Все заряженные лептоны принадлежат когерентным подпространствам вида $\mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}(0,\ell)$. Нейтральные лептоны (три сорта нейтрино) принадлежат когерентному подпространству $\mathbf{H}^{0}_{\rm phys}(0,\ell)$. Лептонный сектор также включает в себя одно истинно нейтральное состояние: фотон γ (подпространство $\mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}(0,\ell)$). В отличие от лептонного сектора, мезонный и барионный секторы (адронный сектор в совокупности) включают в себя огромное множество состояний (частиц). Мезонный сектор разбивается относительно заряда на три множества когерентных подпространств. Во-первых, заряженные мезоны ($\pi^{\pm}$ (пионы), $K^{\pm}$ (каоны), $\rho^{\pm}$, $\ldots$) принадлежат когерентным подпространствам вида $\mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}(0,0)$ с целым спином (все мезоны имеют целый спин). Далее, нейтральные мезоны (K^0, $\overset{*}{K}{}^0$, $\ldots$) принадлежат подпространствам $\mathbf{H}^{0}_{\rm phys}(0,0)$ целого спина. В свою очередь, истинно нейтральные мезоны (π^0, η, φ, ρ^0, $\ldots$) являются состояниями, принадлежащими когерентному подпространству $\mathbf{H}^{\overline{0}}_{\rm phys}(0,0)$. Барионный сектор разбивается относительно заряда на два множества когерентных подпространств: заряженные барионы (p (протон), $\Sigma^{\pm}$, $\Xi^{\pm}$, $\ldots$) образуют подпространства вида $\mathbf{H}^{\pm}_{\rm phys}(b,0)$ с полуцелым спином (все барионы имеют полуцелый спин); нейтральные барионы (n (нейтрон), Σ^0, Ξ^0, $\ldots$) являются состояниями из когерентных подпространств вида $\mathbf{H}^{0}_{\rm phys}(b,0)$ полуцелого спина. Истинно нейтральные барионы (майорановские фермионы) до сих пор не обнаружены в природе.

В заключении следует отметить, что добавление калибровочных симметрий приводит к тройственному разделению симметрий спектра материи (не частиц, как это имеет место в стандартной модели, а симметрий). А именно, фундаментальные симметрии G_f участвуют в образовании чистых состояний (лучей) квантовой системы и соответствующих когерентных подпространств в $\mathbf{H}_{\rm phys}$, динамические симметрии G_d описывают переходы между состояниями из различных когерентных подпространств, калибровочные симметрии G_g связывают чистые состояния внутри когерентных подпространств.

Литература

1. Гейзенберг В. Природа элементарных частиц // УФН. 1977. Т. 121. С. 657–668.
2. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
3. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
4. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons // Z. Phys. 1927. V. 43. P. 601–623.
5. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики. М. : Мир, 1968.
6. Birkhoff G., von Neumann J. The logic of quantum mechanics // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 823–843.
7. Mackey G.W. Quantum mechanics and Hilbert space // Amer. Math. Monthly. 1957. V. 64. P. 45–57.
8. Фок В.А. Об интерпретации квантовой механики // УФН. 1957. Т. 62. С. 461–474.
9. Варламов В.В. Комплексный момент и спин-зарядовое гильбертово пространство // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 5–22.
10. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987.
11. Segal I.E. Irreducible representations of operator algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. V. 53. P. 73–88.
12. Born M., Heisenberg W., Jordan P., Zur Quantenmechanik. II // Zs. Phys. 1926. V. 35. P. 557–615.
13. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001.
14. Варламов В.В. Спинорная структура и SU(3)-симметрия // Математические структуры и моделирование. 2015. № 1(33). С. 18–33.
15. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 3533–3576; arXiv:1409.1400 [math-ph] (2014).
16. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 7. С. 114–127.
17. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168; arXiv:math-ph/0405040 (2004).
18. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516; arXiv: 1401.7723 [math-ph](2014).
19. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805; arXiv:math-ph/0009026 (2000).
20. Varlamov V.V. The CPT Group in the de Sitter Space // Annales de la Fondation Louis de Broglie. 2004. V. 29. P. 969–987; arXiv:math-ph/0406060 (2004).
21. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191; arXiv:math-ph/0508050 (2005).
22. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // Int. J. Theor. Phys. 2012. V. 51. P. 1453–1481; arXiv: 1107.4156 [math-ph] (2011).

23. Varlamov V.V. Cyclic structures of Cliffordian supergroups and particle representations of $\mathbf{Spin}_+(1,3)$ // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2014. V. 24. P. 849–874; arXiv: 1207.6162 [math-ph] (2012).
24. Варламов В.В. Спинорная структура и периодичность алгебр Клиффорда // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 4–20.
25. Дирак П.А.М. Лекции по квантовой теории поля. М. : Мир, 1971.
26. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.
27. Gell-Mann M., Ne'eman Y. The Eightfold Way. Benjamin, New York, 1964.
28. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970.
29. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.
30. Wick G.G., Wigner E.P., Wightman A.S. Intrinsic Parity of Elementary Particles // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 101.

HEISENBERG'S MATTER SPECTRUM IN ABSTRACT-ALGEBRAIC APPROACH

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University

Abstract. An algebraic structure of matter spectrum is studied. It is shown that a basic mathematical construction in the ground of matter spectrum is a two-level Hilbert space. Two-level structure of the Hilbert space is defined by the following pair: 1) separable Hilbert space with operator algebras and fundamental symmetries; 2) nonseparable (physical) Hilbert space with dynamical and gauge symmetries, that is, a space of states (energetic levels) of the matter spectrum. A decomposition of the physical Hilbert space onto coherent subspaces is given. This decomposition allows one to describe the all observed spectrum of the states on an equal footing, including lepton, meson and baryon sectors of the matter spectrum.

Keywords: matter spectrum, Hilbert space, coherent subspaces, superposition principle, reduction principle, symmetries.