

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 1(41)
2017**



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 1(41)

Омск
2017

Математические структуры и моделирование. — Омск : Омский государственный университет, 2017. — № 1(41). — 139 с.

ISSN 2222-8772 (print)

ISSN 2222-8799 (online)

Редакционная коллегия

- А. К. Гуц** — главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** — ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** — технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- С. В. Белим** — д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой информационной безопасности, проректор по научной работе, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- А. Ю. Веснин** — д.ф.-м.н., профессор Новосибирского государственного университета, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией прикладного анализа, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.
- В. П. Голубятников** — доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** — доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
- А. Г. Гринь** — доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. А. Еровенко** — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** — Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** — канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- П. А. Корчагин** — доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ).
- V. Kreinovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- A. A. Fedorenko** — Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- A. Jadczyk** — Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-57908 от 28 апреля 2014 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Россия, Омская обл., г. Омск, пр. Мира д. 55А.

Дата выхода в свет: 30.03.2017.

Тираж 100 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
и
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

- А.Г. Гринь. *О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин* 5
- И.А. Еганова, В. Каллис. *Временная структура сложных систем: методический обзор* 12
- А.Н. Романов. *О связи компактности и причинности* 26

Прикладная математика и моделирование

- В.Н. Бородихин. *Критическое поведение двумерной неупорядоченной модели Изинга с деформированной статистикой* 30
- Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Климаксный лес как нэшевское равновесное состояние лесных экосистем* 38
- С.Л. Дерябин, А.С. Кирьянова. *Обобщение центрированной волны Римана при учёте силы тяжести* 45
- А.В. Еремеев, К.Р. Ривс. *О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов* 55
- Д.Н. Лавров, А.А. Кондюрина. *Определение траектории движения приёмника системы обнаружения несанкционированно установленной точки беспроводного доступа* 75
- А.В. Лисин, К.С. Яковенко. *Гибридные схемы решения задач условной оптимизации с использованием метаэвристик* 88
- Н.С. Новаковский. *Комбинированный метод расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса* .. 93
- И.Е. Полосков. *Численно-аналитическая схема применения матричной функции Грина для анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных уравнений* 103
- О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Why Most Bright Stars Are Binary But Most Dim Stars Are Single: A Simple Qualitative Explanation* 119

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



O. Kosheleva, V. Kreinovich. *When Invading, Cancer Cells Do Not Divide: A Geometric (Symmetry-Based) Explanation of an Empirical Observation*123

O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Yes- and No-Gestures Explained by Symmetry*128

Компьютерные науки

F. Zapata and V. Kreinovich. *Why Pairwise Testing Works So Well: A Possible Theoretical Explanation of an Empirical Phenomenon*131

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь

профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия для сходимости распределений симметрических функций от случайных величин к нормальному закону. Эти условия включают в себя и так называемые минимальные условия слабой зависимости.

Ключевые слова: Симметрические функции от случайных величин, центральная предельная теорема, минимальные условия слабой зависимости.

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность. Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ [1, с. 393].

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, $\sigma_n^2 = \mathbf{D}S_n \rightarrow \infty$, а $\mathcal{N}(0, 1)$ – случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$\sigma_n^{-1} (S_n - \mathbf{E}S_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

то говорят, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ , если $b_{[x]}$, $x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ , где $[x]$ – целая часть x . Через $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию (R), если при любом действительном t и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$

$$\mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_{n+m}\} - \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_n\} \cdot \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_m\} \rightarrow 0, \quad (\text{R})$$

$n \rightarrow \infty$ (для краткости будем говорить, что соотношение (R) выполняется при $n + m \rightarrow \infty$). В соответствии с определением слабой эквивалентности условие

(R) можно записать так:

$$\frac{S_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{\hat{S}_n}{\sigma_{n+m}} + \frac{\hat{S}_m}{\sigma_{n+m}}, \quad n+m \rightarrow \infty.$$

В работе [3] получен следующий результат

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — стационарная последовательность и пусть $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Для того чтобы к последовательности $\{\xi_n\}$ была применима центральная предельная теорема и σ_n являлась правильно меняющейся функцией порядка $1/2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R), и последовательность $\{\sigma_n^{-2}S_n^2\}$ была равномерно интегрируема.

Замечание 1. Теорема 1 интерпретировалась так: условие (R) является минимальным условием слабой зависимости, при котором справедлива центральная предельная теорема с правильно меняющейся порядка 1 дисперсией.

В настоящей работе доказан аналогичный результат для центральной предельной теоремы, в которой вместо сумм S_n участвуют симметрические функции $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f , то есть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, \dots, i_n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Пусть $X_n = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$, $a_n = \mathbf{E}X_n$, $n = 1, 2, \dots$, $b_n^2 = \mathbf{D}X_n \rightarrow \infty$. Если

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \stackrel{d}{\rightarrow} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию (R_f) , если

$$\mathbf{E} \exp\{itb_{n+m}^{-1}X_{n+m}\} - \mathbf{E} \exp\{itb_{n+m}^{-1}X_n\} \cdot \mathbf{E} \exp\{itb_{n+m}^{-1}X_m\} \rightarrow 0, \quad (R_f)$$

$n+m \rightarrow \infty$. Ясно, что условие (R_f) можно записать так:

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{\hat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\hat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n+m \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Если b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ и $\gamma_n = b_{n+m}^{-1}(a_n + a_m - a_{n+m}) \rightarrow 0$, $n+m \rightarrow \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N).

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — стационарная последовательность и пусть $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$. Для того чтобы к последовательности $\{X_n\}$ была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки (N), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R_f) и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ была равномерно интегрируема.

Доказательство теоремы приводятся ниже.

Замечание 2. Несмотря на почти абсолютную схожесть теорем 1 и 2, между ними имеется существенное отличие. Оно заключается в том, что условие (R_f) является не только условием слабой зависимости, но и накладывает значительные ограничения на вид функции f , заключающиеся по сути в том, что распределения функций $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ слабо эквивалентны распределениям сумм некоторых независимых случайных величин. Однако центральная предельная теорема с условиями нормировки (N) может иметь место только при этих ограничениях.

Пример 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых величин и $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_i^2 < \infty$.

$$\begin{aligned} X_n &= f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} (\xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_{n-k}}) = \\ &= S_n - \min_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (\xi_{j_1} + \dots + \xi_{j_k}). \end{aligned}$$

Если $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i^2$, то

$$\mathbf{E}Y_n = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y_n \geq x\} dx \leq \sqrt{n} + n \int_{\sqrt{n}}^\infty \mathbf{P}\{\xi_1^2 \geq x\} dx = o(n),$$

так что если $k = k(n) \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то

$$\mathbf{E} \left(\min_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (\xi_{j_1} + \dots + \xi_{j_k}) \right)^2 \leq k^2 \mathbf{E}Y_n = o(n\sigma^2) = o(\mathbf{E}S_n^2),$$

поэтому $X_n \stackrel{d}{\sim} S_n$, $n \rightarrow \infty$, условие (R_f) (совпадающее с условием (R)) и центральная предельная теорема выполняются.

Если же, скажем, $k = n - 1$, $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$, то ни при каком выборе нормирующих постоянных a_n и b_n предельное распределение $b_n^{-1}(X_n - a_n)$ не может быть нормальным (то есть, не может выполняться центральная предельная теорема и, следовательно, условие (R_f)). Это следует из известных результатов Б.В. Гнеденко о предельных распределениях максимумов независимых случайных величин (см., например [4]).

Следующая лемма доказана в [3].

Лемма 1. b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ (а b_n^2 — правильно меняющейся последовательностью порядка 1) тогда и только тогда, когда

$$b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2, \quad n + m \rightarrow \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, то есть при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \exp\{itb_n^{-1}(X_n - a_n)\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

и выполнены условия нормировки (N). Так как

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad b_n^{-2}\mathbf{E}(X_n - a_n)^2 = 1 = \mathbf{E}\mathcal{N}^2(0, 1), \quad b_n^{-2}(X_n - a_n)^2 \geq 0,$$

то равномерная интегрируемость последовательности $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ следует, например, из теоремы 5.4 в [5].

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= |\mathbf{E} \exp\{itb_{n+m}^{-1}X_{n+m}\} - \mathbf{E} \exp\{itb_{n+m}^{-1}X_n\}\mathbf{E} \exp\{itb_{n+m}^{-1}X_m\}| = \\ &= \left| \mathbf{E} \exp\left\{it\frac{X_{n+m} - a_{n+m}}{b_{n+m}}\right\} - \mathbf{E} \exp\left\{it\frac{X_n - a_n}{b_{n+m}}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{it\frac{X_m - a_m}{b_{n+m}}\right\} \exp\{it\gamma_n\} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку b_n^2 — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq c \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$b_{n_2+m_2}^{-2}b_{n_2}^2 \rightarrow c, \quad b_{n_2+m_2}^{-2}b_{m_2}^2 \rightarrow 1 - c, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ ($c = 1$), то при $n \rightarrow \infty$

$$b_{n_2+m_2}^{-1}(X_{n_2} - a_{n_2}) \rightarrow 0 \quad (b_{n_2+m_2}^{-1}(X_{m_2} - a_{m_2}) \rightarrow 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\left\{it\frac{X_{n_2+m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} &\sim \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\} \sim \\ &\sim \mathbf{E} \exp\left\{it\frac{X_{n_2} - a_{n_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} \cdot \mathbf{E} \exp\left\{it\frac{X_{m_2} - a_{m_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} \exp\{it\gamma_{n_2}\}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то есть снова $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то есть выполнено условие (R).

Достаточность. Пусть выполнено условие (R_f) и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема. В силу известной теоремы Прохорова (см., например, [5]) последовательность $\{b_n^{-1}(X_n - a_n)\}$ является относительно

компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$, $n_1 = n_1(n)$ такую, что при $n \rightarrow \infty$

$$b_{n_1}^{-1}(X_{n_1} - a_{n_1}) \xrightarrow{d} \xi, \quad b_{m_1}^{-1}(X_{m_1} - a_{m_1}) \xrightarrow{d} \eta, \quad b_{n_1+m_1}^{-1}(X_{n_1+m_1} - a_{n_1+m_1}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad (4)$$

где $m_1 = m(n_1)$, а ξ, η и ζ – случайные величины. При этом, поскольку последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E}\xi^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}b_{n_1}^{-1}(X_{n_1} - a_{n_1})^2 = 1, \quad \mathbf{E}\eta^2 = \mathbf{E}\zeta^2 = 1, \quad \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\zeta = 0. \quad (5)$$

Из ограниченных последовательностей

$$\alpha_{n_1} = \frac{b_{n_1}}{\sqrt{b_{n_1}^2 + b_{m_1}^2}}, \quad \beta_{n_1} = \frac{b_{m_1}}{\sqrt{b_{n_1}^2 + b_{m_1}^2}}$$

выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_2}\}$ и $\{\beta_{n_2}\}$ такие, что

$$\alpha_{n_2} \rightarrow \alpha, \quad \beta_{n_2} \rightarrow \beta, \quad n \rightarrow \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (6)$$

Тогда

$$\frac{\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - a_{n_2} - a_{m_2}}{\sqrt{b_{n_2}^2 + b_{m_2}^2}} = \alpha_{n_2} b_{n_2}^{-1}(\widehat{X}_{n_2} - a_{n_2}) + \beta_{n_2} b_{m_2}^{-1}(\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2}) \xrightarrow{d} \alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta}. \quad (7)$$

Понятно, что $\alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (1), (6) и (7)

$$b_{n_2+m_2}^{-1}(\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - a_{n_2+m_2}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [1, с. 216] из (9) и (10) вытекает

$$b_{n_2+m_2}^{-1} \sqrt{b_{n_2}^2 + b_{m_2}^2} \rightarrow C, \quad 0 < C < \infty.$$

Отсюда с помощью (9) выводим, что вместе с последовательностями $\{b_{n_2}^{-2}(X_{n_2} - a_{n_2})^2\}$ и $\{b_{m_2}^{-2}(X_{m_2} - a_{m_2})^2\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{b_{n_2+m_2}^{-2}(\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - a_{n_2} - a_{m_2})^2\}$ и из (10) получаем теперь

$$\gamma_{n_2} = b_{n_2+m_2}^{-1}(a_{n_2+m_2} - a_{n_2} - a_{m_2}) \rightarrow \mathbf{E}\zeta = 0,$$

$$\delta_{n_2} = b_{n_2+m_2}^{-2}(b_{n_2}^2 + b_{m_2}^2) \rightarrow \mathbf{E}\zeta^2 = 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\gamma_{n_2} \rightarrow 0$, $\delta_{n_2} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $\gamma_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, и в силу леммы 1 выполнены условия нормировки (N).

Пусть теперь выполнены условия (N) и (R_f). Представим произвольное натуральное n в виде $n = km + r$, $m < n$, $0 \leq r < m$, $k = [n/m]$. Тогда если $k = k(n) \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то в силу (1)

$$X_n \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k Y_j + Z_n,$$

где Y_1, \dots, Y_k, Z_n – независимые случайные величины, $Y_j \stackrel{d}{=} f(\xi_{(j-1)m+1}, \dots, \xi_{jm}) \stackrel{d}{=} X_m$, $j = 1, \dots, k$, $Z_n \stackrel{d}{=} f(\xi_{km+1}, \dots, \xi_{km+r}) \stackrel{d}{=} X_r$, откуда с помощью условия (N) получаем

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k b_n^{-1}(Y_j - a_m) + b_n^{-1}(Z_n - a_r). \quad (9)$$

Правильно меняющаяся функция положительного порядка эквивалентна неубывающей функции [2, с.26], так что

$$\sup_{m \geq 1} \max_{1 \leq r \leq m} b_r^2 b_m^{-2} < \infty,$$

поэтому $(\sqrt{k}b_m)^{-1}(Z_n - a_r) \rightarrow 0$, по вероятности, а если $k = k(n) \rightarrow \infty$ растёт достаточно медленно, то что $\sigma_n^2 \sim k\sigma_m^2$. Из (9) следует теперь

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k \frac{Y_j - a_m}{\sqrt{k}b_m}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Для того чтобы к последовательности серий $\left\{ \frac{Y_k - a_m}{\sqrt{k}b_m}, j = 1, \dots, k, n = 1, 2, \dots \right\}$ независимых случайных величин была применима центральная предельная теорема, достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{kb_m^2} \sum_{j=1}^k \mathbf{E}\{(Y_j - a_m)^2, |Y_j - a_m| > \varepsilon\sqrt{k}b_m\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя определение величин Y_j и равномерную интегрируемость последовательности $\{b_m^{-2}(X_m - a_m)^2\}$, получаем

$$L_n(\varepsilon) = \mathbf{E} \left\{ \frac{(X_m - a_m)^2}{b_m^2}, \frac{|X_m - a_m|}{b_m} > \varepsilon\sqrt{k} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что вместе с (11) даёт $b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985.
3. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.
4. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М. : Наука, 1984.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М: Наука, 1977.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SYMMETRIC FUNCTIONS OF THE DEPENDENT VARIABLES

A.G. Grin

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The necessary and sufficient conditions for convergence of distributions of symmetric functions of random variables to the normal law are obtained in this article. These conditions include the so-called minimal conditions of the weak dependence.

Keywords: Symmetric functions of random variables, central limit theorem, minimal conditions of the weak dependence.

Дата поступления в редакцию: 02.02.2017

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ: МЕТОДИЧЕСКИЙ ОБЗОР

И.А. Еганова¹

к.ф.-м.н., с.н.с. ИМ СО РАН, e-mail: eganova@math.nsc.ru

В. Каллис²

к.ф.-м.н., Dr.rer.nat., гл.н.с. ЛИТ ОИЯИ, e-mail: wkallies@jinr.ru

¹Институт математики им. С.Л. Соболева, Сибирское отделение РАН, Новосибирск,
Россия

²Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных
исследований, Дубна, Россия

Аннотация. Структура временного ряда, описывающего динамику ключевой характеристики внутреннего состояния сложной системы, рассматривается как соответствующая этой системе временная структура, которая задаёт способ её существования. На основе представления об информации, содержащейся во временной структуре, предлагается её математическое описание с помощью известных средств: среднего значения ключевой характеристики и её мгновенного отклонения от среднего значения. С этих позиций обнаруживается смысл функции, которую использовал Х. Хёрст в своём анализе временных рядов, описывающих динамику природных процессов и явлений, — она задаёт временную структуру, и её размах представляет собой размер временной структуры в охваченном наблюдениями периоде времени. Определяется размер элементов, составляющих структуру, и предлагается интерпретация эмпирического закона Хёрста как соотношения, описывающего количество структурных элементов в охваченном периоде времени. Эта интерпретация позволила предложить принципиально новый подход к объяснению так называемого феномена Хёрста (то, что значения показателя Хёрста больше $1/2$), а также его наблюдающиеся свойства на разном фактическом материале. В заключении кратко обсуждается принадлежность сложных, организованных систем к гармоническим системам (Ю.Г. Косарев, 1988 г.).

Ключевые слова: временные ряды, временная структура, метод R/S , нормированный размах Хёрста, показатель Хёрста, статистика R/S , статистика Хёрста, феномен Хёрста, эмпирический закон Хёрста.

1. Введение

Исторически сложилось так, что основы теоретической физики (теоретической механики) были заложены при работе с таким ключевым объектом как

«массивная точка», т. е. с телом, не имеющим внутренней структуры и пребывающим в одном и том же внутреннем состоянии. Это было естественным и уместным для того круга первоочередных физических задач, которые рассматривал Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии». Именно такому объекту соответствовала ньютоновская модель физической реальности — трехмерная, сугубо пространственная по своей сути. Временной аспект объективной реальности фактически исчез, он был элиминирован, поскольку время, как это было объявлено, отождествлялось с его чисто математическим по своей сути свойством — *длительностью* (см. [1, с. 30]). Укажем, что история элиминации времени была подробно препарирована в капитальном труде Дж. Уитроу «Естественная философия времени» [2].

Изменить чисто *пространственную* модель физической реальности на *пространственно-временную* заставили результаты экспериментальных и теоретических исследований другого ключевого объекта физики — «поля». 21 сентября 1908 года в своём знаменитом докладе «Пространство и время» Г. Минковский провозгласил в качестве математической модели физической реальности четырёхмерный Мир событий (пространство-время). В статье А.К. Гуца [3], которая была посвящена столетию Мира Минковского, достаточно подробно показано, как сложилось использование этой математической модели объективной реальности в физических исследованиях. Объективные и субъективные причины, которые тем не менее воспрепятствовали преодолению игнорирования временного аспекта и развитию экспериментальных исследований его физических свойств, проанализированы в первой главе монографии авторов [4, 5]. Зная их, понимаем, почему, когда в физике назрела актуальность исследования сложных систем и процессов, связанных с ними (таких как эволюция и самоорганизация), не возникло осознания целесообразности разработки математических подходов к описанию существования сложных систем¹ и прежде всего временного аспекта их существования. В теории по-прежнему доминировало чисто пространственное восприятие объективной реальности, поэтому пространственно-временная идеология не была востребована и применена при исследовании сложных систем (см., например, многоплановую монографию Г. Николиса и И. Пригожина [6]).

Соответственно, не было попыток ввести в классическую механику новый, современный ключевой объект (и адекватные ему системы) — многокомпонентные, структурированные системы, обладающие изменяющейся внутренней энергией. Основы такой механики были предложены только в 2014 году в монографии В.М. Сомсикова [7], где фактически заложены основы механики неравновесных систем, которая позволяет описать диссипативные процессы и эволюцию систем в рамках законов Ньютона. В отличие от классической механики механика неравновесных систем необратима.

В предлагаемой статье мы рассматриваем временную структуру сложных систем и углубляемся в её представления и математические закономерности. Обсуждается информация, которая должна содержаться во временной структуре

¹Т. е. систем, обладающих внутренней структурой и пребывающих в различных внутренних состояниях.

сложной системы. На этой основе предлагается описание временной структуры сложной системы с помощью известных математических средств, приводятся примеры использования её представлений, в том числе, даётся математическая интерпретация известного (см., например, [8]) эмпирического закона Хёрста. В результате делается вывод, что природные сложные системы относятся к классу гармонических систем, рассмотренных Ю.Г. Косаревым [9, 10].

2. Математическое описание временной структуры

Рассмотрим сложное тело, представляющее собой некоторую систему составляющих его элементов. Например, минерал или минеральный агрегат. Составляющие его композиции атомов и молекул находятся в определённых взаимосвязях, участвуют в непрерывном движении, так ли иначе могут реагировать на изменения во внешней среде, так что внутренняя энергия сложной системы может меняться.

Вещественная структура сложного тела описывается соответствующим ему геометрическим образом, точкам или областям которого сопоставляется информация об их вещественном составе и его физических характеристиках. Этот геометрический образ, наполненный физической информацией, представляет собой «пространственную структуру» тела, поскольку содержащаяся в нём определённая информация соотносена с пространственным аспектом объективной реальности и «подчиняется» ему. Наиболее ярко изучение пространственных структур демонстрируют обширные исследования на основе теории фракталов (фрактальной геометрии).

Способ существования сложной системы задаётся другой структурой — «временной» по сути. Она является дополнительной по отношению к пространственной структуре: в ней содержится информация, относящаяся к временному аспекту объективной реальности. Это информация, характеризующая существование данной системы, информация о законах и закономерностях, присущих ему. И поскольку последние определяют поведение ключевых, интегральных характеристик рассматриваемого объекта, эти характеристики могут служить «строительным материалом» для математического описания временной структуры. Обычно речь не идёт о «структуре» как таковой — поведение состояния системы во времени просто представляют временным рядом, и он изучается (см. гл. 8 в монографии [8]). Обратим внимание: такой подход фактически игнорирует современную четырёхмерную математическую модель физической реальности (Мир событий, пространство-время). Он не наводит на мысль о том, что *временной ряд ключевой характеристики состояния сложной системы содержит информацию о математических свойствах временного аспекта физической реальности*, которые проявляются в устанавливаемых законах и закономерностях (например, в таком как упомянутый выше эмпирический закон Хёрста). Здесь имеются в виду законы и закономерности, которые отражают объективные свойства существования и эволюции сложных природных систем.

Ниже обсуждается подход к описанию временной структуры сложной си-

стемы с помощью известных математических средств. Мы будем исходить из информации, содержащейся во временном ряде её ключевой характеристики A :

$$A(t_0), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n), \quad (1)$$

где $A(t_i)$ — значение характеристики A в момент t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $t_n = T$. Подчеркнём, что ряд (1) должен охватывать достаточно долгий промежуток времени T , в течение которого временная структура могла бы достаточно проявиться. В качестве минимального временного интервала обычно фигурирует минимальный интервал между проводимыми наблюдениями или измерениями. Пусть в наблюдениях характеристики A минимальный временной интервал выбран равным τ и $t_i = i\tau$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Итак, если характеристика A является интегральной, ключевой характеристикой внутреннего состояния изучаемой сложной системы, мы будем называть структуру временного ряда (1) временной структурой данной системы. Как известно, она может быть описана с помощью следующих математических характеристик: среднего значения

$$\bar{A} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n A(i\tau) \quad (2)$$

и мгновенного отклонения $a(i\tau)$ от среднего значения

$$a(i\tau) = A(i\tau) - \bar{A}. \quad (3)$$

В качестве одной из характеристик временной структуры A рассматривают её размах

$$R_A \equiv R_A(n\tau) = \max\{A(t), t = 0, \tau, \dots, n\tau\} - \min\{A(t), t = 0, \tau, \dots, n\tau\}. \quad (4)$$

Мы будем выявлять особенности временной структуры на временных интервалах разного масштаба, τ и $m\tau$, здесь целое число $m = n/k$, где k — целое. Поэтому будем иметь дело со средними значениями размахов величины A на временном интервале τ —

$$\overline{R_A(1; \tau)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A((i-1)\tau) - A(i\tau)|$$

и на интервале $m\tau$ —

$$\overline{R_A(m; \tau)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_{A,i}(m; \tau),$$

$$\text{где } R_{A,i}(m; \tau) = \max\{A(t), (i-1)m\tau \leq t \leq im\tau\} - \min\{A(t), (i-1)m\tau \leq t \leq im\tau\}.$$

Обратим внимание на тот факт, что эмпирический закон Хёрста был обнаружен при исследовании временных рядов, описывающих природные процессы, благодаря использованию функции

$$X_A(t) = \sum_{u=0}^t [A(u) - \bar{A}] \quad (5)$$

и её нормированного размаха R_{X_A}/S_A , где R_{X_A} — размах (4) функции (5), а S_A — стандартное отклонение величины A :

$$S_A \equiv S_A(n\tau) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^{n\tau} [A(t) - \bar{A}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

С позиций представлений о временной структуре можно сразу понять причину плодотворности использования функции X_A (далее мы будем называть её функцией Хёрста). Дело в том, что она, согласно определению (5), фиксируя от одной временной точки к следующей отклонение текущего значения A от среднего \bar{A} , фактически описывает временную структуру в терминах (2) и (3). Размах соседних значений функции Хёрста, i -го и $(i-1)$ -го,

$$R_{X_A,i}(\tau) = |X_A((i-1)\tau) - X_A(i\tau)| = |a(i\tau)|,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где $|a(i\tau)|$ — i -е абсолютное отклонение величины A . Поэтому при весьма больших n , что, как правило, имеет место при исследовании временных структур, можно считать, что средний размах

$$\overline{R_{X_A}(\tau)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{X_A,i}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a(i\tau)| \cong \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |a(i\tau)| = \overline{|a|},$$

или, по крайней мере, является величиной того же порядка.

Оценим соотношение $\overline{R_{X_A}(\tau)}/S_A$. Согласно (6) и (3), $S_A^2 = \overline{|a|^2} = \mathbf{D}|a| + \overline{|a|}^2$, где $\mathbf{D}|a|$ — дисперсия величины $|a|$. Поэтому отношение

$$\frac{\overline{|a|}}{\sqrt{\mathbf{D}|a| + \overline{|a|}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} < 1, \quad K = \frac{\sqrt{\mathbf{D}|a|}}{\overline{|a|}},$$

где K — коэффициент вариации абсолютного отклонения $|a|$. Так что

$$\overline{R_{X_A}(\tau)}/S_A \cong \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} < 1.$$

Теперь если мы представим R_{X_A}/S_A как произведение двух факторов, т. е.

$$\frac{R_{X_A}}{S_A} = \frac{R_{X_A}}{\overline{R_{X_A}(\tau)}} \cdot \frac{\overline{R_{X_A}(\tau)}}{S_A},$$

получим следующее выражение для нормированного размаха Хёрста на интервале $n\tau$:

$$\frac{R_{X_A}(n\tau)}{S_A(n\tau)} = \frac{R_{X_A}(n\tau)}{R_{X_A}(\tau)} \cdot F, \quad F \cong \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}, \quad (7)$$

где фактор F представляет собой весьма ограниченную величину. Следовательно, известное наблюдающееся степенное поведение нормированного размаха Хёрста для характеристик природных явлений и процессов (эмпирический закон Хёрста)

$$\frac{R_{X_A}(n\tau)}{S_A(n\tau)} \sim n^H, \quad \text{где } H \text{ – показатель Херста,} \quad (8)$$

может обеспечивать только первый сомножитель в (7), который представляет собой отношение размахов функции Хёрста на временных интервалах $T = n\tau$ и τ , т. е. когда

$$\frac{R_{X_A}(n\tau)}{R_{X_A}(\tau)} \sim n^H. \quad (9)$$

Так как в (8) слева фигурирует безразмерная величина, а справа в n неявно присутствует размерность времени: n — это число лет, охваченных наблюдениями (т. е. $\tau = 1$ году), чтобы выяснить физический смысл показателя Хёрста, запишем (8) следующим образом:

$$\frac{R_{X_A}(T)}{S_A(T)} \sim \left(\frac{T}{\tau}\right)^H. \quad (10)$$

Тогда можно видеть, что справа в законе (8) фигурирует отношение временных размеров T и τ : первый представляет собой интервал времени, охваченный наблюдениями величины A , второй — минимальный временной масштаб, используемый в этих наблюдениях, ему должен соответствовать определённый размер элемента временной структуры A . Определим его. Для этого рассмотрим средний квадрат отклонения текущего значения A от некоторого значения A' из области значений A :

$$\overline{(A - A')^2} = \overline{A^2} - 2\overline{AA'} + A'^2 = S_A^2 + (A' - \overline{A})^2.$$

Видим, что когда $A' = \overline{A}$, отклонение $\sqrt{\overline{(A - A')^2}}$ будет минимальным и равным S_A . Следовательно, S_A выступает в роли минимального масштаба структуры A , другими словами, S_A — *размер элемента* этой структуры. Теперь выясним смысл отношения характеристик временной структуры A , стоящего в левой части (8). Так как максимум функции Хёрста представляет собой максимальное *суммарное* отклонение A от \overline{A} , а минимум — минимальное, их разность, т. е. размах R_{X_A} , представляет собой *суммарный размер элементов* временной структуры A , которую охватывают n измерений в течение периода T . Поэтому отношение R_{X_A}/S_A представляет собой *число элементов* размера S_A в этой структуре.

Таким образом, эмпирическое соотношение (8), т. е. (10) (и соответственно, (9)), свидетельствует, что количество элементов временной структуры природных процессов в охваченном периоде времени $T = n\tau$ определяется некоторым степенным соотношением. Как видим, оно может рассматриваться как аналог известного в теории фракталов соотношения

$$m = \left(\frac{L}{l}\right)^D \quad (11)$$

для пространственной структуры размера (длиной) L с элементами размера l , где m — число элементов, а показатель D — фрактальная размерность этой пространственной структуры. Примером такой структуры является известная триадная кривая “Кох” [8] ($D = \log 4 / \log 3$). Также как величина D является определённой характеристикой пространственной структуры, показатель Хёрста H , аналогичный фрактальной размерности D линейной пространственной структуры, может интерпретироваться как математическая характеристика временной структуры, которую описывает функция Хёрста. Так что наблюдаемые значения показателя Хёрста для временных структур природных процессов (при должном выборе τ и T) могут дать информацию о структуре временного аспекта объективной реальности.

Располагая формулой (7), можно сделать следующие выводы. Закон (8) может иметь место, когда $K^2 \ll 1$, т. е. при весьма малых вариациях абсолютного отклонения $|a|$, или при постоянном коэффициенте вариации K . Заметим, что поскольку значение коэффициента вариации абсолютного отклонения наблюдающейся физической характеристики A сложной системы от её среднего значения определяется соответствующими физическими условиями, постоянство K , фиксирующее (при логарифмическом масштабе на координатных осях R_{X_A}/S_A и n) прямую, может свидетельствовать об определённом постоянстве этих условий.

Подведём итог обсуждению нормированного размаха Хёрста с позиций наличия определённой временной структуры: использование представления о временной структуре дало возможность предложить принципиально новый подход к интерпретации эмпирического закона Хёрста и диапазона наблюдаемых значений показателя Хёрста H (*Hurst phenomenon*), что будет обсуждаться в следующем разделе.

3. Примеры использования представления о временной структуре

Прежде всего обратимся к интерпретации результатов, полученных в исследованиях Х. Хёрста. Применение им функции X_A не только в задаче нахождения оптимального объёма водохранилища, где она появилась и имела конкретный физический смысл, но и при исследовании временных рядов, описывающих весьма различные природные процессы (такие, например, как сток рек, отложение ила или рост колец деревьев), где она такого смысла не имела,

обнаружило, что размах R_{X_A}/S_A очень хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$R_{X_A}/S_A = (n/2)^K, \quad (12)$$

здесь n — количество лет, охваченных наблюдениями; показатель K^2 более или менее симметрично распределён вокруг среднего значения 0,73 со стандартным отклонением, равным примерно 0,09 (см. п. 8.1 в [8]). Т. е. собранные Хёрстом статистические данные свидетельствовали, что для многих природных процессов $H > 1/2$. Этот результат пытались получить теоретически, исходя из имевшихся в то время представлений о характере случайности природных процессов, т. е. из определённых статистических моделей. Однако, как указывает Е. Федер (см. п. 8.1 в [8]), Хёрстом и Феллером было показано (в 1951 г.), что для случайного процесса с независимыми значениями и конечной дисперсией нормированный размах $R_{X_A}/S_A = (\pi n/2)^{1/2}$. Поскольку при отсутствии долговременной статистической зависимости нормированный размах должен был быть асимптотически пропорционален $n^{1/2}$, ситуацию с $H > 1/2$, обнаруженную Хёрстом, стали называть явлением Хёрста (*Hurst phenomenon*). Попытки объяснить явление Хёрста с помощью статистических моделей и идей рассмотрены в монографиях Р.Л. Браса и И. Родригеса-Итурбе [11] и Е. Федер [8].

В последние десятилетия вопрос, сформулированный Федером в [8] ещё в 1988 году: «Почему же природные процессы подчиняются статистике Хёрста?» — стал рассматриваться с помощью привлечения физических, причинно-следственных связей, см., например, [12]. Такой подход, который фокусируется на физических взаимосвязях природных явлений, особенно важен в развитии корректных прогнозов, связанных с динамикой состояния окружающей среды, и которые не возможны без понимания природы (физической сути) явления Хёрста. Соответственно, ведутся исследования свойств показателя Хёрста, см., например, [13], где на основе численного исследования определённого фактического материала сделаны выводы, которые выглядят совершенно естественными с позиций представлений о временной структуре. Так, утверждается, что, во-первых, показатель Хёрста имеет сложную немонотонную зависимость от длины временного ряда (1), т. е. от величины T , и, во-вторых, его значение зависит от выбранного временного масштаба τ . Понятно, что количество элементов временной структуры в охваченном периоде времени T (т. е. нормированный размах Хёрста R_{X_A}/S_A) должно зависеть от величины T (что определяется свойствами самого временного пространства). Что касается выбора величины τ , то он должен соответствовать естественному, природному масштабу, характерному для рассматриваемого процесса или явления, а не ориентироваться на шкалу, используемую в измерительных приборах. Другими словами, величина τ должна соответствовать процессам, вызывающим изменение внутреннего состояния рассматриваемой системы, учитывать их естественную периодичность.

Вернёмся к точному равенству Хёрста (12) и перепишем его в используемых

²Этот показатель в дальнейшем стали именовать показателем Хёрста и обозначать буквой H , а само соотношение (12) называть эмпирическим законом Хёрста.

нами обозначениях:

$$\frac{R_{X_A}(T)}{S_A(T)} = \left(\frac{T}{2\tau}\right)^H, \quad \text{где по-прежнему } \tau = 1 \text{ г.} \quad (13)$$

Фигурирующий в (13) временной интервал 2τ заставляет нас вспомнить подход Г.Я. Васильевой к исследованию временных рядов в гелиофизике (см., например, [14], а также [15]). Исследуя взаимосвязь «Солнце–планеты», она предложила новый подход в математической обработке временных рядов суточных значений суммарной площади солнечных пятен на видимом диске Солнца, где в качестве минимального временного масштаба фигурирует период в два года. Дело в том, что речь шла об исследовании пространственно-временной структуры, отражающей динамику межпланетной среды внутри орбиты Марса. Так что, учитывая сидерические периоды обращения планет земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс), имело смысл выбрать двухлетний интервал наблюдений, поскольку сидерический период обращения Марса составляет один год и 321,7 суток.

Работы Васильевой с соавторами (см. [15] и цитирующиеся там работы) показывают, что при исследовании временной структуры климатических, геологических или биологических процессов следует учитывать, что эволюция состояния среды внутри орбиты Марса определяется его периодом обращения вокруг Солнца. Поэтому (13) можно рассматривать как

$$\frac{R_{X_A}(T)}{S_A(T)} = \left(\frac{T}{\tau}\right)^H, \quad \text{где теперь } \tau = 2 \text{ г.} \quad (14)$$

С позиций представлений временной структуры нормированный размах Хёрста $R_{X_A}(T)/S_A(T)$ представляет собой число элементов рассматриваемой временной структуры в охваченном наблюдениями периоде времени T . Как известно, число элементов структуры определяется размерностью пространства, в котором реализуется структура. Сопоставляя (14) и (11), а значит, H и D , и учитывая, что $1 < D \leq 2$ (когда эта пространственная структура располагается в двумерном пространстве), можно предположить, что $H \leq 1$ (временная структура «располагается» в одномерном временном пространстве). Поэтому результат Хёрста ($H > 1/2$) с этих позиций не удивляет, более того, можно ожидать значения H близкие к единице при достаточно больших n . Действительно, например, как показал анализ одной из самых длинных выборок методом нормированного размаха, который был проведён Мандельбротом и Уоллисом [16] при исследовании древних климатических изменений по толщине слоев в слоистых илистых отложениях оз. Тимискаминг в Канаде (данные охватывают период в 1909 лет), значение показателя Хёрста может быть очень велико: было получено $H = 0,96$. И, как отметили авторы этого исследования, не заметно никаких признаков отклонений от этой зависимости.

Исследование диапазона H одновременно для временных структур ряда различных природных процессов представляет интерес в деле изучения математических закономерностей временного аспекта физической реальности. То, что

средние значения показателя $H(K)$, полученные Хёрстом с соавторами для весьма различных естественных процессов, оказались более или менее симметрично распределены вокруг среднего значения 0,73 со стандартным отклонением, равным примерно 0,09, свидетельствует, видимо, не столько о свойствах отдельных временных структур, сколько о математических закономерностях самого временного аспекта физической реальности. Поэтому степенное соотношение (14) (где минимальный временной интервал τ выбран адекватно рассматриваемому природному процессу или явлению), описывающее, как изменяется число составляющих временную структуру элементов с ростом периода её наблюдения, дало возможность предложить рассматривать $R_{X_A}(n\tau)/S_A(n\tau)$ как функцию n в качестве некоторого математического портрета временной структуры (см. п. 4.1.6 в монографии [17]).

Для примера на рис. 1 приведены такие портреты временных структур, описывающих минутную ($\tau = 1$ мин, $n = 1, 2, \dots, 1440$) динамику ряда физических характеристик, контролируемых в специальном геофизическом мониторинге [17], в течение суток. Как видим, эти компактные, информационно насыщенные портреты позволяют фиксировать, во-первых, наличие изменяющихся внешних факторов, а во-вторых, взаимосвязь (или отсутствие таковой) отдельных физических характеристик. В данном примере имеется доминирующий внешний фактор — Солнце, его влияние продемонстрировано на рис. 2 двумя портретами временной структуры — дневным и ночным, отражающими динамику M в течение рассматриваемых суток.

4. Заключение

Подведём итоги. Представление о временной структуре позволило:

1. Раскрыть смысл эмпирического закона Хёрста как формулы, выражающей связь количества элементов временной структуры с «наполнением» временного пространства (времени) и его размерностью. Тем самым фактически предложен новый подход к интерпретации так называемого феномена Хёрста;

2. Предложить объяснение близости значений показателя Хёрста для временных рядов, описывающих динамику весьма различных природных процессов и явлений при периоде наблюдения одного порядка, как свойства, присущего самому временному пространству, т.е. как общую характеристику процесса формирования временной структуры независимо от составляющих её элементов;

3. Объяснить считающиеся аномальными значения показателя Хёрста близкие к единице, что наблюдается для достаточно длинных временных рядов, его близостью в этих случаях достаточно полной реализации временной структуры к размерности временного пространства;

4. Объяснить свойства показателя Хёрста, установленные в работе [13] по данным конкретных наблюдений: (1) сложную немонотонную зависимость от величины периода наблюдений T — способом «наполнения» временной структуры и (2) зависимость от выбранного минимального масштаба τ — изменением элемента временной структуры;

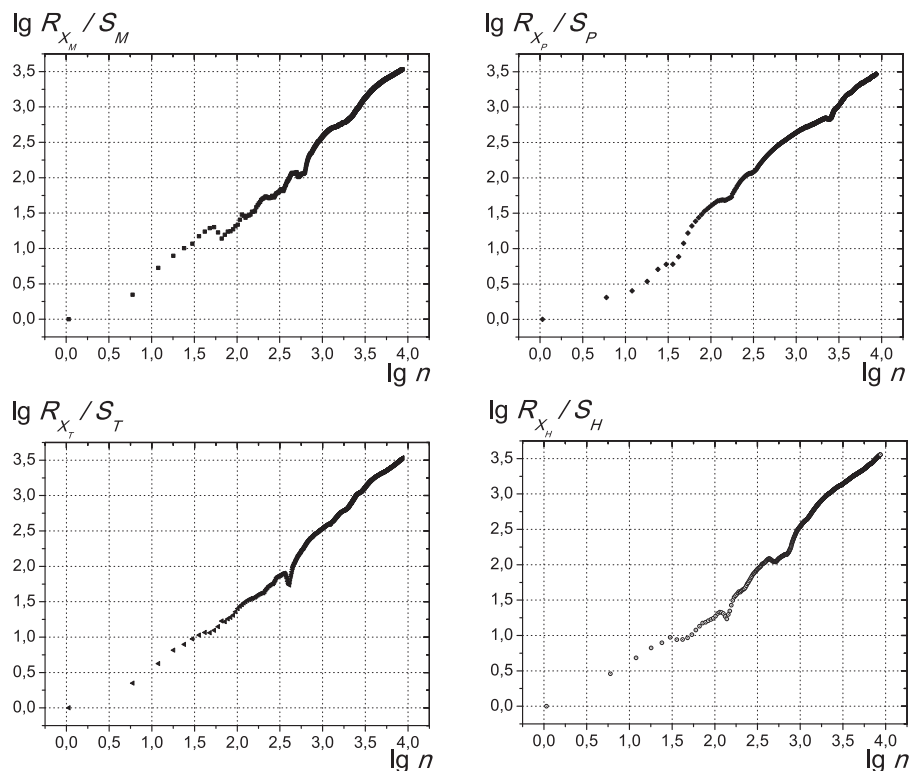


Рис. 1. Портреты суточных временных структур массы M контролируемой геологической системы, атмосферного давления P , температуры T и относительной влажности H в помещении, где расположена информационно-измерительная система мониторинга

5. Предложить исследование процесса формирования временной структуры с помощью её математического портрета: рассматривать $R_{X_A}(n\tau)/S_A(n\tau)$ как функцию числа наблюдений n (разумеется, при должном адекватном выборе τ).

В заключении мы хотели бы обратить внимание на обнаруженное в наблюдениях свойство временного аспекта физической реальности: количество элементов временной структуры с увеличением периода наблюдений увеличивается по степенному закону. Для временных структур также, как это обнаружили широкомасштабные исследования с помощью теории фракталов для пространственных структур, характерны степенные соотношения. В монографии [17] (см. п. 2.3.3) представлены результаты анализа ежедневного ($\tau = 1$ сут) контроля интегральной, ключевой характеристики состояния ряда образцов представительной геологической коллекции (минералы и минеральные агрегаты) — их массы M . Оказалось, что средние размахи, $\overline{R_M(m; \tau)}$ и $\overline{R_M(1; \tau)}$, величины M на временных интервалах разного масштаба, $m\tau$ и τ , удовлетворяют степенному соотношению

$$\frac{\overline{R_M(m; \tau)}}{\overline{R_M(1; \tau)}} = m^{2-D_M},$$

где величина D_M может рассматриваться как характеристика временной структуры, поскольку она зависит от вещественного состава рассматриваемой слож-

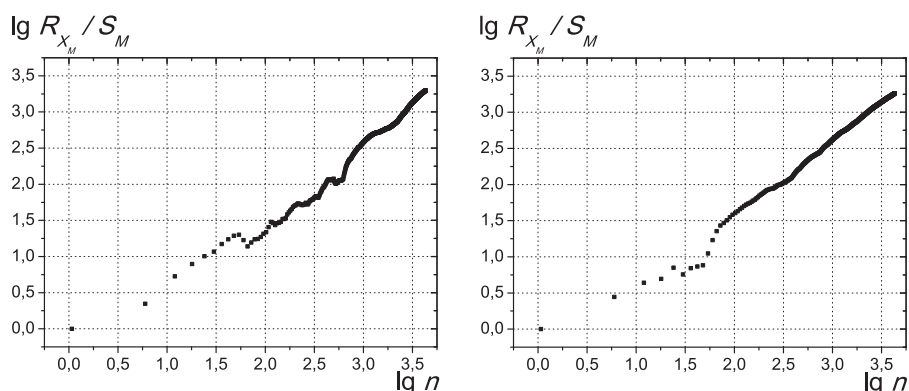


Рис. 2. Портреты двух временных структур M : слева — дневной портрет ($T = 12$ ч, от 0 до 12 ч UT), справа — ночной ($T = 12$ ч, от 12 до 24 ч UT); местное время превышает мировое UT на 6 ч; $n = 1, 2, \dots, 720$

ной системы и не зависит от типа динамики массы.

Выделенность степенных соотношений заставляет нас вспомнить о том, что именно степенные соотношения характерны для структуры так называемых *гармонических* систем, которые были введены Ю.Г. Косаревым (см. [9, 10, 18]) и успешно использовались при построении математической модели кибернетических систем с неограниченной возможностью развития. Так что и искусственные системы, создаваемые с определённой целью, оказываются наиболее эффективными именно в случае наличия степенных соотношений их характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 7. М., Л. : Изд-во АН СССР, 1936. С. 1–309.
2. Уитроу Дж.Дж. Естественная философия времени. М. : Прогресс, 1964. 432 с.
3. Гуц А.К. Сто лет абсолютного Мира событий Минковского // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев, В.Н. Самойлов. Новосибирск : Академическое изд-во «Гео», 2010. С. 13–52.
4. Eganowa I., Kallies W. Das Sonnenexperiment von Lawrentjew als Raum-Zeit-Erscheinung. Saarbrücken : Akademikerverlag, 2013. 131 s.
5. Еганова И., Каллис В. Солнечный эксперимент М.М. Лаврентьева. Явления пространства-времени. Saarbrücken : LAMBERT Academic Publishing, 2013. 123 с.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. М. : Мир, 1990. 344 с.
7. Сомсиков В.М. От механики Ньютона к физике эволюции. Алматы, 2014. 269 с.
8. Федер Е. Фракталы. М. : Мир, 1991. 260 с.
9. Косарев Ю.Г. О математической модели гармонических систем. I // Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983. С. 3–28.

10. Косарев Ю.Г. О математической модели гармонических систем. II // Анализ разнотипных данных (Вычислительные системы, вып. 99). Новосибирск, 1983. С. 15–38.
11. Bras R.L., Rodriguez-Iturbe I. Random Functions and Hydrology. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1985. 559 p.
12. Eltahir E.A.B. El Niño and the natural variability in the flow of the Nile River // Water Resour. Res. 1996. V. 32. P. 131–137.
13. Калуж Ю.А., Логинов В.М. Показатель Хёрста и его скрытые свойства // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 4(12). С. 29–37.
14. Васильева Г.Я., Фёдоров П.М. Эволюция структуры межпланетной среды в пределах орбиты Марса // Известия АН СССР, сер. физическая. 1981. Т. 45, № 7. С. 1335–1345.
15. Еганова И.А. О проявлении динамики структуры мира событий в гелиофизике // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев. Новосибирск, 2004. С. 90–100.
16. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. Some long-run properties of geophysical records // Water Resour. Res. 1969. Vol. 5, N. 2. P. 321–340.
17. Еганова И.А., Каллис В., Самойлов В.Н., Струминский В.И. Геофизический мониторинг «Дубна–Научный–Новосибирск»: Фазовые траектории массы / Ред. Ю.Г. Косарев. Новосибирск : Академическое издательство «Гео», 2012. 187 с.
18. Нагаев С.В. Об одном характеристическом свойстве степенной функции // Анализ разнотипных данных (Вычислительные системы, вып. 99). Новосибирск, 1983. С. 39–43.

TIME STRUCTURE OF THE COMPLEX SYSTEMS: METHODOICAL REVIEW

I.A. Eganova¹

Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Scientist Researcher, e-mail: eganova@math.nsc.ru

W. Kallies²

Ph.D. (Phys.-Math.), Dr.rer.nat., Head Scientist Researcher, e-mail: wkallies@jinr.ru

¹Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

²Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Abstract. The structure of time series that describes the dynamics of the key characteristic of the complex system internal state is discussed as time structure corresponding to that system and assigning the mode of its existence. Based on the notion about the information included in the time structure, its mathematical description is proposed using the well-known means: the mean value of the key characteristic and its instantaneous deviation from the mean value. From this point of view, we discovered the meaning of the function used by H. Hurst in his analysis of time series that describe the dynamics of natural processes and phenomena: it assigns time structure, and its range is the size of the time structure in the period of time covered by observation. The authors define the size of the elements that compose the structure and propose an interpretation of the Hurst empirical law as a ratio that describes the quantity of structural elements in the given period of time. This

interpretation allowed to propose an essentially new approach to the explanation of the so-called Hurst phenomenon (the values of the Hurst exponent are bigger than $1/2$), as well as its properties observed in various factual evidence. In conclusion, the accessory of complex organized systems to harmonic systems (Yu.G. Kosarev, 1988) is discussed in brief.

Keywords: time series, time structure, R/S analysis, Hurst rescaled range, Hurst exponent, R/S statistics, Hurst statistics, Hurst phenomenon, Hurst empirical law.

Дата поступления в редакцию: 19.11.2016

О СВЯЗИ КОМПАКТНОСТИ И ПРИЧИННОСТИ

А.Н. Романов

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: aroms@ya.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье рассматривается связь между поведением причинной структуры пространства-времени и его топологией, а именно, уделяется внимание изучению причин наличия или отсутствия замкнутости множеств причинного прошлого и будущего в зависимости от условия компактности множеств, связанных с причинным будущим и прошлым точек пространства-времени. Приведён пример, когда наличие замкнутых некомпактных множеств пространства-времени, связанных с причинным будущим или прошлым какой-либо точки, влечёт за собой факт незамкнутости причинного прошлого и будущего некоторых точек.

Ключевые слова: пространство-время, компактность, причинность.

В данной статье мы рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся связи свойства компактности замыканий причинных прошлого и будущего точек пространства-времени и замкнутости этих же множеств причинного прошлого и будущего точек. Общая идея состоит в том, что некоторая информация о поведении причинной структуры пространства-времени позволяет делать некоторые выводы о его топологической структуре.

Для начала приведем уже известное утверждение (см. [1], теорема 3.30): Пространство-время (M, g) глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно сильно причинно и (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$.

Здесь через $C(M, g)$ обозначен класс лоренцевых метрик на многообразии M , глобально конформных метрике g :

$$g' \in C(M, g) \Leftrightarrow g' = \Omega g$$

для некоторой гладкой функции $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$.

Это утверждение справедливо при довольно сильном условии сильной причинности пространства-времени. Мы же постараемся сделать некоторые выводы относительно более широкого класса пространств.

А именно, покажем, что если пространство-время (M, g) принадлежит классу A и если для некоторых точек $p, s \in M$ множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто в M , а $I_p^+ \cap I_s^- \neq \emptyset$, то тогда (замкнутое) множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным.

Для начала определим некоторый класс пространств, относительно которого выдвинуто приведённое утверждение. А именно, из всех пространств, допускающих незамкнутые множества причинного прошлого или будущего, выделим

определённый класс и обозначим его через B , разделив таким образом лоренцевы многообразия на два непересекающихся класса: B и A (к этому классу отнесём все остальные пространства, не вошедшие в B). Класс B характеризуется следующим свойством. Пусть между точками $p, s \in M$ выполнены следующие соотношения: $s \in cl(J_p^+)$, но $s \notin J_p^+$. Таким образом, любую окрестность U_s точки $s \in M$ можно достичь направленной в будущее причинной кривой γ , выходящей из p , однако, сама точка s остаётся недостижимой. Допустим теперь, что имеет место следующая ситуация: существует настолько малая окрестность U_s точки s , что для того, чтобы достичь её направленной в будущее причинной кривой, выходящей из p , необходимо, чтобы, во-первых, эта кривая γ целиком находилась бы в некотором (фиксированном) компактном множестве K , а во-вторых, её риманова длина (измеренная в любой заранее выбранной римановой метрике), была бы больше любого наперёд заданного положительного числа N . Другими словами, чтобы «подойти» достаточно близко к точке s , причинная кривая γ должна совершить достаточно большое количество «оборотов» во множестве K .

Если такая ситуация имеет место в некотором многообразии (M, g) , то будем относить его к классу B , в противном случае будем считать данное лоренцево многообразие относящимся к классу A .

В двумерном случае все пространства из класса B являются не хронологическими, то есть содержат замкнутые времениподобные кривые.

В качестве примера приведём цилиндр с выколотой точкой:

$$M = \mathbb{R} \times S = \{t, \theta\} \setminus (0, 0).$$

Допустим, что причинная структура этого пространства-времени обладает следующим свойством (конкретная запись метрики нам не важна): при приближении к множеству $\{t = 0\}$ конусы будущего наклоняются так, что причинные кривые могут лишь асимптотически приближаться к точкам $\{t = 0\}$, но достичь их не могут. Тогда если $s \in \{t = 0\}$, то для некоторых точек $p \in M$ выполнены соотношения: $s \in cl(J_p^+)$, но $s \notin J_p^+$. Такое пространство-время как раз является пространством класса B .

В качестве гипотезы можно выдвинуть предположение, что к классу B относятся лишь многообразия, не являющиеся причинными, то есть содержащие замкнутые причинные кривые. Однако это утверждение требует отдельного доказательства.

Теперь перейдём к доказательству основного утверждения, которое было сформулировано выше. Допустим, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно. Так как множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто, то существует точка $q \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ такая, что $q \notin J_p^+ \cap J_s^-$. В этом случае $q \notin J_p^+$ (случай $q \notin J_s^-$ доказывается аналогично).

Рассмотрим последовательность точек $\{q_n\} \subset J_p^+ \cap J_s^-$ такую, что при $n \rightarrow \infty, q_n \rightarrow q$, то есть сходящуюся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M). Таким образом, для последовательности $\{q_n\}$ имеем:

$$p \leq q_n, q_n \rightarrow q.$$

Так как $p \leq q_n$, то для каждого номера n существует причинная кривая γ_n , идущая из p в q_n . Продолжим γ_n до непродолжаемой причинной кривой. Так как $q_n \rightarrow q$, то любая окрестность точки q содержит все точки q_n , начиная с некоторого n . А так как $q_n \in \gamma_n$, то q является точкой накопления последовательности причинных непродолжаемых кривых $\{\gamma_n\}$. Отсюда следует (см. [1], предложение 2.18), что существует причинная непродолжаемая кривая γ , являющаяся предельной для последовательности $\{\gamma_n\}$, и такая, что $q \in \gamma$. Выберем параметризацию γ так, что $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M$ и $\gamma(0) = q$, причём уменьшение параметра t кривой γ соответствует движению по ней в прошлое.

Рассмотрим часть кривой γ , идущую в прошлое от точки $q : \gamma(-\infty, 0]$. Заметим, что для любой точки $a \in \gamma(-\infty, 0]$ выполняется соотношение: $a \in cl(J_p^+)$.

Действительно, так как γ — предельная кривая последовательности $\{\gamma_n\}$, то существует подпоследовательность $\{\gamma_m\} \subset \{\gamma_n\}$ такая, что для любой точки $a \in \gamma$ каждая её окрестность U_a пересекает все, за исключением конечного числа, кривые из $\{\gamma_m\}$. Взяв точки r_m такие, что для всех номеров m выполнены соотношения $r_m \in \{\gamma_m\}, r_m \in U_a$, получим сходящуюся к a последовательность $r_m : r_m \rightarrow a$. Если выполнено ещё соотношение $r_m \in J_p^+$, то получим, что $a \in cl(J_p^+)$. В данном случае включение $r_m \in J_p^+$ выполняется всегда. В самом деле, если $r_m \notin J_p^+$, то это означает, что кривая γ (вместе с кривыми γ_m) покинула область $cl(J_p^+)$. Однако выйти из $cl(J_p^+)$ γ может лишь через точку p , так как все γ_m «фокусируются» в p (по их определению), а γ — предельная кривая для последовательности $\{\gamma_m\}$. Но такого быть не может, так как это означало бы существование отрезка (лежащего на кривой γ), соединяющего точки p и q и являющегося частью причинной кривой (γ — причина), что противоречит выбору точки $q : q \notin J_p^+$.

Таким образом, мы показали, что для любой точки $a \in \gamma(-\infty, 0]$, a принадлежит множеству $cl(J_p^+) : a \in cl(J_p^+)$. Ясно, что выполнено также включение $a \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ (так как из соотношений $a \leq q, q \ll r$ следует соотношение $a \ll r$, то есть $a \in int J_s^-$).

В результате имеем: часть кривой γ , идущая в прошлое от точки q , целиком находится во множестве $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, которое по сделанному предположению является компактным. Таким образом, имеет место явление захвата.

По построению кривой γ (см. [1], предложение 2.18), последовательность $\{\gamma_m\}$ сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из \mathbb{R} в случае, если кривые γ и γ_m параметризованы длиной дуги, вычисленной относительно (полной) римановой метрики.

Так как ни для какого значения параметра $t \leq 0$ кривая γ не покидает множества $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, а последовательность $\{\gamma_m\}$ сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из \mathbb{R} (то есть кривые $\{\gamma_m\}$ «повторяют» движение γ), то получаем следующую ситуацию: если взять достаточно малую окрестность U_q точки q , то длины кривых $\{\gamma_m\}$, достигающих этой окрестности, с необходимостью должны быть больше любого наперёд заданного положительного числа N . Однако это означает, что пространство-время (M, g) принадлежит классу B , в то время как по условию (M, g) принадлежит классу A .

Полученное противоречие опровергает сделанное предположение о том, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно, и тем самым доказывает наше утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М. : Мир, (1985).
2. Романов А. Отображения пространства-времени и условия причинности // Тезисы докладов конференции по Анализу и Геометрии. Новосибирск : ИМ СО РАН, 2004. 219 с.

ABOUT COMPACTNESS AND CAUSALITY

A.N. Romanov

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: arooms@ya.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The article discusses the relationship between the behavior of the causal structure of space-time and its topology, namely, attention is paid to the study of the causes of the presence or absence of a causal closure sets of the past and the future depending on the conditions of compactness sets associated with past and future causal space-time points. An example, when the presence of closed non-compact sets of the space-time associated with the cause of future or past of any point entails the fact of not closed causal past and the future of some points, is given.

Keywords: space-time, compactness, causality.

Дата поступления в редакцию: 27.01.2017

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА С ДЕФОРМИРОВАННОЙ СТАТИСТИКОЙ

В.Н. Бородихин

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: borodikhin@inbox.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В работе впервые исследована двумерная неупорядоченная модель Изинга с деформированной статистикой Цаллиса, со спиновыми концентрациями 0.95 и 0.8. Получены значения критических температур и критических показателей. Для неупорядоченной модели с деформированной статистикой выявлено возникновение нового типа критического поведения, зависящего от концентрации примесей.

Ключевые слова: фазовые переходы, деформированная статистика, модель Изинга.

Введение

В работе [1] рассматривали двумерную однородную модель Изинга с деформированной статистикой Цаллиса [2]. Были определены критические температуры и критические показатели для систем с различной степенью деформации статистики. Исследование данной модели представляет теоретический и экспериментальный интерес, поскольку критическое поведение данной модели качественно согласуется с критическим поведением реальных систем, в частности, так называемых манганитов, например, $La_{0.60}Y_{0.07}Ca_{0.33}MnO_3$ [3, 4]. Однако вопрос о связи подобных систем и неэкстенсивной статистики нуждается в уточнении.

Деформированная статистика характеризуется параметром деформации q , связанным со степенью отклонения от статистики Гиббса. В [1] было показано, что в отличие от стандартной однородной двумерной модели Изинга, в которой индекс теплоёмкости $\alpha = 0$, в двумерной однородной модели Изинга с деформированной статистикой индекс α является положительным. Согласно критерию Харриса [5] немагнитные примеси оказывают существенное влияние на критическое поведение в случае $\alpha > 0$, и таким образом, представляется интересным исследовать влияние замороженного беспорядка в рамках двумерной модели Изинга с деформированной статистикой, а также исследовать влияние деформированной статистики на критерий Харриса.

В работе впервые были определены значения критических температур и критических показателей для двумерной неупорядоченной модели Изинга со спиновой концентрацией $p = 0.95$ с деформированной статистикой Цаллиса.

1. Моделирование систем с деформированной статистикой

Выражение для неаддитивной энтропии Цаллиса имеет вид [2]:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (1)$$

где p_i — вероятность нахождения системы в состоянии i , q — параметр деформации статистики: при $0 < p_i < 1$ $p_i^q > p_i$ для $q < 1$, и $p_i^q < p_i$ для $q > 1$. При $q = 1$ статистика не является деформированной.

В неэкстенсивной статистической теории [2] вводится определение:

$$\langle H \rangle_q = \sum_{i=1}^{\Omega} P_i \varepsilon_i = U_q, \quad (2)$$

где H — гамильтониан системы, ε_i — одно из возможных энергетических состояний, U_q — внутренняя энергия, P_i так называемое эскортное распределение [6]

$$P_i = \frac{p_i^q}{\sum_j p_j^q} = \frac{(e_q^{-\beta'_q} \varepsilon_i)^q}{\sum_j (e_q^{-\beta'_q} \varepsilon_j)^q}, \quad (3)$$

где

$$\beta' = \frac{\beta}{\sum_j p_j^q + (1 - q)\beta U_q}, \quad (4)$$

здесь β — лагранжев множитель, e_q^{-x} — деформированная экспонента, удовлетворяющая свойству

$$[1 - (1 - q)\beta' \varepsilon_i]^{1/(1-q)} = \begin{cases} e_q^{-x}, & 1 - (1 - q)x \geq 0; \\ 0, & 1 - (1 - q)x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Следуя [1], в качестве физической температуры выберем β' .

При компьютерном моделировании системы использовали алгоритм метрополиса с модифицированной вероятностью переворота спинов, обусловленной деформированной статистикой:

$$w_q = \frac{P_i^{(2)}}{P_i^{(1)}} = \frac{e_q^{-\varepsilon_i^{(2)}/T}}{e_q^{-\varepsilon_i^{(1)}/T}}, \quad (6)$$

где $P_i^{(2)}$ эскортное распределение (3), соответствующее состоянию после переворота спина, а $P_i^{(1)}$ — состоянию до переворота. Состояние энергии ε_i определяется гамильтонианом двумерной неупорядоченной модели Изинга с учётом взаимодействия ближайших соседних спинов s_i :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} p_i p_j s_i s_j, \quad (7)$$

где J_{ij} — константа обменного ферромагнитного взаимодействия, p_i — случайная переменная, описываемая функцией распределения

$$F(p_i) = p\delta(p_i - 1) + (1 - p)\delta(p_i) \quad (8)$$

с $p = 1 - c$, где c — концентрация примесей. Система имеет вид квадратной решётки размера L с периодическими граничными условиями. С узлами решётки связаны спины s_i , принимающие значения ± 1 и немагнитные атомы примеси (пустые узлы с $s_i = 0$). Примесь равномерно распределяется по всей системе, её положение фиксировано для отдельной примесной конфигурации в процессе моделирования системы. Концентрация спинов определяется суммированием абсолютных значений спинов по всем узлам решётки:

$$p = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^{L^2} |s_i|. \quad (9)$$

При моделировании системы вычисляли намагниченность на спин m , энергию на спин e , восприимчивость χ

$$\chi = \frac{\langle \bar{m}^2 \rangle - \langle \bar{m} \rangle^2}{T}, \quad (10)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение по шагам Монте-Карло, а черта — усреднение по примесным конфигурациям. Также вычисляли теплоёмкость

$$C = \frac{\langle \bar{e}^2 \rangle - \langle \bar{e} \rangle^2}{T^2} \quad (11)$$

Таблица 1. Критические индексы и критические температуры двумерной однородной и неупорядоченной модели Изинга ($p=1, 0.95$) с деформированной статистикой

p	q	T_c	α/ν	β/ν	γ/ν
1	1	2.269	0	0.125	1.75
	0.8	1.888 ± 0.005	0.223 ± 0.007	0.1247 ± 0.003	1.770 ± 0.042
	0.6	1.773 ± 0.007	0.261 ± 0.019	0.121 ± 0.003	1.696 ± 0.01
0.95	1[7]	2.088		0.125(5)	1.75(2)
	0.8	1.743 ± 0.006	0.166 ± 0.023	0.1063 ± 0.01	1.605 ± 0.04
	0.6	1.662 ± 0.006	0.182 ± 0.022	0.135 ± 0.004	1.650 ± 0.05

и кумулянт Биндера

$$U = 1 - \frac{\langle \bar{m}^4 \rangle}{3\langle \bar{m}^2 \rangle^2}. \quad (12)$$

Отношение критических индексов теплоёмкости α/ν , намагниченности β/ν и восприимчивости γ/ν определяли из зависимости параметров от размеров системы L в критической точке T_c бесконечной системы

$$\begin{aligned} C(L, T) &\sim L^{\alpha/\nu}; \\ m(L, T) &\sim L^{-\beta/\nu}; \\ \chi(L, T) &\sim L^{\gamma/\nu}, \end{aligned} \quad (13)$$

где ν – критический индекс корреляционной длины. Для двумерной однородной модели Изинга он равен 1, и как показано в работе [1], практически не зависит от степени деформации статистики.

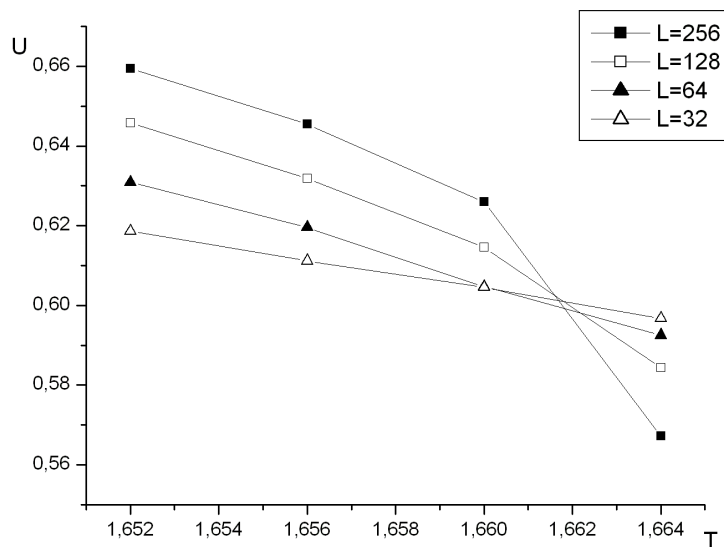
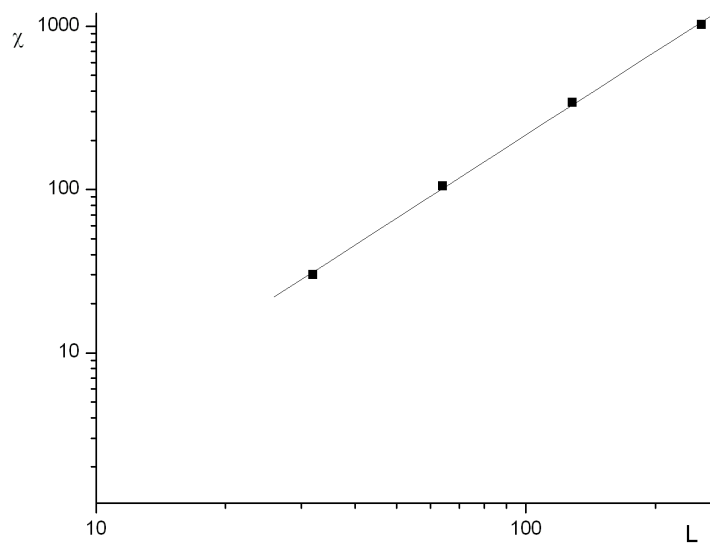
Таблица 2. Критические индексы и критические температуры двумерной неупорядоченной модели Изинга ($p=0.8$) с деформированной статистикой

p	q	T_c	β/ν	γ/ν
0.8	1[7]	1.5077	0.11(1)	1.78(2)
	0.8	1.2905 ± 0.009	0.126 ± 0.028	1.3474 ± 0.238
	0.6	1.2413 ± 0.01	0.1185 ± 0.02	1.332 ± 0.225

2. Результаты моделирования

Было осуществлено моделирование двумерной однородной и неупорядоченной модели Изинга с деформированной статистикой. Спиновая концентрация неупорядоченной системы составляла $p = 0.95$, $p = 0.8$, параметр деформации $q = 0.8, 0.6$, размеры системы выбирались $L = 256, 128, 64, 32$. При моделировании использовали 500–1000 примесных конфигураций для неупорядоченных систем, для однородных систем 100–400 прогонок. Отношение критических индексов α/ν , β/ν и γ/ν определяли из соотношений (13) в двойном логарифмическом масштабе в критической точке. Критические температуры определяли по пересечению кумулянтов Биндера (12). На рис. 1 для примера приведено пересечение кумулянтов ($p=0.95$, $q=0.6$). На рис. 2 – 5 приведены графики критических показателей при различных концентрациях и параметрах деформации.

Результаты моделирования приведены в табл. 1. Для однородной модели в табл. 1 в отсутствие деформации ($q=1$) приведены точные значения, для неупорядоченной ($p=0.95$) и $q=1$, результаты взяты из [7]. Для спиновой концентрации $p = 0.8$ результаты моделирования приведены в табл. 2.

Рис. 1. Кумулянты Биндера, $p=0.95$, $q=0.6$.Рис. 2. Критический показатель γ , $p=1.0$, $q=0.6$.

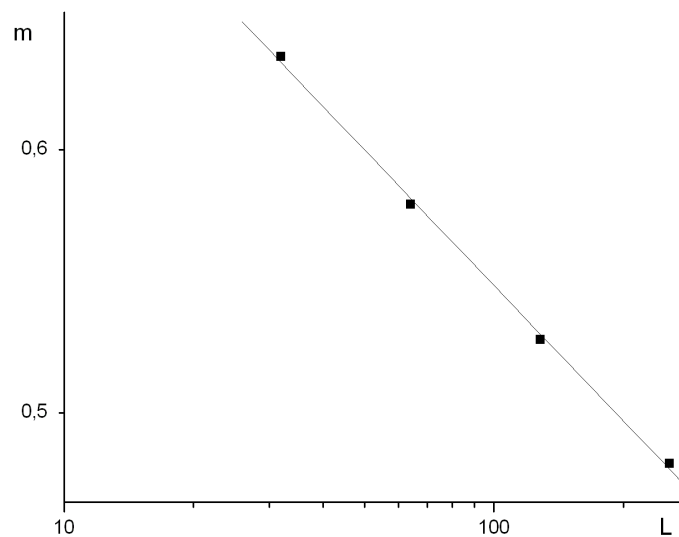


Рис. 3. Критический показатель β , $p=0.95$, $q=0.6$.

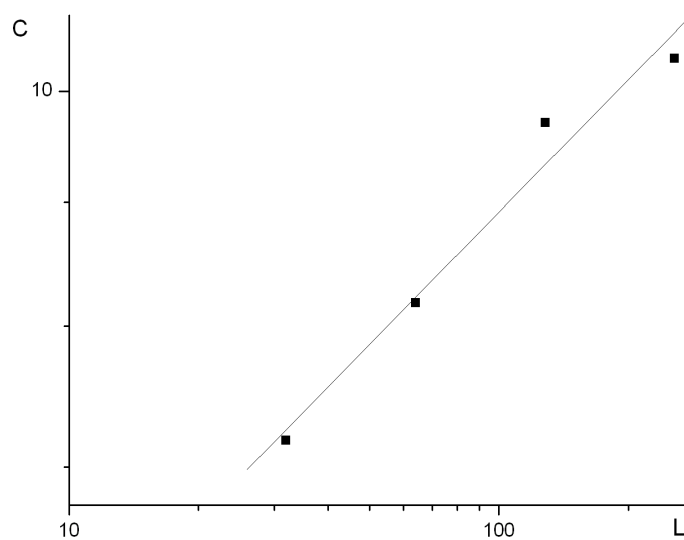


Рис. 4. Критический показатель α , $p=0.95$, $q=0.6$.

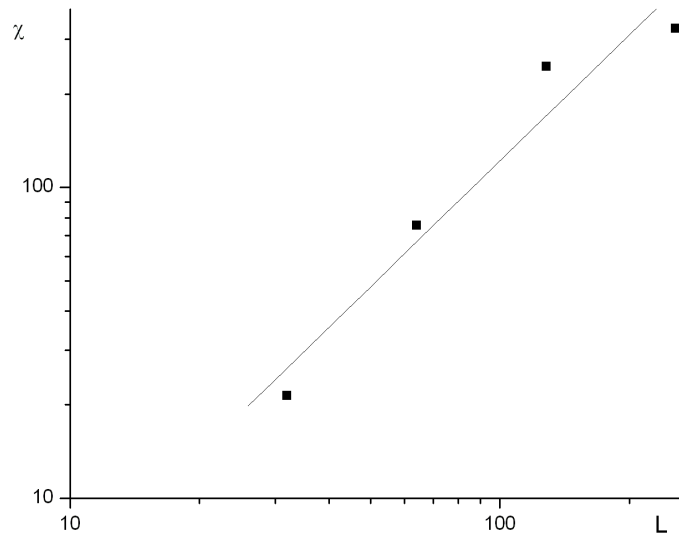


Рис. 5. Критический показатель γ , $p=0.8$, $q=0.8$.

3. Заключение

Сравнивая результаты данной работы для однородной деформированной модели Изинга и работы [1], можно выявить некоторые отличия. Критические температуры, полученные в рамках методики пересечения кумулянтов Биндера, в пределах погрешности совпадают с [1], как и критические показатели γ . Критические показатели α почти совпадают в пределах погрешности. Что касается критического показателя β , то в [1] выявлена сильная зависимость данного показателя от параметра деформации статистики q . Так для $q = 0.8$ $\beta = 0.075$, а для $q = 0.6$ $\beta = 0.025$, т.е. с уменьшением параметра деформации критический индекс β практически стремится к нулю. В то же время в данной работе не выявлено подобной зависимости. Критические показатели определяли из логарифмической зависимости соответствующих термодинамических величин в критической точке бесконечной системы.

Как известно, критические показатели двумерной неупорядоченной модели Изинга практически не зависят от концентрации примесей. Однако же в рамках деформированной неупорядоченной модели можно сказать, что и при малых концентрациях примесей (0.05), согласно значениям критических показателей α и γ , появляется новый тип критического поведения. Данный вывод подтверждает критерий Харриса ($\alpha > 0$) соответствующей однородной модели с деформированной статистикой $q \neq 1$. Что касается примесных концентраций 0.2, то здесь не удалось определить показатель α с хорошей точностью. Тем не менее в частности индекс γ демонстрирует существенное отличие от недеформируемой модели, а также от деформируемой модели с малой концентрацией

примесей (0.05). Следовательно, для данной примесной концентрации также выявлен новый тип критического поведения.

Таким образом, влияние деформации статистики Цаллиса для неупорядоченной модели Изинга приводит к появлению нового типа критического поведения, зависящего от концентрации примесей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crokidakis N., Soares-Pinto D.O., Reis M.S., Souza A.M., Sarthour R.S., Oliveira I.S. Finite size analysis of a two-dimensional Ising model within a nonextensive approach // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 051101.
2. Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World. New York : Springer, 2009. P. 382.
3. Reis M.S., Amaral V.S., Araujo J.P. and Oliveira I.S. Magnetic phase diagram for a non-extensive system: Experimental connection with manganites // Phys. Rev. B. 2003. V. 68. P. 014404.
4. Amaral V.S., Araujo J.P., Pogorelov Y.P., Tavares P.B., Souza A.M., Vieira J.M. Discontinuous transition effects in manganites: magnetization study in the paramagnetic phase // J. Magn. Mater. 2002. V. 242. P. 655–658.
5. Harris A.B. Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models // J. Phys. C. 1974. V. 7. P. 1671.
6. Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction. Cambridge, : Cambridge University Press, 1993. P. 308.
7. Heuer H.O. Monte Carlo Simulation of Disordered 2-Dimensional Ising Systems // Europhys. Lett. 1991. V. 16. P. 503–508.

STUDY OF THE SYSTEMS BEHAVIOR IN PHASE TRANSITIONS ON THE COALESCENCE STAGE

V.N. Borodikhin

Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: borodikhin@inbox.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. For the first time the two-dimensional disordered Ising model with deformed Tsallis statistics, with spin concentrations of 0.95 and 0.8 is investigated. The values of critical temperatures and the critical exponents are obtained. For disordered model with deformed statistics the emergence of a new type of critical behavior depending on the concentration of impurities is revealed.

Keywords: phase transitions, deformed statistics, Ising model.

Дата поступления в редакцию: 11.12.2016

КЛИМАКСНЫЙ ЛЕС КАК НЭШЕВСКОЕ РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ

Л.А. Володченкова

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Для нахождения возможных равновесных состояний лесных экосистем предлагается использовать теорию дифференциальных игр. В рамках 4-ярусной мозаичной модели лесного фитоценоза устанавливается существование в таких экосистемах равновесных состояний Нэша.

Ключевые слова: лесная экосистема, равновесные состояния экосистемы, дифференциальная игра, равновесие Нэша, климаксный лес.

Введение

Как правило, под равновесным состоянием системы, равновесием понимается *стационарное состояние*, при котором характеризующие его параметры $x(t)$ не меняются со временем, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Однако системы часто управляются внешними факторами u_1, \dots, u_N , и в действительности их динамика описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u_1, \dots, u_N).$$

В таком случае можно рассматривать это уравнение в рамках теории оптимального управления и, более того, в рамках теории дифференциальных игр, отыскивая так называемые *равновесия Нэша*.

В теории дифференциальных игр каждый управляющий фактор u_i считается находящимся в распоряжении некоторого игрока, который старается с его помощью воздействовать на систему таким образом, чтобы иметь максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Выигрыш/проигрыш игрока описывается некоторой заранее заданной функцией $J_i(x, u_1, \dots, u_N)$. Очевидно, в реальности трудно предполагать, что факторы могут изменяться совершенно независимо друг от друга, и, следовательно, в системе могут устанавливаться в каком-то смысле равновесия.

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остаётся неизменной, то он имеет худший результат (большой проигрыш).

Динамика лесных экосистем также может описываться дифференциальным уравнением с внешними управляющими факторами. В качестве внешних управляющих факторов могут рассматриваться такие характеристики лесных фитоценозов как оконная динамика m , межвидовая и внутривидовая конкуренция k , антропогенное воздействие a и влажность почвы w .

Естественно попытаться установить существование равновесий Нэша в лесных экосистемах. Мы покажем, что лес в равновесии Нэша — это состояние, к которому стремится лесная экосистема в своём развитии, будучи подвергнутой начальным возмущениям, и это именно то состояние, которое соответствует состоянию климаксного леса.

1. Модель мозаично-ярусного леса

В книге [1] была предложена следующая модель 4-ярусного мозаичного лесного фитоценоза, характеризуемого продуктивностью x :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x, k, m, a, w), \quad (1)$$

где

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}x^6 + kx^4 + mx^3 + ax^2 + wx. \quad (2)$$

В [1] полностью и подробно исследованы стационарные равновесия таких экосистем.

Ниже мы исследуем равновесные состояния Нэша и устанавливаем их существование у 4-ярусной мозаичной лесной экосистемы.

2. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Естественно рассматривать игру с ненулевой суммой, поскольку «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, x)$, зависящей уже от позиции $\{t, x\}$, и для $u(t, x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [3]. Часто пишут просто $u(x)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

Для дифференциальной игры N -игроков

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + \sum_{j=1}^N g_j(x)u_j, \quad f(0) = 0, \\ x &\in \mathbb{R}, \quad u_j \in \mathbb{R}, \\ J_i(x, u_1, \dots, u_N) &= \int_0^{+\infty} [Q_i(x) + \sum_{j=1}^N R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, N), \\ Q_i &> 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0, \end{aligned}$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания положительно определённого решения $V_i(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{aligned} (V_i)'_x(x)f(x) + Q_i(x) - \frac{1}{2}(V_i)'_x \sum_{j=1}^N [g_j(x)]^2 (R_{jj})^{-1} (V_j)'_x + \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N R_{ij} [g_j(x)]^2 [(R_{jj})^{-1}]^2 [(V_j)'_x]^2 = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

по которому строится равновесие Нэша [2, Theorem 10.4-2]:

$$u_i^*(x) = u_i(V_i(x)) = -\frac{1}{2} R_{ii}^{-1} g_i(x) (V_i)'_x, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

3. Нэшевское равновесие лесной экосистемы

В нашем случае $N = 4$, игрок 1 — это фактор $u_1 = k$ конкуренции деревьев, игрок 2 — это оконная динамика $u_2 = t$, определяющая мозаичность фитоценоза, игрок 3 — антропогенное вмешательство $u_3 = a$ в лесную экосистему (вырубка леса, пожары и т. д.), и, наконец, игрок 4 — влажность почвы $u_4 = w$.

Далее

$$f(x) = -\alpha x^5, \quad g_1(x) = -4x^3, \quad g_2(x) = -3x^2, \quad g_3(x) = -2x, \quad g_4(x) = -1$$

и при $R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 1, R_{ij} = 0$ ($i \neq j$) уравнения Гамильтона-Якоби имеют вид:

$$Q_i + (V_i)'_x f(x) - \frac{1}{2} (V_i)'_x F(x) + \frac{1}{4} [g_i(x)]^2 [(V_i)'_x]^2 = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (6)$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^4 [g_j(x)]^2 (V_j)'_x.$$

Полагая, что

$$V_1(x) = V_2(x) = V_3(x) = V_4(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0,$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha x^6 + 4x^8 + \frac{9}{2}x^6 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^2, \\ Q_2 &= \alpha x^6 + 8x^8 + \frac{9}{4}x^6 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^2, \\ Q_3 &= \alpha x^6 + 8x^8 + \frac{9}{2}x^6 + x^4 + \frac{1}{2}x^2, \\ Q_4 &= \alpha x^6 + 8x^8 + \frac{9}{2}x^6 + 2x^4 + \frac{1}{4}x^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку все функции Q_i положительно определённые, то для этих функций и выбранных выше функций V_i уравнения Гамильтона-Якоби выполняются. Поэтому по теореме 10.4-2 из [2] имеем равновесие Нэша

$$k^* = 2x^4, \quad m^* = \frac{3}{2}x^3, \quad a^* = x^2, \quad w^* = \frac{1}{2}x, \tag{8}$$

найденное по формулам (5).

Выигрышные/проигрышные функции

$$\begin{aligned} J_1(x, k, m, a, w) &= \int_0^{+\infty} [Q_1(x) + k^2] dt, \\ J_2(x, k, m, a, w) &= \int_0^{+\infty} [Q_2(x) + m^2] dt \\ J_3(x, k, m, a, w) &= \int_0^{+\infty} [Q_3(x) + a^2] dt, \\ J_4(x, k, m, a, w) &= \int_0^{+\infty} [Q_4(x) + w^2] dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Продуктивность x в случае равновесия Нэша (8) находятся посредством интегрирования уравнений (1)-(2). Имеем

$$\int \frac{x^{-1} dx}{8x^6 + (9/2 + \alpha)x^4 + 2x^2 + 1/2} = -t + C, \tag{10}$$

где C — константа интегрирования, или

$$2 \ln(x) - \sum_R \frac{(16R^2 + 9R + 2Ra + 4) \ln(x^2 - R)}{(48R^2 + 18R + 4Ra + 4)} =$$

$$= -t + C,$$

где

$$R - \text{корень уравнения } 16Z^3 + (9 + 2a)Z^2 + 4Z + 1 = 0.$$

Для $\alpha = 0,0007$, т. е. для леса с 70% массы в верхнем ярусе и по 10% в трёх других имеем решение:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \ln(x) - 0.7721839916 \cdot \ln(x^2 + 0.35461134547644) - 0.1139080042 \cdot \ln((x^2 + 0.1039880773)^2 + \\ & + 0.1654357758) + 0.7314668785 \cdot \arctan(0.4067379695 \cdot 1/(x^2 + 0.1039880773)) \\ & = -t + C. \end{aligned}$$

В случае $C = 100$ это решение представлено на рис. 1.

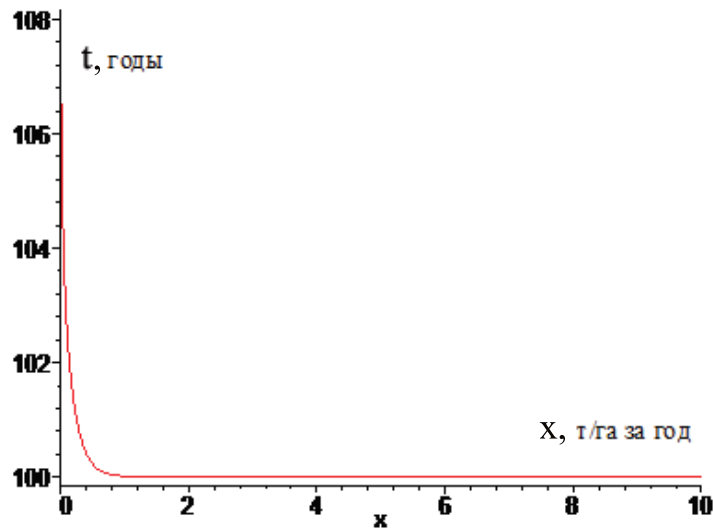


Рис. 1. Продуктивность леса в условиях равновесия Нэша (8)

Мы видим, что с течением времени продуктивность фитоценоза постепенно падает. Иначе говоря, лес асимптотически выходит на нулевое предельное значение продуктивности. Но наступает это не раньше, чем через 100 лет.

Однако если учесть, что система (1)–(2) получена, в частности, упрощением аналогичной системы [1] с функцией

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}(x - x_{гр})^6 + k(x - x_{гр})^4 + m(x - x_{гр})^3 + a(x - x_{гр})^2 + w(x - x_{гр}),$$

посредством замены $x - x_{гр} \rightarrow x$, то следует говорить об асимптотическом падении продукции фитоценоза постепенно до величины $x_{гр} > 0$.

Здесь через $x_{гр}$ обозначена характерная наблюдаемая (измеряемая) для изучаемого типа леса продукция фитомассы в отсутствии сколь-либо серьезных изменений внешних факторов. Фактически это «исходное значение» продукции фитомассы леса, наблюдаемое на протяжении ряда лет и принимаемое как точка отсчёта при прогнозировании будущих состояний экосистемы [1, с. 155].

Фактически найденное равновесие Нэша соответствует тому, что в лесоведении называется климаксом леса.

Напомним, что *климакс леса* (от греч. *klímax* – лестница) – это сравнительно зрелая, устойчивая (находящаяся в состоянии динамического равновесия с окружающей средой), «заключительная» стадия формирования фитоценоза, формирования лесной экосистемы.

Заметим, что для позиционного управления (8) получаемое уравнение продуктивности является асимптотически устойчивым (теорема 10.4-2, утверждение а из [2]). Иначе говоря, возмущения начальных условий автоматически гасятся экосистемой, находящейся в найденном равновесии Нэша, и она возвращается к исходной траектории развития. Это математическое свойство системы (1), (2), (8) вполне соответствует понятию климаксного леса.

Заключение

Мы показали, что возможно применить теорию дифференциальных игр к исследованию лесных экосистем. Мы показали, что в таких экосистемах существует равновесие Нэша, устанавливаемое в системе в случае, когда достигается некоторая определённая опосредованная связь между внешними факторами, влияющими на продуктивность леса.

В качестве дальнейшего исследования необходимо и полезно определить, какие леса и в каких случаях оказываются в равновесиях Нэша и как это выражается в терминах традиционной науки о лесах и лесных экосистемах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск : Полиграфический центр КАН, 2012. 220 с.
2. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012. URL: <http://www.uta.edu/utari/acs/FL%20talks/CDC%20Orlando%202011-%20online%20synch%20PI.pdf>.
3. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1979. Т. 17. С. 3–112.

CLIMAX FOREST AS THE NASH EQUILIBRIUM OF FOREST ECOSYSTEMS

L.A. Volodchenkova

Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. To find the possible equilibrium states of forest ecosystems one are encouraged to use the theory of differential games. At within the 4-tier model of mosaic forest communities it establishes the existence in such ecosystems the Nash equilibrium states.

Keywords: forest ecosystem, the equilibrium of the ecosystem, differential game, Nash equilibrium, climax forest.

Дата поступления в редакцию: 18.11.2016

ОБОБЩЕНИЕ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ РИМАНА ПРИ УЧЁТЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

С.Л. Дерябин

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

А.С. Кирьянова

аспирант, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

Аннотация. В работе рассматриваются двумерные изэнтропические течения политропного газа в условиях действия силы тяжести. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики. Для постановки задачи о распаде специального разрыва в системе делается вырожденная замена переменных, а именно: зависимые и независимые переменные меняются ролями. В новых переменных для системы ставится начально-краевая задача с данными на звуковой характеристике и дополнительным условием. Это условие описывает мгновенное разрушение непроницаемой стенки, отделяющей в начальный момент времени газ от вакуума. Доказывается теорема существования и единственности поставленной начально-краевой задачи в окрестности звуковой характеристики. Далее решение строится в виде степенных рядов. Для определения коэффициентов рядов выписываются и интегрируются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ структуры коэффициентов рядов позволил доказать существование построенного решения в области от звуковой характеристики до границы газ-вакуум включительно. Для определения закона движения границы газ-вакуум выписывается квазилинейная система уравнений с частными производными, которая с помощью характеристического параметра сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. После интегрирования последней системы в параметрическом виде получен закон движения границы газ-вакуум и значения параметров газа на ней.

Ключевые слова: политропный газ, вакуум, сила тяжести, система уравнений газовой динамики, граница газ-вакуум, задача о распаде специального разрыва, центрированная волна, начально-краевая задача, звуковая характеристика.

Введение

Задачи об истечении газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил рассматривались ранее в [1–5]. Подробный обзор полученных результатов можно найти в [1]. Будут рассматриваться двумерные изэнтропические течения

политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа; u, w — декартовы координаты вектора скорости газа; t, x, z — независимые переменные. Здесь: ρ — плотность газа; $\gamma > 1$ — показатель политропы газа.

1. Постановка задачи

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ с уравнением $x = 0$ отделяет идеальный политропный покоящийся газ от вакуума. В задаче предполагается, что газ находится справа от Γ , а вакуум — слева и на газ действует сила тяжести (см. рис. 1). Будет предполагаться, что в начальный момент времени $t = 0$ на стенке Γ функция $c|_{\Gamma > 0}$, то есть имеет место разрыв плотности газа.

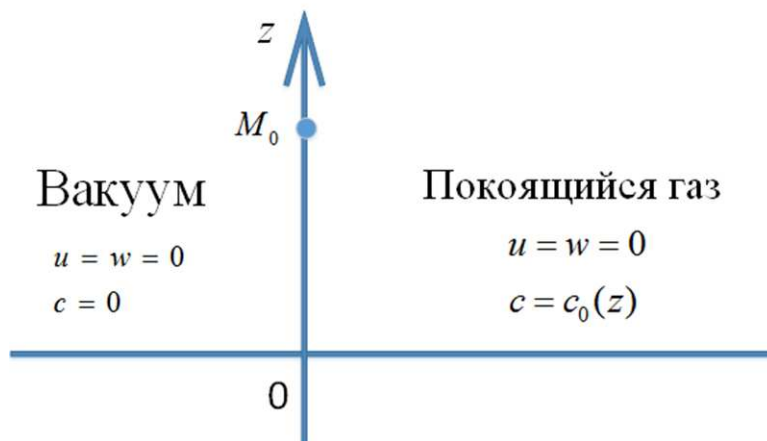


Рис. 1. Области покоя и вакуума

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ мгновенно разрушается и начинается вдоль стенки $z = 0$ истечение газа в вакуум (см. рис. 2). В рассматриваемой задаче сохраняется область покоящегося газа. В результате распада разрыва возникает течение, граничащее с областью покоящегося газа и называемое далее волной разрежения. Волна разрежения отделена от области покоящегося газа линией Γ_{12} , являющейся звуковой характеристикой этих течений, на ней имеет место слабый разрыв. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму через свободную границу Γ_{02} .

В данной работе будут строиться законы движения: свободной поверхности Γ_{02} , звуковой характеристики Γ_{12} и волна разрежения. Именно это течение в дальнейшем будет называться обобщением центрированной волны Римана.

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального по-

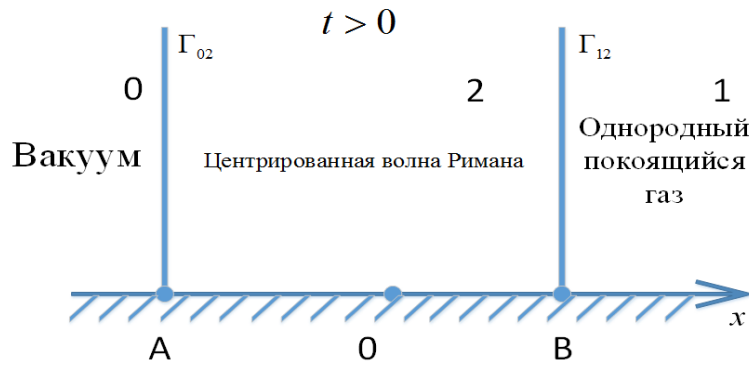


Рис. 2. Области покоя, вакуума и волны разрежения

литропного газа в условиях действия силы тяжести, имеет вид [6]:

$$\begin{aligned}
 c_t + c_x u + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_x + w_z) &= 0, \\
 u_t + u_x u + u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x &= 0, \\
 w_t + w_x u + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= -g,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения.

Если в системе (1) положить $u = w = 0$, то первые два уравнения выполняются тождественно, а в третьем уравнении получим $\frac{2}{\gamma - 1} c c_z = -g$. Интегрируя полученное уравнение, имеем $c = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}$ — распределение скорости звука покоящегося газа. Здесь c_{00} — скорость звука покоящегося газа при $z = 0$.

Далее волна разрежения строится для значений z из интервала

$$0 \leq z \leq \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}.
 \tag{2}$$

Причём на верхней границе при $z = \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}$ волна разрежения примыкает к вакууму. В данной работе волна разрежения будет построена для внутренних точек интервала (2). Конфигурация течения в окрестности непроницаемой стенки $z = 0$ и верхней границы газ-вакуум рассматриваться не будут.

Для построения волны разрежения, как и ранее [1] при построении решения задачи о распаде разрыва, в системе (1) делается следующая замена переменных: за независимые переменные берутся t, c, z , а за неизвестные функции

x, u, w . В результате такой замены вместо системы (1) получается система:

$$\begin{aligned}x_t &= u - x_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c), \\x_c u_t + (u - x_t - x_z w) u_c + x_c u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\x_c w_t + (u - x_t - x_z w) w_c + x_c w_z w - \frac{2}{\gamma - 1} c x_z &= -g x_c.\end{aligned}\tag{3}$$

Для удобства дальнейшего исследования систему (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned}x_t &= u - x_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c), \\x_c u_t - \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c) u_c + x_c u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\x_c w_t - \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c) w_c + x_c w_z w - \frac{2}{\gamma - 1} c x_z &= -g x_c.\end{aligned}\tag{4}$$

Закон движения характеристики Γ_{12} определяется из решения дифференциальной задачи [6]

$$x_t = c_0(z) \sqrt{1 + x_z^2}, \quad x(0) = 0.$$

Задача по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение, что позволяет поставить начальные данные на характеристике Γ_{12} :

$$u|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad w|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad c|_{\Gamma_{12}} = c_0(z).\tag{5}$$

Течение в области между Γ_{12} и Γ_{02} будем строить как решение системы (3) с данными (5) на характеристике Γ_{12} . Поскольку Γ_{12} — характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [7]. Если бы поверхность Γ_{12} убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Поскольку стенка $x = 0$ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных t, c, z служит [1] соотношение

$$x(0, c, z) = 0.\tag{6}$$

2. Построение волны разрежения

Теорема 1. *Существует t_0 такое, что при $0 \leq t \leq t_0$ в некоторой окрестности Γ_{12} существует единственное локально-аналитическое решение задачи (4)-(6) о распаде специального разрыва.*

Доказательство. Доказательство теоремы состоит, как и в [1], в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [7]. ■

Разложим решение задачи (4)-(6) в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(c, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{f} = \{x, u, w\}. \quad (7)$$

В системе (4) положим $t = 0$ и с учётом (6) получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (7)

$$x_1 = u_0 + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{0c},$$

$$\frac{\gamma - 1}{2} u_{0c}^2 = \frac{2}{\gamma - 1},$$

$$u_{0c} w_{0c} = 0.$$

Преобразуя уравнения, получаем

$$w_{0c} = 0, \quad u_{0c} = \frac{2}{\gamma - 1}.$$

Интегрируя с учётом (5), имеем

$$x_1 = 2\alpha c - \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad u_0 = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0(z)), \quad w_0 = 0.$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$.

Систему (4) продифференцируем по t , положим $t = 0$ с учётом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$x_2 = u_1 + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{1c},$$

$$c u_{1c} - \alpha u_1 = 0,$$

$$c w_{1c} - 2\alpha w_1 = 2\alpha g + \frac{4c_{0z}(z)}{(\gamma - 1)^2} c.$$

Интегрируя систему с учётом (5), имеем

$$x_2 = 0, \quad u_1 = 0, \quad w_1 = \left(\frac{2c_0(z)c_{0z}(z)}{\gamma - 1} + g \right) c_0^{-2\alpha}(z) c^{2\alpha} - \frac{2c_{0z}(z)}{(\gamma - 1)} c - g.$$

Вводя соответствующие обозначения, будем иметь

$$w_1 = p_{11}(z)c^{2\alpha} + p_{12}(z)c - g,$$

$$w_{1z} = p_{11z}(z)c^{2\alpha} + p_{12z}(z)c,$$

$$w_{1c} = 2\alpha p_{11}(z)c^{2\alpha-1} + p_{12}(z).$$

Систему (4) продифференцируем дважды по t , положим $t = 0$ с учётом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$x_3 = u_2 + \frac{\gamma - 1}{2}cu_{2c} + F_{12}(c, z),$$

$$cu_{2c} - 2\alpha u_2 = F_{22}(c, z),$$

$$cw_{2c} - 4\alpha w_2 = 0.$$

Здесь

$$F_{12}(c, z) = -2x_{1z}w_1 + (\gamma - 1)c(x_{1c}w_{1z} - x_{1z}w_{1c}),$$

$$F_{22}(c, z) = x_{1c}u_{0z}w_1 + \frac{\gamma - 1}{2}c(x_{1z}w_{1c} - x_{1c}w_{1z}).$$

Вводя соответствующие обозначения, будем иметь

$$F_{12}(c, z) = q_{21}(z)c^{2\alpha+1} + q_{22}(z)c^{2\alpha} + q_{23}(z)c^2 + q_{24}(z)c + q_{25}(z),$$

$$F_{22}(c, z) = p_{21}(z)c^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c^{2\alpha} + p_{23}(z)c^2 + p_{24}(z)c + p_{25}(z).$$

Интегрируя систему, имеем:

при $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} u_2 = & u_{20}(z)c^{2\alpha} + p_{21}(z)c^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c^{2\alpha} \ln c + \frac{1}{1 - 2\alpha}p_{23}(z)c^2 + \\ & + \frac{1}{2 - 2\alpha}p_{24}(z)c - \frac{1}{2\alpha}p_{25}(z) \\ w_2 = & w_{20}(z)c^\alpha; \end{aligned}$$

при $\alpha = 1$

$$u_2 = u_{20}(z)c^2 + p_{21}(z)c^3 + (p_{22}(z) + p_{23}(z))c^2 \ln c + p_{24}(z)c - \frac{1}{2}p_{25}(z)$$

$$w_2 = u_{20}(z)c.$$

Произвольные функции $u_{20}(z)$, $w_{20}(z)$ определяем с учётом (5) и окончательно имеем структуру решения:

$$w_2 = 0$$

$$u_2 = - \left[p_{21}(z)c_0^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c_0^{2\alpha} \ln c_0 + \frac{1}{1-2\alpha} p_{23}(z)c_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2-2\alpha} p_{24}(z)c_0 - \frac{1}{2\alpha} p_{25}(z) \right] c_0^{-2\alpha} c^{2\alpha} + \\ + p_{21}(z)c^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c^{2\alpha} \ln c + \frac{1}{1-2\alpha} p_{23}(z)c^2 + \frac{1}{2-2\alpha} p_{24}(z)c - \frac{1}{2\alpha} p_{25}(z).$$

Систему (4) продифференцируем k раз по t , положим $t = 0$ с учётом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$x_{k+1} = u_k + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{kc} + F_{1k}(c, z),$$

$$cu_{kc} - \alpha ku_2 = F_{2k}(c, z),$$

$$cw_{kc} - 2\alpha kw_k = F_{3k}(c, z).$$

Здесь $F_{1k}(c, z)$, $F_{2k}(c, z)$, $F_{3k}(c, z)$ — функции, известным образом зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (2.1).

Интегрируя систему, имеем

$$u_k(c, z) = c^{\alpha k} (u_{0k}(z) + \int F_{2k}(c, z) c^{-\alpha k - 1} dc),$$

$$w_k(c, z) = c^{2\alpha k} (w_{0k}(z) + \int F_{3k}(c, z) c^{-2\alpha k - 1} dc).$$

Анализ структуры коэффициентов ряда (7) приводит к следующим леммам.

Лемма 1. Коэффициенты ряда (7) при $k \geq 1$ имеют следующий вид $u_{2k-1} = 0$, $w_{2k} = 0$, $x_{2k} = 0$.

Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (7). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование системы (4) приводит к нулевой правой части соответствующего уравнения. В силу условий (5) это гарантирует нулевые значения соответствующих коэффициентов ряда (7).

Лемма 2. Коэффициенты ряда (7) при $k \geq 1$ имеют следующую структуру: $\mathbf{f}_k(c, z) = \mathbf{f}_k^0(z) + c\mathbf{P}_k(c, c \ln c, c^{2\alpha})$, где \mathbf{P}_k есть многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше чем A_k ($A = \text{const}$). Коэффициенты многочленов — функции, зависящие от z .

Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (7). После индуктивного предположения показывается, что правые части дифференциальных уравнений для \mathbf{f}_k обладают нужной структурой. После интегрирования системы доказывается, что и \mathbf{f}_k обладают нужной структурой.

На основании леммы 2 можно утверждать, что структура решения задачи (4)–(6) следующая:

$$x = x^0(t, z) + cx^1(t, c, z),$$

$$u = u^0(t, z) + cu^1(t, c, z),$$

$$w = w^0(t, z) + cw^1(t, c, z),$$

где

$$x^0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^0(z) \frac{t^k}{k!},$$

$$u^0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0(z) \frac{t^k}{k!}, \quad (8)$$

$$w^0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0(z) \frac{t^k}{k!}.$$

Для $x^0(t, z)$, $u^0(t, z)$, $w^0(t, z)$ справедлива следующая

Лемма 3. *Ряды (8) являются решением следующей задачи*

$$x_t + x_z w = u, \quad x(0, z) = 0,$$

$$u_t + x_z w = 0, \quad u(0, z) = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad (9)$$

$$w_t + x_z w = -g, \quad w(0, z) = 0.$$

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (9) и сравнением полученных рядов с рядами (8). Ряды оказываются равными. Система (9) не имеет особенностей, поэтому задача (9) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами. Следовательно, ряды (8) сходятся. На основании приведённых лемм доказывается следующая

Теорема 2. *Для $\gamma > 1$, при $0 \leq t \leq t_*$ область сходимости рядов (7), а также рядов \mathbf{f}_t , \mathbf{f}_z , \mathbf{f}_c покрывает всю зону течения от Γ_{12} до Γ_{02} включительно. При этом закон движения свободной границы определяется из решения вспомогательной задачи (9).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству из [1] и проводится по методике [7], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной. При доказательстве используется теорема 1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда. ■

Проведём исследование задачи (9). С помощью введения характеристического параметра данная система уравнений с частными производными сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [8].

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= 1, & \frac{dx}{d\tau} &= u, & \frac{dz}{d\tau} &= w, \\ \frac{du}{d\tau} &= 0, & \frac{dw}{d\tau} &= -g. \end{aligned} \tag{10}$$

Интегрируя систему (10), имеем $t = \tau$,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2}{\gamma-1}c_0(z), & x &= -\frac{2}{\gamma-1}c_0(z)t, \\ w &= -gt, & z &= z_{00} - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Выводы

Проведённые исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Доказана теорема существования и единственности поставленной начально-краевой задачи.
2. В виде сходящихся рядов построено течение газа, отвечающее области от неоднородного покоящегося газа до вакуума включительно.
3. В виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений получен закон движения границы газ-вакуум.

Благодарности

В заключении авторы благодарят С.П. Баутина и С.С. Титова за полезное обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
2. Дерябин С.Л. Трёхмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч.тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1987. Вып. 83. С. 60–71.
3. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.

4. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Труды института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН, 2010. Т. 16. С. 63–74.
5. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск : Наука, 2015. 191 с.
6. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.

GENERALIZATION OF A CENTERED RIEMANN WAVE TAKING INTO ACCOUNT THE FORCES OF GRAVITY

S.L. Deryabin

Dr.Sc. (Phys.-Math.) Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

A.S. Kiryanova

Graduate Student, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. The paper examines two-dimensional isentropic flow of a polytropic gas under the action of gravity. As a mathematical model a system of equations of gas dynamics is used. To put the problem of decay of a special break the degenerate change of variables is made in the system, namely: dependent and independent variables change roles. In the new variables for the system initial-boundary value problem with data on the characteristics of the sound and the additional condition is put. This condition describes the instantaneous destruction of the impermeable wall separating the gas from the vacuum at the initial time. We prove the existence and uniqueness of the initial-boundary value problem in the vicinity of the sound characteristics. Next, the solution is constructed in the form of a power series. To determine the coefficients of the series systems of ordinary differential equations are written and integrated. Coefficients of the series structure analysis has proved the existence of the built solution in the range from the sound characteristics to the boundary of the gas-vacuum inclusive. To determine the law of motion of gas-vacuum boundary quasi-linear system of partial differential equations is written, which by means of a characteristic parameter is reduced to a system of ordinary differential equations. After integration of the latter system in parametric form the law of motion of gas-vacuum boundary values and parameters of the gas on it are obtained.

Keywords: polytropic gas, vacuum, force of gravity, the gas dynamics equations, gas-vacuum boundary, initial-boundary value problem, Riemann problem, centered wave.

Дата поступления в редакцию: 17.12.2016

О ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛАХ ДЛЯ ЧИСЛА ЛОКАЛЬНЫХ ОПТИМУМОВ

А.В. Еремеев¹

доцент, д.ф.-м.н., e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

К.Р. Ривс²

профессор, e-mail: c.reeves@coventry.ac.uk

¹Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

²Университет Ковентри

Аннотация. Число локальных оптимумов является важным показателем сложности задач оптимизации для алгоритмов локального поиска. В настоящей работе обсуждаются некоторые методы нахождения доверительных интервалов для этого параметра в задачах, где мощность пространства поиска не позволяет выполнить полный перебор решений. Представлены результаты вычислительных экспериментов, полученные с использованием предложенных методов для модели \mathcal{NK} ландшафтов С. Кауффмана, задачи отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией, задачи о вершинном покрытии и задачи распределения бункерных ёмкостей в производственных линиях.

Ключевые слова: локальный поиск, задача комбинаторной оптимизации, перепись Шнабеля, консервативный доверительный интервал.

Введение

Значительное число эвристических методов решения задач комбинаторной оптимизации основано на поиске улучшающих решений в *окрестности* некоторой текущей точки. При этом могут быть использованы различные стратегии выбора новой текущей точки из окрестности, в которую будет сделан очередной переход. На практике такие методы быстро приходят к локальному оптимуму, после чего требуется либо начинать поиск с новой точки (см., например, [20, 30, 34]), либо прибегать к некоторому правилу постепенного выхода из окрестности, как это делается в алгоритмах поиска с запретами [14] и поиска с переменными окрестностями [16]. Как показывает практика, для успешного применения таких методов большое значение имеет удачный выбор системы окрестностей. Сложность индивидуальной задачи с заданной системой окрестностей характеризуется такими параметрами, как трудоёмкость выбора улучшающего решения в окрестности, среднее и максимальное число шагов до локального оптимума, гарантированная относительная погрешность локальных оптимумов и общее их число. Исследование генетических алгоритмов также

приводит к необходимости анализа структуры множества локальных оптимумов [26].

В настоящей работе предлагаются и обосновываются статистические методы построения доверительных интервалов для числа локальных оптимумов на основе результатов многократного выполнения локального поиска. Методы предназначены для исследования индивидуальных задач комбинаторной оптимизации, в которых большая размерность пространства решений не позволяет осуществить полный перебор всех его элементов за приемлемое время. Будем далее обозначать число локальных оптимумов задачи через ν .

Из литературы известно несколько подходов к оцениванию величины ν на основе результатов многократного выполнения локального поиска из случайно выбранных начальных точек. Один из подходов основывается на упрощающем предположении о том, что все локальные оптимумы имеют равные вероятности попадания в них (предположение *изотропности*) [27]. Другие подходы состоят в подборе параметров некоторого распределения вероятностей (экспоненциального, гамма, логнормального и т.д.) [12, 28] для описания вероятности попадания в различные локальные оптимумы или использовании таких непараметрических методов, как бутстреп-метод или метод складного ножа [28, 29]. Некоторые из этих подходов основываются на методах, разработанных в статистике и экологии для оценивания численности популяций (см., например, [24, 33]).

Настоящая работа представляет собой расширение краткой статьи [11] и содержит более детальный теоретический анализ и более широкое экспериментальное исследование. В п. 1 рассматриваются методы построения консервативных доверительных интервалов, основанные непосредственно на функции распределения наблюдаемой целочисленной случайной величины. Здесь же предложены методы их вычисления, основанные на первом повторении локального оптимума и на числе различных локальных оптимумов, полученных за время испытаний. В п. 2 приводятся описание тестовых примеров и результаты вычислительных экспериментов, проведённых с предложенными методами построения доверительных интервалов и с непараметрическим бутстреп-методом из [29]. Описание последнего содержится в приложении.

1. Методы построения доверительных интервалов

Рассмотрим сначала достаточно общую ситуацию, когда при любом значении представляющего интерес неизвестного параметра ν функция распределения наблюдаемой целочисленной случайной величины T известна. Пусть $\mathbf{F}(t; \nu) = \mathbf{P}\{T \leq t\}$ — функция распределения величины T при указанном значении ν . Наблюдаемое значение величины T , полученное в фактически проведённом эксперименте, будем обозначать через τ , $\tau \in \mathbb{N}$.

Если упрощённо считать, что ν может принимать любое вещественное значение и $\mathbf{F}(t; \nu)$ непрерывно зависит от ν , то при заданных вероятностях α_1, α_2 , таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, доверительный интервал $[\nu_1(\tau), \nu_2(\tau)]$ уровня

$(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot 100\%$ может быть построен решением уравнений

$$1 - \mathbf{F}(\tau; \nu_1) = \alpha_1, \quad \mathbf{F}(\tau; \nu_2) = \alpha_2 \quad (1)$$

относительно неизвестных ν_1 и ν_2 (см., например, [4, 22]).

Далее интервал $\nu_1(\tau) \leq \nu \leq \nu_2(\tau)$ будем называть консервативным доверительным интервалом с доверительным уровнем $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, если с вероятностью не менее $1 - \alpha$ выполняются неравенства $\nu_1(\tau) \leq \nu \leq \nu_2(\tau)$. В случае $\nu_2(\tau) = +\infty$ консервативный доверительный интервал будем называть консервативной нижней границей.

Поскольку в поставленной задаче параметр ν принимает только натуральные значения, необходимо соответственно адаптировать (1).

Утверждение 1. Пусть

$$\nu_1(\tau) = \min\{\nu' \in \mathbb{N} : 1 - \mathbf{F}(\tau - 1; \nu') \geq \alpha_1\},$$

$$\nu_2(\tau) = \max\{\nu' \in \mathbb{N} : \mathbf{F}(\tau; \nu') \geq \alpha_2\},$$

тогда $[\nu_1(\tau), \nu_2(\tau)]$ является консервативным доверительным интервалом целочисленного параметра ν с уровнем значимости $(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot 100\%$, причём $\mathbf{P}\{\nu < \nu_1(T)\} \leq \alpha_1$, $\mathbf{P}\{\nu_2(T) < \nu\} \leq \alpha_2$.

Доказательство. Пусть для некоторого значения ν утверждение неверно. Тогда имеет место по крайней мере одно из двух неравенств: $\alpha_1 < \mathbf{P}\{\nu < \nu_1(\tau)\}$, $\alpha_2 < \mathbf{P}\{\nu_2(\tau) < \nu\}$.

В первом случае

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \mathbf{P}\{\nu < \min(\nu' : 1 - \mathbf{F}(T - 1; \nu') \geq \alpha_1)\} &\leq \mathbf{P}\{1 - \mathbf{F}(T - 1; \nu) < \alpha_1\} = \\ &= \mathbf{P}\{T - 1 \geq \min(\Theta : 1 - \mathbf{F}(\Theta; \nu) < \alpha_1)\} = \mathbf{P}\{T \geq \Theta_{\min}(\nu, \alpha_1)\}, \end{aligned}$$

где $\Theta_{\min}(\nu, \alpha_1) = \min\{\Theta' : 1 - \mathbf{F}(\Theta' - 1; \nu) < \alpha_1\}$. Однако

$$\mathbf{P}\{T \geq \Theta_{\min}(\nu, \alpha_1)\} = 1 - \mathbf{F}(\Theta_{\min}(\nu, \alpha_1) - 1; \nu) < \alpha_1 \quad (2)$$

по определению Θ_{\min} , что приводит к противоречию.

Во втором случае

$$\begin{aligned} \alpha_2 < \mathbf{P}\{\max\{\nu' : \mathbf{F}(T; \nu') \geq \alpha_2\} < \nu\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\{\mathbf{F}(T; \nu) < \alpha_2\} = \mathbf{P}\{T < \theta_{\min}(\nu, \alpha_2)\}, \end{aligned}$$

где $\theta_{\min}(\nu, \alpha_2) = \min\{\theta : \mathbf{F}(\theta; \nu) \geq \alpha_2\}$. Однако $\mathbf{P}\{T < \theta_{\min}(\nu, \alpha_2)\} < \alpha_2$. \square

Модифицируем предыдущее утверждение с целью нахождения консервативной нижней границы заданного доверительного уровня α в случае, когда распределение вероятностей случайной величины T зависит не только от ν , но и от дополнительного вектора параметров \mathbf{y} , принадлежащего некоторому множеству $\mathcal{Y}(\nu) \subseteq \mathbb{R}^r$. Обозначим в таком случае функцию распределения для T через $\mathbf{F}(t; \nu, \mathbf{y})$.

Утверждение 2. Пусть

$$\nu_1(\tau) = \min \left\{ \nu' \in \mathbb{N} : 1 - \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\nu')} \mathbf{F}(\tau - 1; \nu', \mathbf{y}) \geq \alpha \right\},$$

тогда $\mathbf{P}\{\nu < \nu_1(T)\} \leq \alpha$.

Доказательство. Достаточно в доказательстве предыдущего утверждения заменить определение $\Theta_{\min}(\nu, \alpha)$ на

$$\Theta_{\min}(\nu, \alpha) = \min \left\{ \Theta' \in \mathbb{N} : 1 - \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\nu)} \mathbf{F}(\Theta' - 1; \nu, \mathbf{y}) < \alpha \right\},$$

и соответствующим образом модифицировать неравенство (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T \geq \Theta_{\min}(\nu, \alpha)\} &= 1 - \mathbf{F}(\Theta_{\min}(\nu, \alpha) - 1; \nu, \mathbf{y}) \leq \\ &\leq 1 - \inf\{\mathbf{F}(\Theta_{\min}(\nu, \alpha) - 1; \nu, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\nu)\} < \alpha. \end{aligned}$$

□

Если при любом t функция $\mathbf{F}(t; \nu)$ (функция $\mathbf{F}_{\mathcal{Y}}(t, \nu) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\nu')} \mathbf{F}(\tau - 1; \nu', \mathbf{y})$) монотонна по ν , то доверительный интервал из утверждения 1 (утверждения 2) может быть вычислен с помощью метода дихотомии. Ниже будет показано, что для рассматриваемых в настоящей работе оценок величины ν монотонность по ν имеет место.

1.1. Ожидание первого повторения

Пусть p_i — вероятность попадания локального поиска в локальный оптимум i , $i = 1, \dots, \nu$, и пусть T — номер испытания локального поиска, при котором впервые получен ранее встречавшийся локальный оптимум. Функцию распределения случайной величины T , соответствующую вектору $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\nu)$, будем обозначать через $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$. В частном случае *изотропного распределения*, когда вероятности попадания во все локальные оптимумы одинаковы, введём обозначение $\bar{\mathbf{p}} = (1/\nu, \dots, 1/\nu)$.

Следующее утверждение показывает, что изотропное распределение является в некотором смысле экстремальным.

Утверждение 3. Для любых $t, \nu \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, функция $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$ достигает своего единственного минимума при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$.

Доказательство. Пусть S — множество всех последовательностей длины t из элементов множества $\{1, \dots, \nu\}$, не содержащих повторений, и пусть $\sigma(i)$ — i -й элемент последовательности σ . Тогда

$$\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu) = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - \sum_{\sigma \in S} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)}.$$

$\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$ — непрерывная функция на компактном множестве

$$\Lambda = \left\{ (p_1, p_2, \dots, p_\nu) \geq 0 : \sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1 \right\},$$

когда t фиксировано. Таким образом, существует распределение вероятностей попадания в локальные оптимумы, при котором достигается минимум функции $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$ на Λ . Покажем, что никакое распределение \mathbf{p} , кроме $\bar{\mathbf{p}}$, таким свойством не обладает.

Предположим противное: пусть минимум достигается на векторе \mathbf{p} , где $p_i \neq p_j$ для некоторых i и j . Не теряя общности, предположим, что $i = 1, j = 2, p_2 = \gamma p_1$ и $\gamma < 1$. Рассмотрим распределение вероятностей

$$p'_1 = p'_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}, p'_3 = p_3, \dots, p'_\nu = p_\nu$$

и соответствующую ему функцию распределения $\mathbf{F}_{\mathbf{p}'}(t; \nu)$. Достаточно показать, что $\mathbf{F}_{\mathbf{p}'}(t; \nu) < \mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$, т.к. это приведёт к противоречию с оптимальностью \mathbf{p} . Обозначим через $S(j)$ подмножество S , состоящее из тех последовательностей, в которые входит элемент $j, j = 1, 2$. Тогда $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu) = 1 - a(\mathbf{p}) - b(\mathbf{p}) - c(\mathbf{p}) - d(\mathbf{p})$, где

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma \in S(1) \cap S(2)} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)}, & b(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma \in S(1) \setminus S(2)} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)}, \\ c(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma \in S(2) \setminus S(1)} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)}, & d(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma \in S \setminus (S(1) \cup S(2))} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)}. \end{aligned}$$

Аналогично $\mathbf{F}_{\mathbf{p}'}(t; \nu) = 1 - a(\mathbf{p}') - b(\mathbf{p}') - c(\mathbf{p}') - d(\mathbf{p}')$ и $d(\mathbf{p}') = d(\mathbf{p})$. Заметим, что если элемент 2 во всех последовательностях из $S(2) \setminus S(1)$ заменить на 1, то будет получено множество последовательностей $S(1) \setminus S(2)$. Таким образом, с одной стороны,

$$\begin{aligned} b(\mathbf{p}) + c(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma \in S(1) \setminus S(2)} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)} + \gamma \left(\sum_{\sigma \in S(1) \setminus S(2)} \prod_{i=1}^t p_{\sigma(i)} \right) \\ &= (1 + \gamma)p_1 \cdot \sum_{\sigma \in S(1) \setminus S(2)} \prod_{i: \sigma(i) \neq 1} p_{\sigma(i)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $p'_1 = p'_2 = (p_1 + p_2)/2$, поэтому

$$b(\mathbf{p}') + c(\mathbf{p}') = (p_1 + p_2) \sum_{\sigma \in S(1) \setminus S(2)} \prod_{i: \sigma(i) \neq 1} p_{\sigma(i)}$$

и $b(\mathbf{p}) + c(\mathbf{p}) = b(\mathbf{p}') + c(\mathbf{p}')$. Далее

$$a(\mathbf{p}) = \gamma p_1^2 \cdot \sum_{\sigma \in S(1) \cap S(2)} \prod_{i: \sigma(i) \neq 1, 2} p_{\sigma(i)},$$

$$a(\mathbf{p}') = \left(\frac{p_1(1+\gamma)}{2} \right)^2 \sum_{\sigma \in S(1) \cap S(2)} \prod_{i: \sigma(i) \neq 1,2}^t p_{\sigma(i)}.$$

Однако $(1+\gamma)^2 > 4\gamma$, поэтому $a(\mathbf{p}') > a(\mathbf{p})$ и $\mathbf{F}_{\mathbf{p}'}(t; \nu) < \mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$. \square

Как следствие из доказанного утверждения вытекает свойство монотонности функции $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{p}}}(t; \nu)$.

Следствие 1. $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{p}}}(t; \nu)$ является строго убывающей функцией от ν .

Доказательство. Достаточно сравнить оптимальное по утверждению 3 значение $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{p}}}(t; \nu)$ с величиной $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t; \nu)$, где $\mathbf{p} = (1/(\nu-1), 1/(\nu-1), \dots, 1/(\nu-1), 0)$. \square

Ввиду монотонности $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{p}}}(t; \nu)$ по ν , в изотропном случае доверительный интервал для ν может быть вычислен методом дихотомии с использованием утверждения 1, при этом $\mathbf{F}(t; \nu) = 1 - \binom{\nu}{t} t! / \nu^t$. Консервативная нижняя граница ν_1 с заданным доверительным уровнем $100 \cdot (1 - \alpha)\%$, справедливая при любом распределении \mathbf{p} , вытекает из утверждения 2. Далее будем обозначать эту границу через $L(t, 1 - \alpha)$.

Если задача оптимизации имеет чрезвычайно большое число локальных оптимумов, а число испытаний локального поиска r оказалось недостаточным, чтобы встретить хотя бы один локальный оптимум более одного раза, то консервативная нижняя граница доверительного уровня $100(1 - \alpha)\%$ для ν может быть вычислена в предположении о том, что следующее (гипотетическое) испытание приведёт к первому повторению. Оценим скорость роста оценки $L(r+1, 1 - \alpha)$ как функции от r . Заметим, что согласно утверждению 2, $L(r+1, 1 - \alpha)$ есть минимальное значение μ , при котором $\binom{\mu}{r} r! / \mu^r \geq \alpha$. Однако

$$\begin{aligned} \binom{\mu}{r} \frac{r!}{\mu^r} &= \frac{\mu!}{(\mu-r)! \mu^r} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^r \ln \left(1 - \frac{r-j}{\mu} \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ - \sum_{j=1}^r \frac{r-j}{\mu} \right\} = \exp \left\{ - \frac{r(r+1)}{2\mu} \right\} \leq \exp \left\{ - \frac{r^2}{2\mu} \right\}, \end{aligned}$$

поэтому $L(r+1, 1 - \alpha) \geq 0.5r^2 / \ln(\alpha^{-1})$, и, к примеру, при $\alpha = 0.05$ имеем $0.5r^2 / \ln(\alpha^{-1}) \approx 0.167r^2$. При больших значениях r эта простая оценка хорошо аппроксимирует величину $L(r+1, 1 - \alpha)$.

1.2. Метод переписи Шнабеля

Один из методов, используемых в экологии для оценки численности популяций, носит название *переписи Шнабеля* [32, 33]. Из популяции с неизменным составом производится отлов заранее заданного числа особей, каждая из которых имеет константную вероятность отлова. При отлове особь помечается (если она не была помечена ранее) и возвращается обратно в популяцию. Статистические оценки численности популяции вычисляются на основе данных о числе помеченных особей среди отловленных.

Для оценки числа локальных оптимумов метод переписи Шнабеля адаптируется следующим образом. Выполняются r испытаний локального поиска из начальных точек, выбранных случайным образом с одинаковым распределением (число r выбирается априори). Пусть K — случайная величина, равная числу различных локальных оптимумов, полученных за r испытаний. Обозначим через $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(k; \nu, r) = \mathbf{P}\{K \leq k\}$ функцию распределения величины K в предположении о том, что $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\nu)$ — вектор вероятностей попадания в локальные оптимумы.

Для вычисления доверительных интервалов на параметр ν известны приближенные методы, в которых используется аппроксимация распределения величины K нормальным распределением (см., например, [27, 33]), а также точные методы [13, 23], основанные на непосредственном вычислении функции распределения, подобно выражениям из утверждения 1.

Как было замечено в [7], в изотропном случае распределение вероятностей случайной величины K имеет вид:

$$\mathbf{P}\{K = k\} = \frac{\nu(\nu - 1)\dots(\nu - k + 1) S(r, k)}{\nu^r} = \frac{\nu! S(r, k)}{(\nu - k)! \nu^r}, \quad (3)$$

где $S(r, k)$ — число Стирлинга второго рода, равное количеству способов разбить r -элементное множество на k непустых подмножеств без учета порядка подмножеств, $S(r, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^r$.

Для вычисления оценки максимального правдоподобия $\hat{\nu}(r, k)$ может быть рассмотрена величина

$$\mathcal{L}(\nu, r, k) = \ln(\mathbf{P}\{K = k\}) = \ln \nu! - \ln(\nu - k)! + \ln S(r, k) - r \ln \nu.$$

В [8] Дж. Даррохом предложено приближённо (с погрешностью не более единицы) вычислять $\hat{\nu}(r, k)$, как корень уравнения $\mathcal{L}(\nu, r, k) = \mathcal{L}(\nu - 1, r, k)$, т. е.

$$(\nu - 1)^r = \nu^{r-1}(\nu - k), \quad (4)$$

т. к. $\ln \nu! - \ln(\nu - 1)! = \ln \nu$. Корень уравнения (4) может быть вычислен с помощью метода Ньютона или методами оптимизации унимодальной функции на прямой. Заметим, что при $k = r$ уравнение $\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{L}(\nu, r, k) = 0$ не имеет конечного решения, и оценка $\hat{\nu}(r, k)$ лишена смысла.

Найденные в [8] асимптотические оценки дисперсии позволяют построить консервативный доверительный интервал с центром в точке $\hat{\nu}(r, k)$, используя упрощающее предположение о нормальности распределения данной оценки. Как показано в [13, 23], более точно вычислить консервативный доверительный интервал удаётся при использовании нормальной аппроксимации распределения K . Однако оба подхода могут давать существенные ошибки в ситуациях, когда предположение нормальности оказывается неуместным. Как видно из рис. 1, доверительный интервал из [8] даёт корректные оценки при достаточно больших значениях r . При малых значениях r возникают погрешности из-за нарушения гипотезы нормальности.

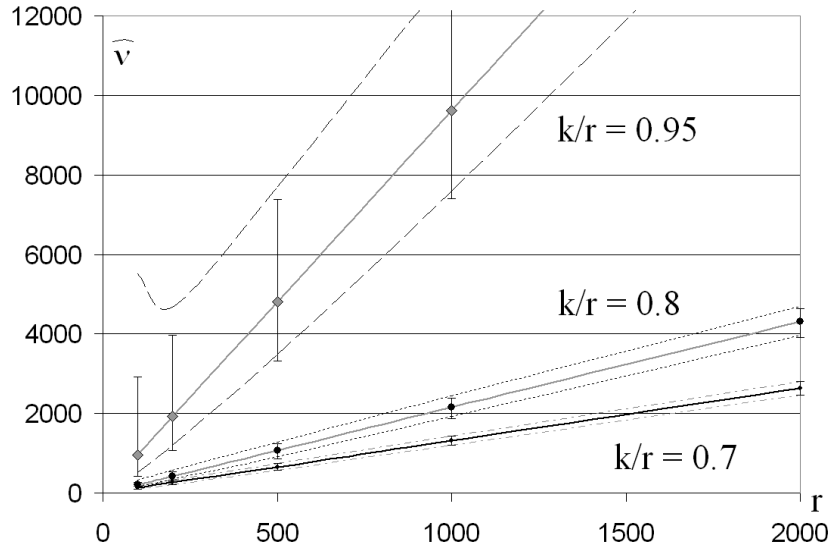


Рис. 1. Доверительные интервалы для ν , построенные симметрично к оценке $\hat{\nu}(r, k)$ по методу Дж. Дарроха [8] и по точным формулам из утверждения 1. Пунктирные линии показывают 95% доверительные интервалы, полученные в предположении нормальности K . Сплошные линии — оценки максимального правдоподобия с точными 95% доверительными интервалами.

Рассмотрим следствие основного результата А.М. Зубкова и Н.Н. Попова из [2], на основе которого будет получен аналог утверждения 3 для переписи Шнабеля. Пусть имеется r частиц, размещаемых случайным образом, независимо, с одинаковым распределением по ячейкам $1, 2, \dots, \nu$. Вероятность попадания в j -ю ячейку равна p_j , $j = 1, \dots, \nu$, $\sum_{j=1}^{\nu} p_j = 1$. Как показано в [2], в случае изотропного распределения вероятностей $(p_1, \dots, p_{\nu}) = \bar{\mathbf{p}}$ число занятых ячеек $\mu(r, \bar{\mathbf{p}})$ «стохастически больше» числа занятых ячеек $\mu(r, \mathbf{p}')$ при любом другом распределении вероятностей \mathbf{p}' , т.е. $\mathbf{P}\{\mu(r, \bar{\mathbf{p}}) \leq k\} \leq \mathbf{P}\{\mu(r, \mathbf{p}') \leq k\}$ для всех $r \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, \nu$.

Обозначая через $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(k; r, \nu)$ функцию распределения случайной величины K при вероятностях попадания в локальные оптимумы p_1, \dots, p_{ν} , $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{\nu})$, указанный выше результат из [2] записывается как

Утверждение 4. При любых фиксированных $\nu \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, r$, функция $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(k; r, \nu)$ достигает минимума в точке $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$.

Утверждение 4 позволяет вычислять консервативную нижнюю границу $L'(r, k, \mathbf{p})$ для ν с заданным доверительным уровнем p ввиду утверждения 2. Корректность такой нижней границы при условии справедливости утверждения 4 была отмечена нами в [11]. Аналогичная нижняя граница предложена Ч. Мао в [21]. Заметим, что $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(r; \nu, r) = 1$ при любом ν , поэтому при $k = r$ нижняя оценка $L'(r, k, \mathbf{p})$ не определена. Подобно доказательству следствия 1, из утверждения 4 получаем

Следствие 2. $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{p}}}(k; r, \nu)$ является невозрастающей функцией от ν при любых $r \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, r$.

Последнее следствие было независимо доказано в [11,23] без использования результата [2]. Это следствие даёт основание применению метода дихотомии для построения нижней границы $L'(r, k, \mathbf{p})$ в соответствии с утверждением 2, а в изотропном случае – консервативного доверительного интервала в соответствии с утверждением 1.

2. Экспериментальное исследование

2.1. Используемые задачи

Изложенные выше методы оценивания числа локальных оптимумов были опробованы на ряде комбинаторных задач оптимизации. Среди них задачи с целевыми функциями, построенными случайным образом по модели \mathcal{NK} -ландшафтов С. Кауффмана [19], задачи отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией [15], задачи о вершинном покрытии и задачи распределения бункерных ёмкостей в производственных линиях [9]. Перечисленные задачи формулируются следующим образом.

Модель \mathcal{NK} -ландшафтов предложена в [19] для генерации индивидуальных задач безусловной оптимизации с настраиваемой «изрезанностью ландшафта» целевой функции $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ при размерности пространства решений $n = \mathcal{N}$. Значение этой функции в точке $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ определяется как среднее арифметическое значений вспомогательных функций $F_i(x_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $i = 1, \dots, n$, каждая из которых зависит от соответствующей компоненты x_i , а также от других \mathcal{K} компонент x_{i_1}, \dots, x_{i_k} . Наборы номеров $\{i_1, \dots, i_k\}$ на этапе генерации исходных данных выбираются случайным образом среди \mathcal{K} -элементных подмножеств множества $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ с равномерным распределением. Значения функции F_i , $i = 1, \dots, n$, для каждого из $2^{\mathcal{K}+1}$ возможных значений её аргумента назначаются датчиком случайных чисел, выбираемых из интервала $[0, 1)$. Эти значения также входят в исходные данные задачи.

Задача отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией состоит в отыскании вектора $\mathbf{y} \in \{-1, +1\}^n$, минимизирующего сумму $\sum_{j=1}^{n-1} c_j^2$, где c_j — величина автокорреляции для последовательности \mathbf{y} при смещении j , которая в данном случае имеет вид $c_j = \sum_{i=1}^{n-j} y_i y_{i+j}$. Индивидуальная задача отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией полностью описывается числом n .

Незвешенная задача о вершинном покрытии (ЗВП). Данная задача является NP-трудной в сильном смысле (см., например, [1]) и имеет следующую постановку. Пусть дан граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством рёбер E . Подмножество $C \subseteq V$ называется *вершинным покрытием* в G , если каждое ребро инцидентно хотя бы одной вершине из C . Требуется найти вершинное покрытие C^* минимальной мощности.

Пусть в графе $G = (V, E)$ множество вершин имеет вид $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Для представления ЗВП в форме задачи безусловной оптимизации на множестве $\{0, 1\}^n$ предположим, что элемент x_j , $j = 1, \dots, n$, равен 1 тогда и только тогда, когда вершина v_j входит в искомое множество. Обозначим через $C(\mathbf{x})$ множество вершин, соответствующее вектору \mathbf{x} . Пусть целевая функция $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j$ в случае, если $C(\mathbf{x})$ — вершинное покрытие; иначе вводится штраф за нарушение ограничений задачи и значение целевой функции полагается равным $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j + u(\mathbf{x}) \cdot |V|$, где $u(\mathbf{x})$ — число рёбер в E , которым не инцидентна ни одна вершина из $C(\mathbf{x})$.

Для экспериментов с ЗВП далее используются тестовые примеры для задачи о наибольшей клике из коллекции DIMACS [18], преобразованные в индивидуальные задачи о вершинном покрытии с помощью известного преобразования (см., например, [1]).

Задача распределения бункерных ёмкостей в производственной линии.

При управлении производственными линиями, в которых детали перемещаются от одной единицы оборудования (ЕО) к другой с помощью некоторого транспортного механизма, возникает следующая задача оптимизации объёмов бункеров. Предполагается, что вследствие отказов оборудования в процессе работы линии возникают остановки ЕО, случайные по моменту возникновения и длительности. Последствия отказов распространяются на смежные операции из-за невозможности передать деталь на следующую операцию или отсутствия деталей на входе ЕО. Наличие бункеров (ёмкостей) для складирования деталей между ЕО позволяет снизить влияние отказов на соседние операции и повысить среднюю производительность линии. Однако установка бункеров связана с дополнительными капитальными затратами и увеличением числа складироваемых деталей. Задача состоит в выборе объёмов бункеров с учётом средней производительности линии $V(\mathbf{h})$ в стационарном режиме, капитальных затрат на установку бункеров $J(\mathbf{h})$ и средней стоимости хранения деталей $Q(\mathbf{h})$ в стационарном режиме.

Любая ЕО может находиться в состояниях «работа», «отказ» (идёт восстановление ЕО после её поломки), «блокировка» (невозможно передать обработанную деталь на следующую операцию) и «простой» (отсутствие деталей на входе ЕО). Пусть n — количество бункеров, m — число ЕО в линии. Через \mathbb{Z}_+ обозначим множество неотрицательных целых чисел. Введём вектор переменных $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, где h_i — объём i -го бункера, $i = 1, \dots, n$. Структура линии представляется ориентированным последовательно-параллельным графом G , у которого вершины b_0, \dots, b_{n+1} отвечают бункерам, а дуги a_1, \dots, a_m — единицам оборудования. Каждая дуга направлена от вершины входного бункера соответствующей ЕО к вершине его выходного бункера. Возможны кратные дуги, т.е. параллельно работающие ЕО с общими бункерами. Единственная вершина b_0 , не имеющая входящих дуг, соответствует входному бункеру линии, а единственная вершина b_{n+1} без выходящих дуг — выходному. Каждой вершине b_j приписано максимальное число вмещаемых деталей h_j в бункер j , причём $h_0 = h_{n+1} = \infty$. Предполагается, что на входе линии всегда имеется до-

статочное число деталей и обработанные детали всегда могут быть помещены в выходной бункер, поскольку он имеет неограниченный объём.

Каждая дуга a_i графа G характеризуется тройкой параметров $(T_i^O, T_i^B, U_i) \in \mathbb{R}_+^3$. Находясь в состоянии «работа», ЕО с номером i имеет постоянное время обработки детали U_i , $i = 1, \dots, m$. Отказы и восстановления различных ЕО происходят независимо, и время наработки на отказ, также как и время восстановления ЕО, имеет экспоненциальное распределение. Для каждой ЕО T_i^O — среднее время наработки на отказ, а T_i^B — среднее время восстановления. В состояниях «блокировка» и «простой» ЕО не отказывает.

Обозначим среднее число деталей в стационарном режиме через $q_j(\mathbf{h})$. Тогда критерий максимизации имеет вид

$$f(V(\mathbf{h}), B(\mathbf{h}), Q(\mathbf{h})) = T_{am}S(V(\mathbf{h})) - J(B(\mathbf{h})) - T_{am} \sum_{j=1}^{n-1} c_j q_j(\mathbf{h}),$$

где T_{am} — период амортизации линии; $S(V(\mathbf{h}))$ — доход от продажи готовой продукции за единицу времени; c_j — затраты на хранение одной детали в бункере j в единицу времени; $J(B(\mathbf{h}))$ — капитальные затраты на установку бункеров. В качестве метода приближенного вычисления средней производительности линии $V(\mathbf{h})$ и среднего числа деталей $q_j(\mathbf{h})$ в каждом бункере j используется метод из [6], основанный на замене участков линии эквивалентными ЕО с применением марковских моделей для пар последовательных и параллельных ЕО.

2.2. Результаты экспериментов

В экспериментах с описанными выше задачами используется система окрестностей радиуса 1, порождённая метрикой Хэмминга. Для задач, построенных по модели \mathcal{NK} -ландшафтов и задач отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией и задач распределения ёмкостей бункерных устройств выполнялось по 1000 независимых испытаний алгоритма локального поиска. Для большинства задач вершинного покрытия этот параметр был увеличен до 10000.

В некоторых задачах малой размерности удавалось осуществить полный перебор элементов пространства решений — в таких случаях построенные доверительные интервалы сравниваются с истинным значением ν . В случаях, когда полный перебор оказывался чрезмерно трудоёмким, доверительные интервалы сравнивались с бутстреп-оценкой из [10, 29], показавшей хорошие результаты в экспериментах [10, 17]. Описание бутстреп-метода из [29] приводится в приложении. При расчётах бутстреп-методом число независимых реализаций B всюду полагалось равным 1000.

Модель \mathcal{NK} -ландшафтов. Эксперименты по оценке числа локальных оптимумов в задачах, построенных по модели \mathcal{NK} -ландшафта, проводились при

различной «изрезанности ландшафта», определяемой величиной \mathcal{K} в диапазоне от 2 до 12, в то время как размерность $n = 15$ оставалась неизменной. Рис. 2 показывает истинное число локальных оптимумов и двухсторонние 95%-доверительные интервалы, вычисленные методом переписи Шнабеля в предположении изотропности $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$ с использованием утверждения 1. Доверительные интервалы вокруг значений максимума правдоподобия $\hat{\nu}(r, k)$ рассчитаны в предположении изотропности. Рисунок также содержит нижние границы $L(t, 0.95)$ и $L'(t, 0.95)$ доверительного уровня 95%.

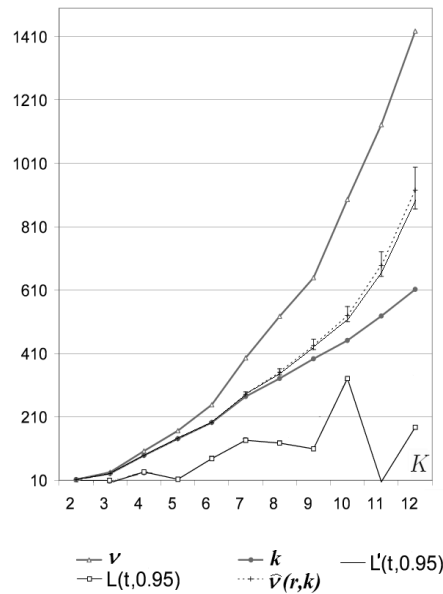


Рис. 2. Доверительные интервалы для числа локальных оптимумов в \mathcal{NK} -ландшафтах

График значений ν на рис. 2 существенно отклоняется от оценки максимального правдоподобия по методу Шнабеля, что показывает неадекватность предположения об изотропности применительно к задачам данного класса. Нижние границы, основанные на ожидании первого повторения, оказываются даже ниже числа r обнаруженных оптимумов за k испытаний локального поиска.

Задачи отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией. Рис. 3, подобно рис. 2, представляет результаты экспериментов с задачами отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией. Длина последовательности n варьируется от 7 до 29. Для задач с $n > 24$ полный перебор пространства решений оказался чрезмерно трудоёмким, поэтому точное значение величины ν для задач большой размерности не изображено. Как видно из рисунка, бутстреп-метод даёт оценку наиболее близкую к истинному значению ν .

Из приведённого графика видно, что при малой размерности задач ($n < 12$) оценка максимального правдоподобия $\hat{\nu}$, основанная на методе переписи Шнабеля, даёт достаточно близкие к истинным значения. Далее с увеличением раз-

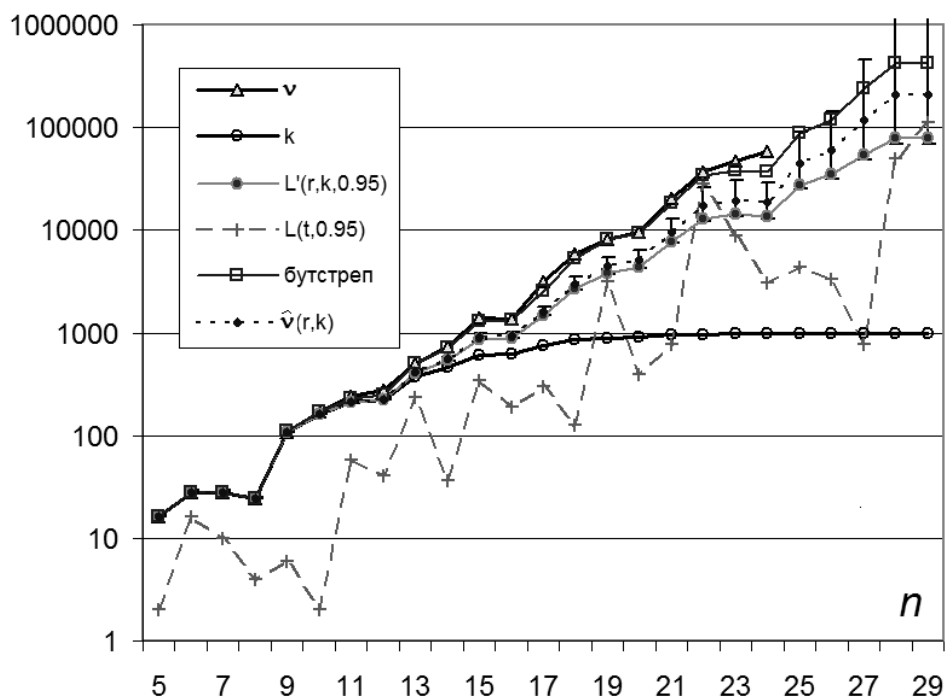


Рис. 3. Оценки числа локальных оптимумов в задачах отыскания двоичной последовательности с минимальной автокорреляцией

мерности задач предположение изотропности, по-видимому, становится неадекватным. Оценка $L(t, 0.95)$, в отличие от $L'(r, k, 0.95)$, ведёт себя очень нестабильно.

Задачи о вершинном покрытии из коллекции DIMACS. Результаты экспериментов по оцениванию числа локальных оптимумов для задач вершинного покрытия представлены в табл. 1. Здесь столбец «95% интервал» содержит 95% доверительные интервалы, построенные с использованием утверждения 1 в предположении изотропности.

Как выяснилось, задачи большой размерности в коллекции DIMACS характеризуются большими значениями величины ν , в связи с этим для получения содержательных результатов оценивания числа локальных оптимумов рассматривались только графы с числом вершин не более 200. При $r = 1000$ на всех тестовых примерах, кроме brock200-2 и brock200-4 не обнаруживалось ни одного повторения ранее найденных локальных оптимумов, а значит оценка, основанная на ожидании первого повторения, была не определена. Для других задач число испытаний r было увеличено до 10 000.

Задачи gn200p0.9-44, mapn a27, san200-0.9-1 и san200-0.9-3 не представлены в табл. 1 в связи с тем, что и при $r = 10000$ вновь было получено $k = r$. В этих случаях нижняя граница может быть построена по формуле $L(r + 1, 0.95) \approx 0.167r^2 = 1.67 \cdot 10^8$ (см. п. 1.1). Как видно из табл. 1, нижняя

Таблица 1. Оценки числа локальных оптимумов в ЗВП

Задача	$ V $	r	k	$L(t, 0.95)$	$L'(r, k, 0.95)$	бутстреп	95% интервал
john8-4-4	70	10^4	4509	572	5260	7145	5248-5398
brock200-2	200	10^3	972	346	13263	33761	12214-26212
mann a9	45	10^4	9406	7824	$7.6 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$	74808-87445
keller4	171	10^4	9805	$1.4 \cdot 10^5$	$2.3 \cdot 10^5$	$4.9 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^5$ - $2.9 \cdot 10^5$
brock200-4	200	10^3	999	$8.1 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^5$	$8.3 \cdot 10^5$	$9.0 \cdot 10^4$ - $2.0 \cdot 10^7$
john16-2-4	120	10^4	9939	$1.6 \cdot 10^5$	$6.6 \cdot 10^5$	$1.6 \cdot 10^6$	$6.4 \cdot 10^5$ - $1.1 \cdot 10^6$
san200-0.72	200	10^4	9945	$1.2 \cdot 10^6$	$7.2 \cdot 10^5$	$1.8 \cdot 10^6$	$7.0 \cdot 10^5$ - $1.2 \cdot 10^6$
san200-0.92	200	10^4	9995	$4.1 \cdot 10^6$	$4.8 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^7$	$4.3 \cdot 10^6$ - $3.1 \cdot 10^7$
c125.9	125	10^4	9999	$1.5 \cdot 10^7$	$1.1 \cdot 10^7$	10^8	$9.0 \cdot 10^6$ - $1.1 \cdot 10^9$
gn200p0.9-55	200	10^4	9999	$1.1 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^7$	10^8	$9.0 \cdot 10^6$ - $1.1 \cdot 10^9$

оценка, основанная на времени первого повторения, и в данной серии даёт неустойчивые результаты, в ряде случаев оказываясь ближе к оценке бутстрепа чем нижняя оценка, построенная по методу переписи Шнабеля (brock200-4, san200-0.72, c125.9).

Полученные данные показывают, что число локальных оптимумов в ЗВП близкой размерности может существенно различаться и зависит от структуры графа. Доверительный интервал, построенный по методу переписи Шнабеля в предположении изотропности, во многих случаях не содержит значения бутстреп-оценки. Таким образом, предположение изотропности в задачах о вершинном покрытии не оправдывается.

Задача распределения ёмкостей бункеров. Результаты оценивания числа локальных оптимумов в задачах распределения ёмкостей бункеров, созданных на основе реальных данных технологических линий автозавода Renault [6], показаны на рис. 4. Число промежуточных бункеров n и мощность множества допустимых решений в этих задачах приведена в табл. 2. Среди тестовых примеров 4 линии имеют последовательную структуру, а 2 линии AS7, AS8 имеют последовательно-параллельную структуру из 10 ЕО. Полный перебор пространства решений во всех задачах кроме AS3 оказался чрезмерно трудоёмким из-за значительного времени вычисления целевой функции. В связи с этим точное число локальных оптимумов для этих задач не вычислялось.

Как видно из рисунка, на этих задачах нижняя граница $L'(r, k, 0.95)$, соответствующая равновероятному попаданию в локальные оптимумы, оказывается близка к бутстреп-оценке. Можно предположить, что структура локальных оптимумов задачи распределения ёмкостей бункерных устройств близка к изотропной. Причиной тому может служить симметричность «ландшафта» целевой функции в этих задачах, отмеченная в работе [5].

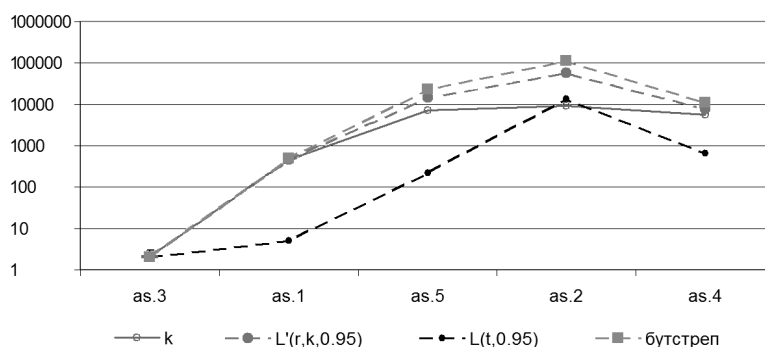


Рис. 4. Оценки числа локальных оптимумов в задачах распределения ёмкостей бункеров

Таблица 2. Тестовые задачи распределения ёмкостей бункеров

	n	допустимых решений
AS1	4	4×10^5
AS2	9	9×10^{11}
AS4	3	4×10^3
AS6	13	2×10^{22}
AS7	7	9×10^7
AS8	7	5×10^8

3. Заключение

Проведённые вычислительные эксперименты на известных тестовых примерах средней размерности показывают адекватность предложенных нижних оценок и бутстреп-метода для приближенного оценивания числа локальных оптимумов. В то же время построенные двусторонние доверительные интервалы зачастую не покрывают истинное значение оцениваемого параметра, что говорит о неприменимости к рассматриваемым задачам предположения о равновероятном попадании в локальные оптимумы алгоритма локального поиска.

Для оценивания числа локальных оптимумов снизу в большинстве случаев предпочтительнее использовать нижнюю границу, основанную на методе переписи Шнабеля, т.к. нижняя граница, основанная на времени первого повторения локальных оптимумов, даёт нестабильные результаты. Тем не менее последняя оценка может оказаться единственным приемлемым методом, когда локальные оптимумы повторяются чрезвычайно редко и априори сложно выбрать число испытаний, при котором будет получено хотя бы одно повторение ранее полученного локального оптимума.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на использование предложенных методов в правилах остановки для эвристик локального поиска с

многократным перезапуском. В частности, необходимое условие для остановки алгоритма может формулироваться как условие превышения числа найденных локальных оптимумов над нижней границей заданного доверительного уровня. Также предложенные методы могут использоваться для классификации тестовых примеров по их сложности для алгоритмов, основанных на локальном поиске. Методы оценивания числа локальных оптимумов могут также быть использованы в биоинформатике (см., например, [31]).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, п. I.5.1.5. «Исследование и решение задач комбинаторной оптимизации с использованием целочисленного программирования». Авторы благодарны С.А. Клокову за помощь в доказательстве утверждения 3.

Приложение

Настоящее приложение содержит описание бутстреп-метода для оценки числа локальных оптимумов, предложенного в [10, 29]. Бутстреп-метод предложен Б. Эфроном для решения целого ряда задач статистического анализа [3], и в частности, для непараметрической оценки смещения. Пусть X_1, \dots, X_n – независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестным распределением F на некотором пространстве \mathcal{X} . Предположим, что на основе наблюдаемых значений

$$X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$$

может быть вычислена оценка $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ некоторого интересующего нас функционального параметра распределения $\theta(F) \in \mathbb{R}$ (например, математического ожидания, дисперсии или $|\text{supp } F|$, как в случае оценивания числа локальных оптимумов или особей в популяции). Интерес представляет распространённый случай, когда оценка имеет вид

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \theta(\hat{F}),$$

где \hat{F} – эмпирическое распределение, приписывающее массу $\frac{1}{n}$ каждой из точек имеющейся выборки x_1, \dots, x_n . Требуется оценить величину смещения оценки $\hat{\theta} = \theta(\hat{F})$:

$$\text{bias} \equiv \mathbf{E}_F[\theta(\hat{F}) - \theta(F)], \quad (5)$$

где \mathbf{E}_F обозначает математическое ожидание в предположении, что X_1, \dots, X_n – независимые одинаково распределённые случайные величины с распределением F .

В бутстреп-методе для оценки смещения bias при фиксированном \hat{F} рассматривается случайная выборка объема n :

$$X_1^* = x_1^*, \dots, X_n^* = x_n^*,$$

где X_1^*, \dots, X_n^* — независимые одинаково распределённые случайные величины с вероятностным распределением \hat{F} . Выборочное распределение интересующей нас случайной величины $\hat{\theta}(\hat{F}) - \theta(F)$ аппроксимируется *бутстреп-распределением* случайной величины $\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*) - \theta(\hat{F})$. Для получения бутстреп-оценки смещения BIAS_* в формуле (5) производится замена неизвестного распределения случайной величины $\hat{\theta}(\hat{F}) - \theta(F)$ имеющимся бутстреп-распределением:

$$\text{BIAS}_* = \mathbf{E}_*[\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*) - \theta(\hat{F})],$$

где \mathbf{E}_* обозначает математическое ожидание в предположении, что X_1^*, \dots, X_n^* — независимые одинаково распределённые случайные величины с вероятностным распределением \hat{F} , зафиксированным на его наблюдаемом значении.

Величину BIAS_* в некоторых случаях удаётся вычислить точно или приближённо теоретическими методами (см., например, гл. 1 в [3]), однако, наиболее часто для этого используется аппроксимация бутстреп-распределения методом Монте-Карло, где генерируется достаточно большое число B независимых реализаций $x_{1b}^*, \dots, x_{nb}^*$, $b = 1, \dots, B$, случайной выборки X_1^*, \dots, X_n^* из распределения \hat{F} . В таком случае бутстреп-оценка смещения аппроксимируется величиной

$$\widehat{\text{BIAS}}_* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}(x_{1b}^*, \dots, x_{nb}^*) - \theta(\hat{F}).$$

Алгоритм 1. Бутстреп-оценка смещения

1. Построить эмпирическое распределение \hat{F} , приписывающее массу $\frac{1}{n}$ каждой из точек имеющейся выборки x_1, \dots, x_n .

2. Для $b = 1, \dots, B$ независимо выполнять:

2.1. Построить бутстреп-выборку из \hat{F} :

$$X_1^* = x_{1b}^*, \dots, X_n^* = x_{nb}^*.$$

2.2. Вычислить $\hat{\theta}_b^* = \hat{\theta}(x_{1b}^*, \dots, x_{nb}^*)$.

3. Вычислить бутстреп-оценку смещения

$$\widehat{\text{BIAS}}_* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}).$$

4. Конец работы.

С использованием бутстреп-оценки смещения, найденной алгоритмом 1, может быть получена скорректированная бутстреп-оценка:

$$\hat{\theta}_* = \hat{\theta} - \widehat{\text{BIAS}}_*. \tag{6}$$

Применительно к задаче оценки числа локальных оптимумов описанный алгоритм позволяет оценивать смещение статистики $\hat{\nu}(r, k)$, вычисленной по

методу максимального правдоподобия. В данном случае $\theta = \nu$, $\mathcal{X} = \{1, \dots, \nu\}$ – множество всех локальных оптимумов, распределение F описывает случайную величину, равную номеру локального оптимума, получаемого алгоритмом локального спуска из случайно выбранной начальной точки. На шаге 1 алгоритма 1 по $n = r$ испытаниям локального спуска строится эмпирическое распределение $\hat{F} = (v_1/r, \dots, v_k/r)$, где v_j – число испытаний, при которых был получен локальный оптимум с номером j , $j = 1, \dots, k$.

На шаге 2.2. полагаем $\hat{\nu}_b^* = \hat{\nu}(r, k_b^*)$, где k_b^* – число различных значений в бутстреп-выборке (j_1^*, \dots, j_r^*) на итерации b . На шаге 3 $\hat{\nu}_b^* = \hat{\theta}_b^*$, $b = 1, \dots, B$ и оценка смещения вычисляется по формуле

$$\widehat{\text{BIAS}}_* = \sum_{b=1}^B (\hat{\nu}_b^* - \nu(r, k)) / B.$$

При нарушении условия изотропности локальные оптимумы, куда вероятность попадания локального спуска мала, имеют мало шансов быть представленными в эмпирическом распределении \hat{F} . В таком случае \hat{F} оказывается ближе к равномерному распределению по сравнению с истинным распределением вероятностей F . В результате скорректированная бутстреп-оценка (6) отклоняется в сторону оценки максимального правдоподобия $\hat{\nu}(r, k)$. Приведённые в [10] результаты эксперимента подтверждают это.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М. : Мир, 1982.
2. Зубков А.М., Попов Н.Н. Отношение частичного порядка, порождённое распределениями числа занятых ячеек // Матем. заметки. 1982. Т. 32, № 1. С. 97–102.
3. Эфрон Б., Тибширани Г.Г.Р. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М. : Финансы и статистика, 1988.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М. : Наука, 1982.
5. Сигаев В.С. О свойствах локальных оптимумов задачи размещения буферных накопителей // Вестник Омского университета. 2006. № 4. С. 1–3.
6. Ancelin B., Semery A. Calcul de la productivité d'une ligne intégrée de fabrication // RAIRO Automat., Productiq. Informatiq. Industrielle. 1987. V. 21. P. 209–238.
7. Craig C.C. Use of marked specimens in estimating populations // Biometrika. 1953. V. 40, N. 1–2. P. 170–176.
8. Darroch J.N. The multiple-recapture census. I: estimation of a closed population // Biometrika. 1958. V. 45, N. 3–4. P. 343–359.
9. Dolgui A., Eremeev A., Kolokolov A., Sigaev V. A genetic algorithm for the allocation of buffer storage capacities in a production line with unreliable machines // Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. 2002. V. 1, N. 2. P. 89–104.
10. Eremeev A.V., Reeves C.R. Non-parametric estimation of properties of combinatorial landscapes // Applications of Evolutionary Computing: Proceedings of EvoWorkshops

- 2002 / Cagnoni S., Gottlieb J., Hart E., Middendorf M., Raidl G. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2279. Berlin : Springer-Verlag, 2002. P. 31–40.
11. Eremeev A.V., Reeves C.R. On confidence intervals for the number of local optima // Applications of Evolutionary Computing, EvoWorkshop 2003: EvoBIO, EvoCOP, EvoIASP, EvoMUSART, EvoROB, and EvoSTIM / Raidl G.R., Meyer J.-A., Middendorf M., Cagnoni S., Cardalda J.J.R., Corne D., Gottlieb J., Guillot A., Hart E., Johnson C.G., Marchiori E. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2611. Heidelberg : Springer, 2003. P. 224-235.
 12. Garnier J., Kallel L. How to detect all maxima of a function? // Proceedings of the Second EVONET Summer School on Theoretical Aspects of Evolutionary Computing (Anvers, 1999). Berlin : Springer, 2001. P. 343–370.
 13. Garthwait P.H., Buckland S.T. Analysis of multiple recapture census by computing conditional probabilities // Biometrics. 1990. V. 46, N. 1. P. 231–238.
 14. Glover F. and Laguna M. Tabu Search. Norwell, MA: Kluwer, 1997.
 15. Golay M.J.E. Series for low-autocorrelation binary sequences. IEEE Trans. Inform. Theory. 1977. V. 23. P. 43–51.
 16. Hansen P., Mladenovic N. Variable neighborhood search: Principles and applications // European Journal of Operational Research. 2001. V. 130. P. 449–467.
 17. Hernando L., Mendiburu A., Lozano J.A. An evaluation of methods for estimating the number of local optima in combinatorial optimization problems // Evol. Comput. 2013. V. 21, N. 4. P. 625–658.
 18. Johnson D.S., Trick M.A. Introduction to the second DIMACS challenge: cliques, coloring, and satisfiability // DIMACS Series in Discrete Math. and Theoretical Comput. Sci. / Johnson D., Trick. M. Providence, RI : American Math. Soc., 1996. Vol. 26. P. 1–10.
 19. Kauffman S.A. Adaptation on rugged fitness landscapes // Lectures in the Sciences of Complexity, Vol. I of SFI Studies. Addison-Wesley, 1989. P. 619–712.
 20. Kochetov Yu., Mikhailova A., Plyasunov A. A Genetic Local Search Algorithm for the Graph Partitioning Problem with Cardinality Constraints // Preprints of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM09), Moscow, Russia, June 3–5, 2009. P. 1991–1996.
 21. Mao C.X. On the nonidentifiability of population sizes // Biometrics. 2008. V. 64. P. 977–981.
 22. Mood A.M., Graybill F.A., Boes D.C. Introduction to the theory of statistics. Third Ed. New York : McGraw-Hill, 1973.
 23. Pickands J., Raghavachari M. Exact and asymptotic inference for the size of a population // Biometrika. 1987. V. 74, N. 2. P. 355–363.
 24. Pledger S. The performance of mixture models in heterogeneous closed population capture-recapture // Biometrics. 2005. V. 61, N. 3. P. 868–876.
 25. Reeves C. Genetic algorithm for the operations researcher // INFORMS Journal on Computing. 1997. V. 9, N. 3. P. 231–250.
 26. Reeves C.R. The "Crossover Landscape" and the Hamming Landscape for Binary Search Spaces // Foundations of Genetic Algorithms 7 / De Jong K., Poli R., Rowe J. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann. 2003. P. 81–98.
 27. Reeves C.R. Estimating the Number of Optima in a Landscape, Part I: Statistical Principles. Coventry University Technical Report SOR#01-03. 2001.

28. Reeves C.R. Estimating the Number of Optima in a Landscape, Part II: Experimental Investigations. Coventry University Technical Report SOR#01-04. 2001.
29. Reeves C.R., Eremeev A.V. Statistical analysis of local search landscapes // J. Oper. Res. Soc. 2004. V. 55, N. 7. P. 687–693.
30. Resende M.G.C. and Ribeiro C.C. Greedy randomized adaptive search procedures // Handbook of metaheuristics / Glover F. and Kochenberger G. N.Y.: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 219-249.
31. Sahoo S., Albrecht A.A. Approximating the set of local minima in partial RNA folding landscapes // Bioinformatics. 2012. V. 28, Issue 4. P. 523–530.
32. Schnabel Z.E. The estimation of the total fish population of a lake // American Math. Monthly. 1938. V. 45. P. 348–352.
33. Seber G.A.F. The estimation of animal abundance. London : Charles Griffin, 1973.
34. Yagiura M., Kishida M., Ibaraki. T. A 3-flip neighborhood local search for the set covering problem // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 172. P. 472–499.

ON CONFIDENCE INTERVALS FOR THE NUMBER OF LOCAL OPTIMA

A.V. Eremeev¹

Associate Professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

C.R. Reeves²

Professor Emeritus, e-mail: c.reeves@coventry.ac.uk

¹Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

²Coventry University

Abstract. The number of local optima is an important indicator of optimization problem difficulty for local search algorithms. Here we will discuss some methods of finding the confidence intervals for this parameter in problems where the large cardinality of the search space does not allow exhaustive investigation of solutions. Computational results are reported that were obtained by using these methods for N K landscapes model of S.A. Kauffman, for the low autocorrelation binary sequence, for buffer allocation problems in production line, and vertex cover problems.

Keywords: local search, combinatorial optimization problem, Schnabel census, conservative confidence interval.

Дата поступления в редакцию: 02.02.2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПРИЁМНИКА СИСТЕМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕСАНКЦИОНИРОВАННО УСТАНОВЛЕННОЙ ТОЧКИ БЕСПРОВОДНОГО ДОСТУПА

Д.Н. Лавров

к.т.н., доцент, e-mail: dmitry.lavrov72@gmail.com

А.А. Кондюрина

магистрант, e-mail: a.kondyurina@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В работе представлено построение и исследование динамической системы, описывающей траекторию наблюдателя по измерениям ускорений, которые в свою очередь являются оценкой неизвестного управления. Задача возникла при построении системы обнаружения несанкционированно установленных точек беспроводного доступа внутри помещений. Исследована наблюдаемость системы, исследована работа фильтра Калмана и оптимального сглаживания. Предложены эвристические методы восстановления траектории движения. Проведено компьютерное моделирование работы предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: фильтр Калмана, сглаживание, позиционирование, беспроводные точки доступа.

Введение

В рамках разработки проекта обнаружения несанкционированно установленных точек беспроводного доступа с поддержкой стандартов 802.11 была разработана математическая модель получения оценки координат по измерениям мощности излучения точки беспроводного доступа с нескольких разнесённых точек наблюдения [2]. Было проведено компьютерное имитационное моделирование процесса определения координат точки беспроводного доступа. С результатами можно ознакомиться в [3]. С помощью компьютерного эксперимента найдена примерная зависимость точности от количества точек наблюдения. Очевидно, что точность растёт с ростом точек наблюдения. В случае стационарно несанкционированно установленной точки доступа с поддержкой стандартов 802.11, не меняющей своего положения, можно обойтись одним перемещающимся наблюдателем (приёмником). Но в этом случае необходимо точно отслеживать траекторию движения наблюдателя и измерения мощностей источника излучения вдоль траектории движения.

Для решения ряда задач, таких как построение карты покрытия точки беспроводного доступа, обнаружение точек беспроводного доступа и вычисление их координат, также требуется позиционировать наблюдателя этих сигналов. Для подвижного наблюдателя необходимо знать, где он находится в каждый момент, когда производится измерение. Таких способов описано несколько [4].

Современные мобильные устройства снабжены датчиками, которые теоретически должны обеспечивать отслеживание траектории движения владельца. В частности система GPS обеспечивает достаточно точное позиционирование. Но в помещениях сигналы спутников принимаются плохо, и позиционирование внутри помещений с помощью этой системы затруднено.

Возникает задача построения траектории движения владельца мобильного устройства только лишь по данным гироскопа и акселерометра. В системе Android при наличии обоих датчиков возможно получать линейные ускорения вдоль трёх пространственных осей.

Задача может решаться в нескольких постановках.

Первая постановка задачи. Дана последовательность измерений линейных ускорений с трёхосевого акселерометра и начальное положение объекта. Задача: построить траекторию движения объекта.

Вторая постановка задачи. Дана последовательность измерений линейных ускорений с трёхосевого акселерометра – начальная и конечная точки траектории. Задача: построить траекторию движения объекта.

Для решения задачи в этих двух постановках необходимо построить динамическую систему измерений и исследовать её.

1. Построение динамической системы в пространстве состояний

Согласно второму закону Ньютона:

$$F = m\ddot{r},$$

где F — сила, действующая на объект; m — масса объекта; $r = (x, y, z)'$ — координаты объекта (' — транспонирование).

Без ограничения общности и для упрощения вывода формул можем ограничиться одной координатой, например, x . Тогда

$$F(t) = m\ddot{x}(t),$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = a(t) = F(t)/m \\ \dot{a}(t) = g(t), \end{cases}$$

где $v(t)$ — скорость объекта, $a(t)$ — ускорение, $g(t) = \frac{da}{dt} = \frac{dF(t)}{m \cdot dt}$.

Переход в пространство состояний можно осуществить, введя вектор состояния следующего вида:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение динамики системы можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(t).$$

Изменение ускорений, описываемое функцией $g(t)$, неизвестно, но может быть оценено при известных ускорениях, так как

$$g(t) = \frac{da}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t) - a(t - \Delta t)}{\Delta t},$$

то есть

$$\Delta t \cdot g(t) \approx a(t) - a(t - \Delta t).$$

Исходя из постановки задачи эти ускорения известны и поступают от акселерометров. Измерительная система, получающая эти ускорения, может быть описана следующим уравнением наблюдения:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} + \nu(t),$$

где $\nu(t)$ — шум наблюдения, представляющий собой белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 ; $Z(t)$ — наблюдение системы, зашумлённые измерения ускорений.

Собрав всё выше представленное, получаем следующие уравнения динамической системы в пространстве состояний в матричной форме:

$$\dot{X}(t) = F \cdot X(t) + C \cdot g(t) \tag{1}$$

$$Z(t) = H_1 \cdot X(t) + \nu(t), \tag{2}$$

где $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Дискретизация системы

Для дискретизации системы необходимо найти переходную матрицу состояния. Для систем с постоянной матрицей F она вычисляется по формуле (2-26) из [1]:

$$\Phi_1(t, \tau) = e^{F(t-\tau)} = I + F(t-\tau) + \frac{F^2(t-\tau)^2}{2} + \dots,$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности.

Найдём степени F :

$$F^1 = F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F^2 = F \cdot F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F^3 = F^2 \cdot F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi_1(t_k, \tau) = I + F(t_k - \tau) + \frac{F^2(t_k - \tau)^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\Delta t = t_k - \tau = \text{const}$. Заметим, что в таком случае полученная матрица не зависит от времени, поэтому будем её обозначать в дальнейшем как Φ_1 .

Найдём переходную матрицу управления по формуле (2-33) [1]:

$$\begin{aligned} \Psi(k+1, k) &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_1(t_k, \tau) C(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{bmatrix} \frac{(t_k - \tau)^2}{2} \\ (t_k - \tau) \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{(t_k - \tau)^3}{6} \\ -\frac{(t_k - \tau)^2}{2} \\ \tau \end{bmatrix} \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\Delta t^3/6 \\ -\Delta t^2/3 \\ t_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t^3/6 \\ \Delta t^2/3 \\ \Delta t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Будем считать, что $a(t)$ кусочно-постоянная на интервалах дискретизации,

тогда $g(t_k) \cdot \Delta t = a(t_k) - a(t_{k-1}) = a(k+1) - a(k) = g(k) \cdot \Delta t$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta t^3/6 \\ \Delta t^2/3 \\ \Delta t \end{bmatrix} \cdot g(k) &= \begin{bmatrix} \Delta t^2/6 \\ \Delta t/3 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta t \cdot g(k) = \begin{bmatrix} \Delta t^2/6 \\ \Delta t/3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [a(k+1) \ a(k)] = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta t^2/6 \\ \Delta t/3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ -1] \cdot \begin{bmatrix} a(k+1) \\ a(k) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta t^2/6 & -\Delta t^2/6 \\ \Delta t/3 & -\Delta t/3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(k+1) \\ a(k) \end{bmatrix} = \Psi_1 \cdot \begin{bmatrix} a(k+1) \\ a(k) \end{bmatrix} = \Psi_1 \cdot u(k). \end{aligned}$$

Введя обозначения $X(t_k) = X(k+1)$, получим дискретные уравнения динамики системы и наблюдения:

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 1 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} \Delta t^2/6 & -\Delta t^2/6 \\ \Delta t/3 & -\Delta t/3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(k+1) \\ a(k) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Z(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k+1) + \nu(k+1). \quad (4)$$

или в векторно-матричной форме:

$$X(k+1) = \Phi_1 X(k) + \Psi_1 u(k) \quad (5)$$

$$Z(k+1) = H_1 X(k+1) + \nu(k+1). \quad (6)$$

3. Наблюдаемость системы

Исследуем наблюдаемость полученной системы. Согласно следствию 2.2 [1, стр. 63] для полной наблюдаемости необходимо, чтобы ранг матрицы

$$[H_1' \ \Phi_1' H_1' \ (\Phi_1^2)' H_1']$$

был равен размерности вектора состояния, в нашем случае равный 3. К сожалению, ранг указанной матрицы меньше трёх. Действительно,

$$\text{rank} [H_1' \ \Phi_1' H_1' \ (\Phi_1^2)' H_1'] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Это означает, что полностью восстановить вектор состояния по одним лишь наблюдениям невозможно. Остаётся лишь возможность отследить вектор состояния, начиная с начальной точки траектории движения. Либо оценить траекторию по данным начальной и конечной точкам траектории. Необходимо также знать оценку вектора состояния в этих точках.

Ситуация ухудшается ещё и тем, что в действительности вектор управления известен неточно, но может быть получена его оценка, смешанная с аддитивным шумом наблюдения. Вектор управления можем оценить по наблюдениям $Z(t)$, которые и являются зашумлёнными компонентами управления $u(k) = [a(k+1) \ a(k)]'$. Условия теоремы об оптимальной фильтрации при этом будут нарушены.

В следующем разделе более подробно будет рассмотрен этот вопрос и предложено решение по устранению этой проблемы.

4. Устранение корреляции шумов системы и наблюдения

Для оценки состояния модели необходимо знать начальный вектор состояния. Будем считать его нулевым, что соответствует неподвижности объекта в начальный момент времени. Далее можем построить траекторию согласно уравнениям динамики по полученным измерениям вектора управления

$$\hat{u}(k) = [Z(k+1) \ Z(k)]' = [a(k+1) \ a(k)]' + [\nu(k+1) \ \nu(k)]' = u(k) + w(k).$$

Подставив эту оценку в уравнение динамики (5), получим:

$$X(K+1) = \Phi_1 X(k) + \Psi_1 u(k) + \Psi_1 w(k),$$

где $w(k) = [\nu(k+1) \ \nu(k)]'$. Откуда видно, что шумы наблюдения и шумы системы коррелируют. Для устранения этого недостатка (нарушены условия теоремы об оптимальной фильтрации [1, Т5-5]) воспользуемся методом расширения пространства состояний [1, раздел 5.4].

Введём расширенный вектор состояния (расширим пространство состояний):

$$Y(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ w(k) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{bmatrix} \nu(k+2) \\ \nu(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(k+1) \\ \nu(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \nu(k+2);$$

или в матричном виде

$$w(k+1) = \Phi_2 \cdot w(k) + \Gamma_2 \cdot \eta_1(k),$$

$$\text{где } \eta_1(k) = \nu(k+2), \ w(k) = [\nu(k+1) \ \nu(k)]', \ \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Используя вновь введённые обозначения, получим следующую модель в пространстве состояний:

$$Y(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_1 & \Psi_1 \\ \hline 0 & \Phi_2 \end{array} \right] \cdot Y(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \Gamma_2 \end{array} \right] \cdot v(k+2) + \left[\begin{array}{c|c} \Psi_1 & \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} a(k+1) \\ a(k) \end{bmatrix}$$

$$Z(k+1) = [0 \ 0 \ 1 \ | \ 0 \ 1] \cdot Y(k+1).$$

Или в матричном виде

$$Y(k+1) = \Phi \cdot Y(k) + \Gamma \cdot \eta_1(k) + \Psi \cdot u(k) \quad (7)$$

$$Z(k+1) = H \cdot Y(k+1). \quad (8)$$

С матрицами корреляций

$$P(0) = E\{Y(0)Y(0)'\} = E \left[\begin{array}{c|c} X_1 \cdot X_1' & X_1 \cdot w' \\ \hline w \cdot X_1' & w \cdot w' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} I & & 0 \\ \hline 0 & \sigma^2 & 0 \\ & 0 & \sigma^2 \end{array} \right],$$

$$Q = E\{\eta_1(k)\eta_1(k)'\} = \sigma^2,$$

$$R = 0.$$

5. Фильтрация Калмана

По теореме об оптимальной фильтрации [1, Т5-5] рекуррентные уравнения, описывающие оптимальную оценку для *нашего* случая, даются выражениями:

1. Вычисляется корреляционная матрица ошибки предсказания:

$$P(k+1|k) = \Phi \cdot P(k|k) \cdot \Phi' + \Gamma Q \Gamma',$$

где начальное условие имеет вид $P(0|0) = P(0)$.

2. Вычисляется матрица Калмана:

$$K(k+1) = P(k+1|k)H'(k+1) \cdot [H(k+1)P(k+1|k)H'(k+1) + R(k+1)]^{-1}.$$

3. Вычисляется корреляционная матрица ошибки фильтрации:

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k),$$

где I — единичная матрица размера $n \times n$.

4. Вычисляется оптимальная оценка одношагового предсказания:

$$\hat{Y}(k+1|k) = \Phi_{pr} \cdot \hat{Y}(k+1|k) + \Psi \cdot \begin{bmatrix} Z(k+1) \\ Z(k) \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \Phi_{pr} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляется оптимальная текущая оценка:

$$\hat{Y}(k+1|k+1) = \hat{Y}(k+1|k) + K(k+1)[Z(k+1) - H(k+1)\Phi\hat{Y}(k+1|k)],$$

где $\hat{Y}(0|0) = 0$.

Проведено компьютерное моделирование процесса Калмановской фильтрации. Иллюстрации, качественно описывающие результаты моделирования, представлены на рис. 1.

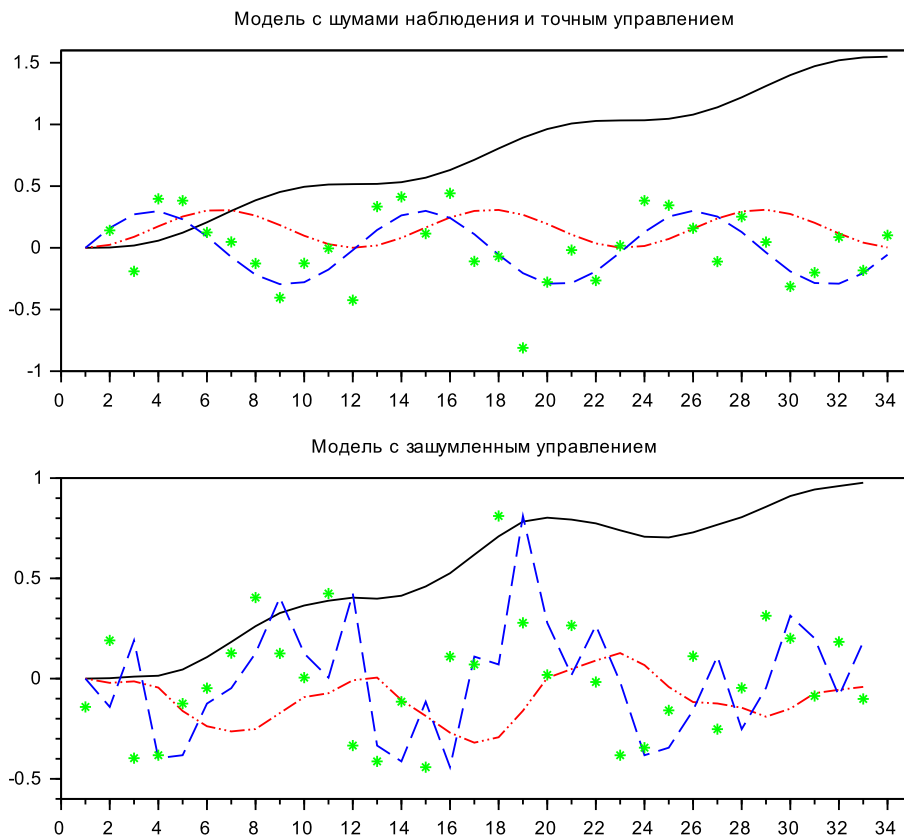


Рис. 1. Результаты моделирования с точным и зашумлённым управлением. По оси абсцисс отложены отсчёты дискретного времени, по оси ординат перемещение в десятках метров — сплошная линия, скорость в м/с — график «- . .», ускорение в м/с² — график «- -», наблюдение ускорений в присутствии шума — график «*»

Из рисунка видно, что траектория вектора состояния, полученная с помощью оптимальной фильтрации, практически не отличается от оценки предсказания и уводит траекторию от точки завершения движения, что говорит о проблемах с точностью оценки траектории.

Сглаживание с закреплёнными концами должно исправить эту проблему.

6. Оптимальное сглаживание

По теореме об оптимальном сглаживании [1, Т6-1] рекуррентные уравнения, описывающие оптимальную сглаженную оценку, даются выражениями:

$$\begin{aligned}
 A(k) &= P(k|k)\Phi'(k+1|k)P^{-1}(k+1|k) \\
 \hat{Y}(k|N) &= \hat{Y}(k|k) + A(k)[\hat{Y}(k+1|N) - \hat{Y}(k+1|k)] \\
 P(k|N) &= P(k|k) + A(k)[P(k+1|N) - P(k+1|k)]A'(k).
 \end{aligned}$$

Проведено компьютерное моделирование процесса оптимального сглаживания. Иллюстрации, качественно описывающие результаты моделирования, представлены на рис. 2.

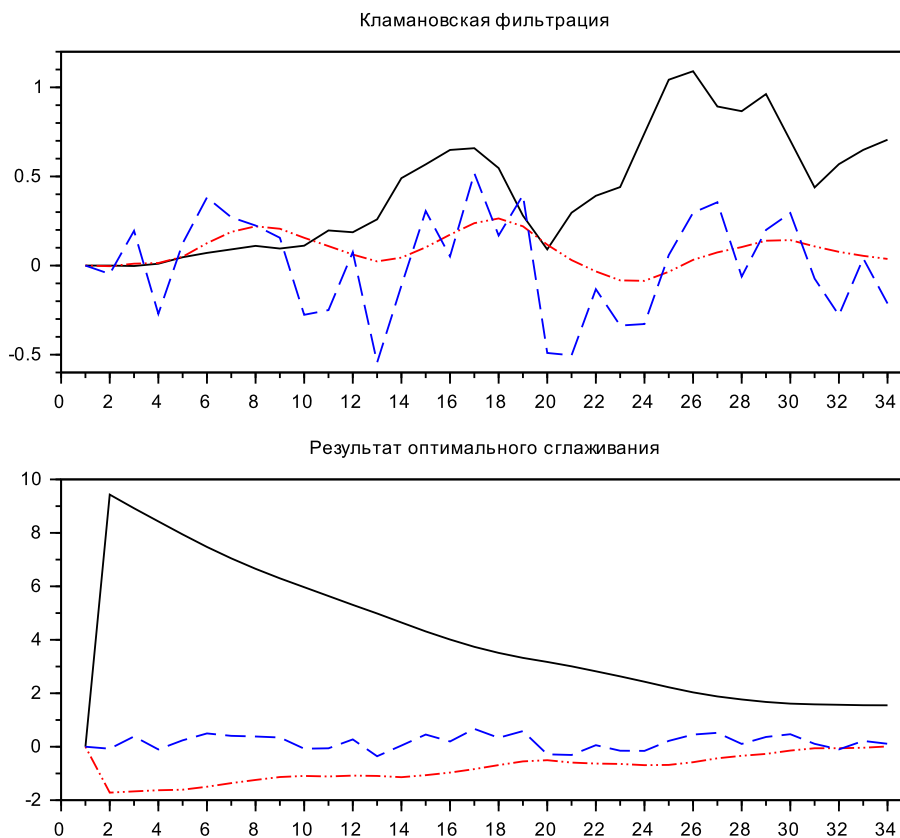


Рис. 2. Результаты моделирования Кламановской фильтрации и оптимального сглаживания.

По оси абсцисс отложены отсчеты дискретного времени, по оси ординат перемещение в десятках метров — сплошная линия, скорость в м/с — график «- . .», ускорение в м/с² — график «- -»

Из рисунка 2 видно, что траектория вектора состояния, полученная с помощью оптимального сглаживания, хорошо ведёт себя в конце траектории, но уводит траекторию от точки начала движения более чем на 20 метров, что совершенно неприемлемо.

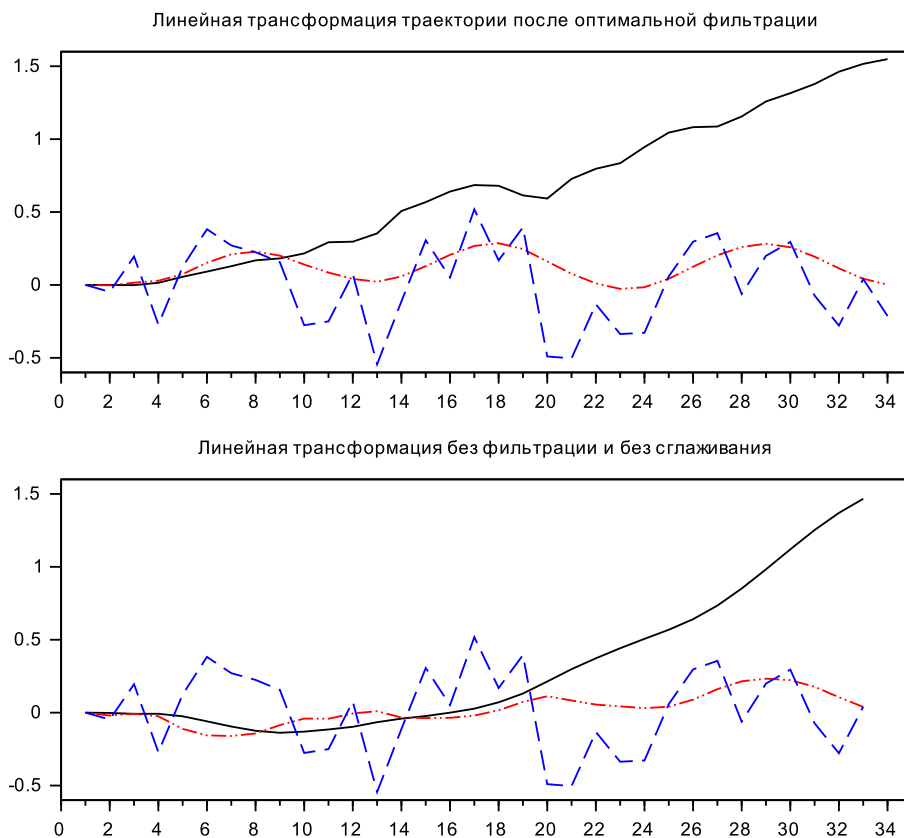


Рис. 3. Варианты линейной трансформации траектории. По оси абсцисс отложены отчёты дискретного времени, по оси ординат перемещение в десятках метров — сплошная линия, скорость в м/с — график «- . . .», ускорение в м/с² — график «--»

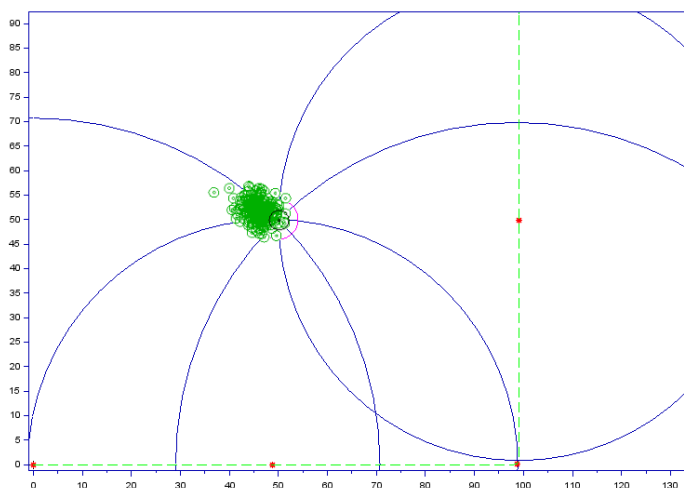


Рис. 4. Результат серии экспериментов по обнаружению точки беспроводного доступа. Пунктирная линия — траектория движения приёмника-наблюдателя в пространстве; точками на траектории отмечены места фиксации показаний мощности сигнала; окружности — линии равного уровня сигнала; истинное положение в точке (50,50); мелкие окружности — оценки серии экспериментов положения точки беспроводного доступа

Обсуждение результатов. Результаты отчасти ожидаемы, так как полная наблюдаемость в системе отсутствует и, следовательно, накопленные наблюдения не могут полностью восстановить вектор состояния. Кроме того, собственные числа переходной матрицы состояния равны единице, а значит, система находится в пограничном состоянии между состоянием устойчивости и неустойчивости.

7. Эвристические алгоритмы восстановления траектории

Очевидно, что результаты компьютерного моделирования оптимальной фильтрации и оптимального сглаживания неудовлетворительны. Оптимальная фильтрация, накапливая ошибки измерения, часто уводит траекторию от реального положения в конце пути. Оптимальное сглаживание для нашей модели часто в серии экспериментов не возвращает оценку в начало пути (чего не происходит с наблюдаемыми системами). Оптимальность оценок (в смысле точности) распространяется только на системы с полной наблюдаемостью.

Возможные пути выхода из ситуации — это, во-первых, добавление в вектор наблюдений оценки перемещения, получаемой, например, с помощью системы глобального позиционирования; во-вторых, использование эвристических методов восстановления траектории движения.

Предлагается два эвристических алгоритма восстановления траектории для устранения вышеуказанных недостатков. Оба основаны на линейной трансформации одной траектории в другую. Первый способ — трансформация траектории Калмановской фильтрации в траекторию сглаживания, второй — трансформация прямой траектории предсказания с закреплением в начале движения в траекторию предсказания с закреплением в конце траектории.

Суть трансформации одной траектории вектора состояния Y_a в другую Y_b заключается в том, что расчётный отсчёт траектории $Y_c(k)$ вычисляется как взвешенная оценка траекторий вектора состояния $Y_a(k)$ и $Y_b(k)$.

$$Y_c(k) = (1 - \lambda_k) \cdot Y_a(k) + \lambda_k Y_b(k), \quad k = 0, \dots, N$$
$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_N = 1.$$

Исходя из этих соотношений и линейности λ_k в зависимости от k , получается простое выражение

$$\lambda_k = \frac{k}{N}.$$

Эвристический алгоритм восстановления траектории будет выглядеть следующим образом.

Вход: две траектории, первая из которых Y_a точно совпадает с началом движения, а вторая Y_b — с окончанием движения. Траектории заданы массивами или списками равной длины. Такие две траектории могут быть получены оптимальными фильтрацией и сглаживанием соответственно. Вторым вариантом получения таких траекторий таков: в качестве первой траектории взять оптимальную оценку фильтрации, а в качестве второй — её же параллельно сдвинутую в точку окончания движения. Отсчёты координат поступают последовательно.

Выход: траектория Y_c движения, начало и конец которой в точности совпадают с началом и концом движения (которые в свою очередь считаются известными). Эвристический алгоритм трансформации на Python будет выглядеть следующим образом:

```
lambda=0
for k in range(N+1):
    yc[k]=(1-lambda)*ya[k]+lambda*yb[k]
    lambda=k/N
```

На рисунке 3 представлены иллюстрации работы описанных вариантов алгоритма трансформации.

Качественная оценка полученных траекторий показывает, что отклонение их от реальных траекторий меньше, чем у рассмотренных ранее подходов и вполне приемлемо для решаемой задачи.

Итоговый результат серии экспериментов по определению координат по измерениям движущегося измерителя приведён на рисунке 4. Наблюдается небольшое смещение от истинного положения, составляющее в среднем 4 метра.

Заключение

В работе рассмотрены подходы к построению траектории движения объекта по зашумлённому управлению, представляющему собой измерения показаний акселерометров. Проведён анализ модели, проведено компьютерное моделирование по вычислению траекторий движений объектов. Предложен метод трансформации траекторий, который даёт приемлемые траектории при компьютерном эксперименте. Выяснить реальную применимость рассмотренного метода трансформации необходимо на практике на реальных измерениях, что является целью дальнейшего исследования. На открытой местности уточнение положения объекта (измерителя) может быть скорректировано добавлением в вектор наблюдения оценок координат объекта, полученных с помощью систем глобального позиционирования, что приведёт к полной наблюдаемости системы и более высокой точности построения траектории движения.

Благодарности

Выражаем глубокую признательность доктору технических наук Илье Викторовичу Потапову за обсуждение статьи. Замечания, им высказанные, позволили существенно улучшить изложение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медич Д. Статистически оптимальные линейные оценки и управление М. : «Энергия», 1973. 440 с.
2. Вишнякова О.А., Лавров Д.Н., Лаврова С.Ю. Математическая модель обнаружения точки беспроводного доступа по измерениям мощности излучения разнесёнными наблюдателями // Математические структуры и моделирование. 2013. № 2(28). С. 49–59.
3. Лавров Д.Н., Вишнякова О.А., Дудяк Е.И., Лаврова С.Ю. Компьютерное моделирование оценивания координат точки беспроводного доступа по измерениям мощности принимаемых сигналов // Математические структуры и моделирование. 2014. № 2(30). С. 62–76.
4. Дудяк Е.И. Методы определения координат сотрудников и техники предприятия с использованием технологии Wi-Fi // Техника радиосвязи. 2015. Вып. 1(24). С. 67–77.

**DETERMINING THE PATH OF MOVEMENT OF THE OBSERVER OF SYSTEM
DETECTING UNAUTHORIZED INSTALLED WIRELESS ACCESS POINTS****D.N. Lavrov**

Associate Professor, Ph.D. (Eng.), e-mail: dmitry.lavrov72@gmail.com

A.A. Kondurina

Master's Degree Student, e-mail: a.kondyurina@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The paper presents the construction and study of the dynamical system describing the trajectory of the observer by measuring accelerations, which in turn is an estimate of the unknown control. The problem arises in the construction of detection systems of installed unauthorized wireless access points indoors. We studied the observability of the system, investigated the work of Kalman filter and optimal smoothing filter. Heuristic algorithms of trajectory recovery are proposed. A computer simulation of the proposed algorithms is conducted.

Keywords: Kalman filter, smoothing, positioning, wireless access points.

Дата поступления в редакцию: 9.01.2017

ГИБРИДНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТАЭВРИСТИК

А.В. Лисин¹

технический директор, e-mail: andrey.lisin@gmail.com

К.С. Яковенко²

старший преподаватель, к.т.н., e-mail: kirill.yakovenko@gmail.com

¹ООО «Кристаллникс»

²Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье рассматриваются гибридные схемы численного решения задач условной оптимизации, основанные на классических подходах, таких как метод штрафных функций, теория множителей Лагранжа, и метаэвристических алгоритмах. Приведён пример гибридной схемы, основанной на методе роя частиц и методе множителей Лагранжа с добавками. Представлены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: условная оптимизация, метаэвристики, штрафные функции, множители Лагранжа.

В общем виде задача условной оптимизации в пространстве \mathbb{R}^n может быть записана как

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x), \quad (1)$$

где целевая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, а допустимое множество $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ определяется серией ограничений [1]:

$$\begin{cases} c_i(x) = 0, i \in \zeta, \\ c_i(x) \geq 0, i \in \chi. \end{cases}$$

Далее по тексту для простоты будем рассматривать задачу минимизации без потери общности.

Одним из подходов к численному решению задач условной оптимизации является замена начальной задачи с ограничениями последовательностью задач безусловной оптимизации. Определим штрафную функцию для задачи (1) в виде

$$Q(x; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \zeta} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \chi} ([c_i(x)]^-)^2,$$

где $\mu > 0$ — штрафной коэффициент. Запись $[y]^-$ означает $\max(0, -y)$. Определим последовательность $\{\mu_k\}$, и пусть $\mu_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть также x_k — решение оптимизационной задачи для μ_k , тогда справедлива следующая теорема [1]:

Теорема 1. Пусть x_k — глобальный оптимум $Q(x; \mu_k)$ и пусть $\mu_k \rightarrow 0$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \rightarrow x^*$, где x^* — глобальный минимум целевой функции (1).

Приведённая теорема даёт обоснование для следующего обобщённого алгоритма решения задач условной оптимизации:

1. Выбрать произвольные $\mu_0 > 0$, коэффициент $\tau_0 > 0$ и начальное приближение x_0^s .
2. Искать минимум x_k функции $Q(\cdot; \mu_k)$, начиная с x_k^s , останавливая процесс поиска при выполнении условия $\|\nabla Q(x, \mu_k)\| \leq \tau_k$.
3. Если достигнуто условие остановки, вернуть x_k . Иначе выбрать новый штрафной коэффициент $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$ и перейти к шагу 2, выбрав x_k в качестве начального приближения [1].

У приведённого алгоритма есть несколько очевидных недостатков. Во-первых, для того, чтобы последовательность $\{x_k\}$ сходилась к глобальному минимуму целевой функции $f(x)$, необходимо, чтобы выполнялось выражение $Q(x_k, \mu_k) \leq Q(x, \mu_k)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. С другой стороны, при устремлении числа шагов k к бесконечности, $\{\mu_k\} \rightarrow 0$, дробь $\frac{1}{2\mu} \rightarrow \infty$ и очень быстро перестает уместаться в стандартное представление чисел с плавающей точкой на компьютере. Таким образом, с одной стороны, очевидна потребность в эффективных алгоритмах поиска глобального минимума для задач безусловной оптимизации, с другой, — в уменьшении вычислительной сложности и ограничении роста штрафных коэффициентов. В [2] приводится гибридный алгоритм решения задач условной оптимизации для решения некоторых инженерных задач, использующий множители Лагранжа и метод роя частиц (МРЧ). Далее в статье приводится вариант обобщённой гибридной схемы, аналогичной описанной в [2]. Для краткости изложения будем также использовать МРЧ, однако, метаэвристическая составляющая может быть представлена любым другим методом численного решения задач безусловной оптимизации в том числе, предположительно, более эффективным, чем МРЧ (см., например, [5]).

МРЧ — один из методов численной оптимизации, основанный на развитии многоагентной системы и не требующий вычисления градиента целевой функции. МРЧ принадлежит к активно развиваемому в последние десятилетия классу метаэвристических алгоритмов, к которым также можно отнести алгоритмы имитации отжига, поиска с запретом, а также варианты генетических алгоритмов. Важной особенностью метаэвристик является их способность выбираться из локальных минимумов, что позволяет применять их для поиска глобальных экстремумов функций. МРЧ использует роевой интеллект для поиска наилучшего положения частицы в пространстве поиска. Положение частицы в пространстве определяется вектором $x \in S$. Траектория i -ой частицы на шаге k может быть описана уравнением [3]:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta x_i^{k+1}, \quad (2)$$

где Δx_i^{k+1} — «скорость» частицы, определяемая согласно формуле:

$$\Delta x_i^{k+1} = \omega \Delta x_i^k + b_1 r_{1,i}^k (x_i^{best,k} - x_i^k) + b_2 r_{2,i}^k (x_{swarm}^{best,k} - x_i^k), \quad (3)$$

где $x_i^{best,k}$ — лучшее положение i -ой частицы, найденное к шагу k , $x_{swarm}^{best,k}$ — лучшее положение среди всех частиц к шагу k . Параметры $r_{1,i}^k$ и $r_{2,i}^k$ — случайные числа из отрезка $[0, 1]$, подчиняющиеся равномерному распределению и служащие для придания алгоритму стохастических свойств. Коэффициенты b_1 и b_2 — некоторые константы. Стандартная процедура МРЧ состоит из следующих шагов:

1. Сгенерировать n_p частиц со случайными или предопределёнными координатами. Установить $k = 0$, найти $x_i^{best,0}$ и $x_{swarm}^{best,0}$.
2. Проверить критерий остановки. Если критерий выполняется, вернуть $x^* = x_{swarm}^{best,k}$.
3. Пересчитать координаты всех частиц в соответствии с формулами (2) и (3). Установить $k = k + 1$. Пересчитать $x_i^{best,k}$ и $x_{swarm}^{best,k}$.
4. Перейти к шагу 2.

Далее рассмотрим функцию Лагранжа [4]:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in \zeta} \lambda_i c_i(x) + \sum_{j \in \chi} \lambda_j c_j(x).$$

Для некоторого вектора λ_{i+j}^* решение x^* задачи (1) является стационарной точкой $L(x, \lambda)$ (не обязательно минимумом). Тогда можно записать формулу, содержащую множители Лагранжа с добавками:

$$L_A(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i \in \zeta \cup \chi} \lambda_i \theta_i(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \zeta \cup \chi} \theta_i^2(x), \quad (4)$$

где

$$\theta = \begin{cases} c_i(x), & i \in \zeta, \\ [c_i(x)]^-, & i \in \chi. \end{cases}$$

Заметим, что формула (4) не требует $\mu \rightarrow 0$ [1].

Объединяя метод Лагранжа с добавками с МРЧ, получим следующую гибридную схему решения задач условной оптимизации:

1. Установить $v = 0$, $k = 0$, $\lambda^0 = 0$, $\mu^0 = \mu_0$ и сгенерировать начальные координаты частиц.
2. Проверить условие остановки. Если оно выполняется, вернуть $x^* = x_{swarm}^{best,v}$ и $\lambda^* = \lambda^v$ в качестве решения.
3. Решить задачу безусловной оптимизации с помощью МРЧ, ограничив число итераций k_{max} .

4. Обновить значения $\lambda_i^{\nu+1} = \lambda_i^\nu + \frac{1}{\mu} \theta_i(x)$ и μ , установить $\nu = \nu + 1$, $k = 0$ и перейти к шагу 2.

Стратегию обновления значения штрафного коэффициента можно определить следующим образом [2]:

$$\mu_{p,i}^{\nu+1} = \begin{cases} 2\mu_{p,i}^\nu, & |c_i(x^\nu)| > |c_i(x^{\nu-1})| \wedge |c_i(x^\nu)| > \varepsilon_\zeta \\ \frac{1}{2}\mu_{p,i}^\nu, & |c_i(x^\nu)| \leq \varepsilon_\zeta \\ \mu_{p,i}^\nu, & \end{cases}$$

для $i \in \zeta$ и аналогично для $i \in \chi$, заменяя ε_ζ на ε_χ , где ε_ζ и ε_χ — некоторые константы [5].

В таблице ниже приведены некоторые результаты численного эксперимента.

Тестовая функция	Ограничения	Результат
<i>Унимодальные функции</i>		
$F_1 = 100(x_2 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2$	$-20 \leq x_i \leq 20, i = \{1, 2\}$	3.7×10^{-2}
$F_2(x) = x_1^2 + x_2^2$	$c_1(x) = x_1 - 3 = 0,$ $c_2(x) = 2 - x_2 \leq 0,$ $-10 \leq x_i \leq 10, i = \{1, 2\}$	1.3×10
$F_3(x) = (x_1 - 10)^3 + (x_2 - 20)^3$	$13 \leq x_i \leq 100,$ $0 \leq x_2 \leq 100$	-0.69×10
$F_4(x) = \sum_{i=1}^{30} x_i^2$	$-100 \leq x_i \leq 100$	2.1×10^{-4}
<i>Мультимодальные функции</i>		
$F_5(x) = \frac{1}{4000}(x_1^2 + x_2^2) - \cos\left(\frac{x_1}{\sqrt{1}}\right) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + 1$	$-30 \leq x_i \leq 30, i = \{1, 2\}$	0.61×10^{-2}
$F_6(x) = \sum_{i=1}^{30} -x_i \sin(\sqrt{ x_i })$	$-15 \leq x_i \leq 15$	9.8×10^3
$F_7(x) = \sum_{i=1}^{30} (x_i^2 - 10 \cos 2\pi x_i + 10)$	$-5.12 \leq x_i \leq 5.12$	5.67×10
$F_8(x) = 4x_1^2 + 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$	$-5 \leq x_i \leq 5$	-0.1×10

ЛИТЕРАТУРА

1. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. Springer. 1999. 634 p.
2. Sedlaczek K., Eberhard P. Using augmented Lagrangian particle swarm optimization for constrained problems in engineering // Structural Multidisciplinary Optimization. 2006. N. 32. P. 277–286.

3. Kennedy J., Eberhart R. Particle Swarm Optimization // Proceeding of IEEE International Conference on Neural Networks IV. 1995. P. 1942–1948.
4. Rangarajan K.S. A First Course in Optimization Theory. Cambridge University Press, 2014. 367 p.
5. Лисин А.В. Метод Лагранжа с добавками и роевые алгоритмы для решения задач условной оптимизации // Сборник материалов XXXI Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2014». 2014. С. 139–144.

HYBRID METHODS FOR SOLVING CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS USING METAHEURISTICS

A.V. Lisin¹

Chief technology officer, e-mail: andrey.lisin@gmail.com

K.S. Yakovenko²

Senior Tutor, Ph.D. (Eng.), e-mail: kirill.yakovenko@gmail.com

¹Crystalnix Ltd.

²Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article hybrid methods of numerical solving constrained optimization problems based on classical approaches such as penalty functions method, Lagrange multipliers theory and metaheuristics are discussed. The example of hybrid method based on particle swarm optimization and augmented Lagrangian method is given. Numerical experiment results are provided.

Keywords: constrained optimization, metaheuristics, penalty functions, Lagrange multipliers.

Дата поступления в редакцию: 21.12.2016

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА БЕЗУДАРНОГО СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ОДНОМЕРНЫХ СЛОЁВ ГАЗА В КОНФИГУРАЦИИ Р. МИЗЕСА

Н.С. Новаковский

аспирант, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

Аннотация. В статье изложены результаты численного исследования задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса в прямом направлении изменения времени. Приводится комбинированный алгоритм расчёта течения, использующий конечно-разностный метод «Ромб» и особый способ аппроксимации движения правой границы, обеспечивающий более точное описание течения в окрестности слабого разрыва. Приведены численные расчёты сжатия одномерных слоёв с различной симметрией до достаточно больших значений плотности. Полученные результаты расчётов сравниваются в том числе и с известным точным решением.

Ключевые слова: сильное сжатие газа, конечно-разностный метод «Ромб», метод отслеживания особенностей.

Введение

Математическое описание процесса безударного сжатия идеального газа до любого наперёд заданного значения плотности, в том числе до бесконечной плотности, представляет интерес в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [1, 2]. Идея безударного сжатия весьма привлекательна для получения сколь угодно больших плотностей при минимальных энергетических затратах благодаря отсутствию в течении ударных волн, т.е. сохранению в процессе сжатия начальной энтропии [3]. О привлекательности этой идеи можно судить по большому числу публикаций на эту тему (подробную библиографию см. в [4]).

В [4, 5] разработана математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. В частности, для случая сжатия цилиндрически $\nu = 1$ и сферически $\nu = 2$ симметричных слоёв политропного газа с показателем $\gamma > 1$ доказано, что непрерывная состыковка двух течений даёт решение задачи о безударном сильном сжатии до любой наперёд заданной плотности ненулевой массы газа.

В работе [6] предложен алгоритм расчёта безударного сильного сжатия в обратном направлении изменения времени одномерных слоёв первоначально

однородного и покоящегося газа с $\rho_0 = 1$ до любой наперёд заданной конечной постоянной плотности $\rho_* > 1$ с последующим восстановлением закона движения поршня, сжимающего слой газа. В работе [7] представлены результаты расчётов вышеупомянутым алгоритмом ряда одномерных задач с различной симметрией при сжатии одномерных слоёв снаружи.

В работе [8] предложен алгоритм расчёта безударного сильного сжатия изнутри одномерных слоёв газа при возрастании времени, основанный на конечно-разностном методе «Ромб» [9]. При этом используется закон движения поршня, сжимающего слой газа, восстановленный при решении задачи в обратном направлении изменения времени алгоритмом, предложенным в [6].

Расчёты в прямом направлении изменения времени по схеме «Ромб» выявили области течения, в которых предложенный алгоритм искажает решение в том числе в случае плоской симметрии ($\nu = 0$).

Целью данной работы является представление нового алгоритма, использующего все преимущества конечно-разностного метода «Ромб» и известную информацию о траектории движения слабого разрыва, разделяющего покоящийся и движущийся газ. Такой подход позволил улучшить точность численного решения в окрестности характеристики, разделяющей волну сжатия и фоновое течение.

1. Математическая постановка одномерной задачи безударного сильного сжатия газовых слоёв при возрастании времени

В момент времени $t = t_0$ дан одномерный плоско- ($\nu = 0$), цилиндрически ($\nu = 1$) или сферическисимметричный ($\nu = 2$) слой идеального газа. Ширина слоя — d_0 , масса m_0 , плотность $\rho_0 = 1$. Будем считать, что нам известны (рис. 1): $r_p(t)$, $u_p(t)$ — траектория движения и скорость поршня, сжимающего этот слой газа, $r_{C_0^+}(t)$ — траектория звуковой характеристики C_0^+ , отделяющей область покоящегося газа, обозначенная на рисунке цифрой 0, от области центрированной волны сжатия, обозначенной 1 (эти параметры течения восстанавливаются алгоритмом из работы [8]).

Необходимо построить решение при возрастании времени в тех частях областей 1 и 2, которые заключены между траекторией поршня (обозначенной на рис. 1 штрихованной линией) и характеристикой C_0^+ . В области 0 решение известно — это покоящийся газ $\rho = 1$, $u = 0$.

В предыдущей работе автора [8] для построения решения в прямом направлении изменения времени конечно-разностный метод «Ромб» использовался во всей области от поршня до r_* . Это приводит к «размазыванию» слабого разрыва, через который стыкуется область однородного покоя и область обобщённой центрированной волны сжатия (см. рис. 2).

Исходя из вышесказанного, будем строить решение методом «Ромб» только в области между поршнем и характеристикой C_0^+ .

Для построения искомого течения используется система уравнений газовой

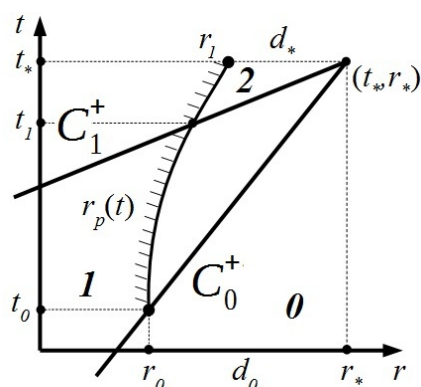


Рис. 1. Начальные данные для расчёта

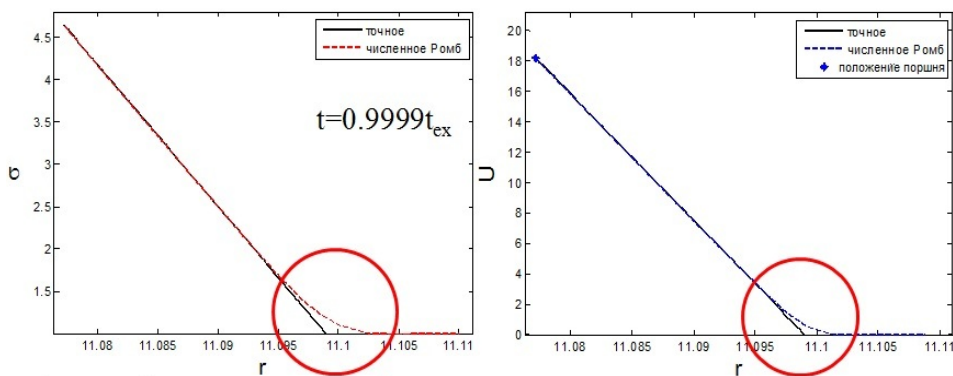


Рис. 2. Неточности в описании сжатия слоя методом «Ромб»

динамики в лагранжевых массовых переменных в одномерном случае.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial m}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial m}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial(pu)}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t, r, m, \rho, v = \frac{1}{\rho}, \varepsilon, p$ — соответственно: время, эйлерова координата, массовая лагранжева координата, плотность, удельный объём, удельная внутренняя энергия, давление, $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$ — удельная полная энергия.

Система замыкается уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho c_v T$, $\varepsilon = c_v T$, где c_v, T — теплоёмкость при постоянном объёме и температура газа соответственно.

К системе (1) присоединяются граничные и начальные условия в следующем виде

$$\begin{aligned}
u|_{r=r_l}(t) &= u_p(t), \\
u|_{r=r_{rg}}(t) &= 0, \\
u(x, 0) &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где r_l, r_{rg} — левая (left) и правая (right) границы отрезка, на котором решается система (1). В начальный момент времени $t = 0$ правая и левая границы совпадают, т.к. поршень, стартуя, порождает возмущение в покоящейся газе, распространяющееся со скоростью звука $r_l = r_p(0) = r_{rg} = r_{C_0^+}(0)$. В каждый последующий момент времени $t = t^n$: $r_l = r_p(t^n) < r_{rg} = r_{C_0^+}(t^n)$.

Применив для (1) неявную аппроксимацию и введя шаг по времени τ , получим:

$$\begin{aligned}
\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} &= \left(\frac{\partial u}{\partial m} \right)^{n+1}, \\
\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= - \left(\frac{\partial p}{\partial m} \right)^{n+1}, \\
\frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} + v^{n+1} \left(\frac{\partial(pu)}{\partial r} \right)^{n+1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Систему (3) будем решать, разбивая исходный отрезок $[r_l, r_{rg}]$ на N ячеек (пронумеруем узлы полученной сетки $r_0 = r_l, r_1, r_2, \dots, r_N = r_{rg}$). Граничные условия на левой и правой границах запишем так:

$$\begin{aligned}
u_0^n &= u_p(t^n), \\
u_N^n &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для решения системы (3) используем алгоритм метода «Ромб» [9]. В настоящей работе будет использована модификация метода в части интегрирования уравнения для координат и уравнения энергии. Для повышения точности при интегрировании по времени будем вместо узловых значений давления и скорости с итерации $\mu + 1$ использовать полусуммы:

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \cdot (U^{\mu+1} + U^n), \quad \tilde{P} = \frac{1}{2} \cdot (P^{\mu+1} + P^n),$$

где μ — номер итерации по нелинейности давления.

Ещё раз подчеркнём, что при комбинированном методе решения задачи сильного сжатия одномерного слоя газа будем использовать известную траекторию звуковой характеристики C^+ , а методом «Ромб» решение на каждом временном слое строится только в области $[r_p(t^n), r_{C_0^+}(t^n)]$.

2. Описание алгоритма комбинированного метода решения задачи сильного сжатия

Далее будет описан шаг комбинированного алгоритма. Пусть расчёт доведён до момента времени t^n . Расчёт на n -м временном шаге методом «Ромб» вёлся в

первых N интервалах расчётной сетки. Далее:

1) выбирается шаг по времени τ^{n+1} , исходя из общих соображений точности расчёта;

2) используя дискретный набор значений $u_p(t)$, полученный при решении задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени [6, 8], с помощью линейной интерполяции вычисляется $u_p(t^n + \tau^{n+1})$. В соответствии с известной траекторией $r_{C^+}(t)$ получаем $r_{C^+}(t^n + \tau^{n+1})$;

3) добавляется к расчётной области $(N + 1)$ -й интервал, так что $r_{N+1} = r_{C^+}(t^n + \tau^{n+1})$, значения газодинамических параметров на n -м слое в добавленном интервале соответствуют фоновому течению;

4) делаются вычисления согласно формулам метода «Ромб». Таким образом строим решение на новом временном слое.

Метод «Ромб» является неявным и обладает безусловной устойчивостью. Следовательно, можно выбирать временной шаг достаточно произвольно. Тем не менее из условия точности расчёта временные шаги, начиная со второго, выбираются в соответствии с критерием Куранта $\frac{C\tau}{h} \leq 1$. Для старта алгоритма, т.е. для обеспечения достаточного количества узлов расчётной сетки внутри рассчитываемой методом «Ромб» области, первый шаг τ_1 делается большим. Если при этом для сходимости метода требуется более 10 итераций, счёт прерывается и начинается заново с более мелким шагом.

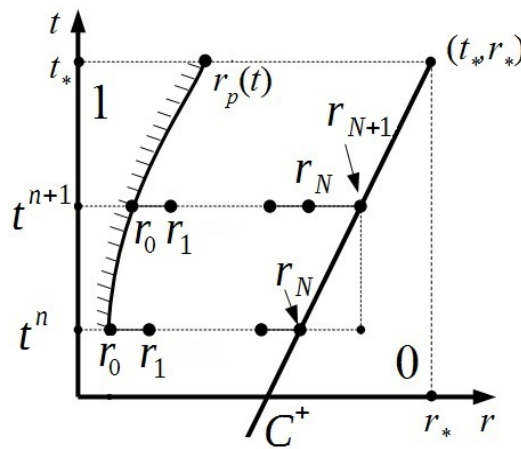


Рис. 3. Добавление расчётного интервала на правой границе

Опишем более подробно пункт 3 предложенного алгоритма (см. рис. 3). На текущем шаге во всей области $r_N < r < r_*$ газодинамические параметры соответствуют фоновому течению. При переходе на следующий временной слой правая граница смещается в соответствии с траекторией C_0^+ -характеристики. Величины с n -го слоя во всех интервалах кроме $(N + 1)$ -го берутся равными расчётным значениям, полученным методом «Ромб». Массовая координата $(N + 1)$ -го интервала вычисляется по фоновой плотности в зависимости от симметрии задачи $m_{N+1} = \rho_0 \cdot (r_{N+1}^{\nu+1} - r_N^{\nu+1})$, где $\nu = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

Таким образом, правая граница передвигается по покоящемуся газу. Такой метод избавляет от погрешностей, которые могли бы возникнуть при более общем подходе расчёта правой границы.

3. Результаты расчётов

Для проверки работоспособности алгоритма сначала был проведён расчёт плоскосимметричной задачи. Были взяты следующие параметры газа: $\gamma = 1.4$, $m^* = 10$. Точное решение в области между сжимающим поршнем и характеристикой C^+ имеет вид центрированной волны сжатия. На рисунке 4 приведены профили скорости и скорости звука для тестовой задачи. Чёрной сплошной линией здесь обозначено точное решение, синей пунктирной — численное. Можно утверждать, что модифицированный метод хорошо описывает область центрированной волны и область слабого разрыва вплоть до момента времени $t = 0.998t^*$.

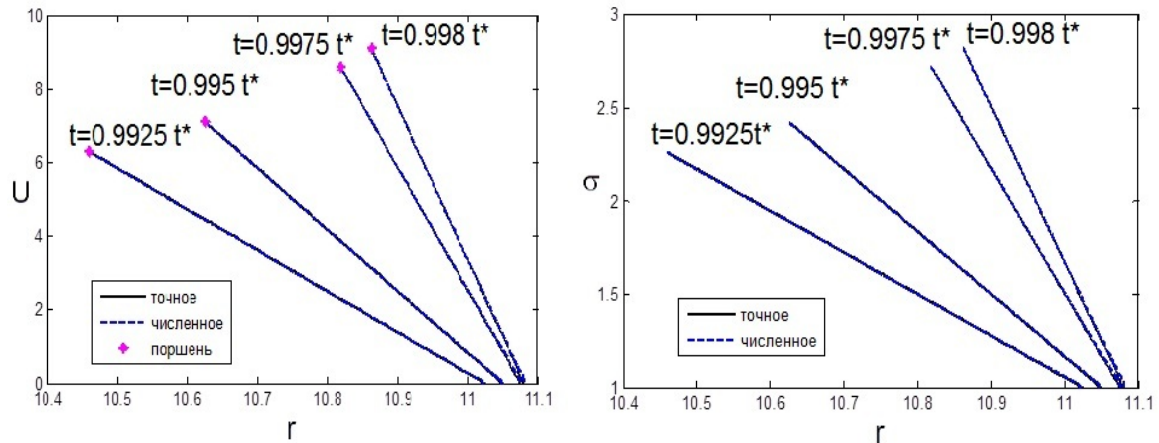


Рис. 4. Результаты расчёта тестовой задачи на различные моменты времени

Далее было проведено сравнение на тестовой задаче расчётных значений, полученных методом «Ромб», без выделения особенностей, и комбинированным методом. Из рисунка 5 можно сделать следующий вывод: представляемый метод описывает решение в области волны сжатия и в области слабого разрыва принципиально точнее исходного метода «Ромб».

По завершении тестирования методики были проведены численные эксперименты с цилиндрической и сферической симметрией. Кроме этого, также варьировались: показатель адиабаты γ и начальная масса газа. Консервативность схемы «Ромб» позволяет обеспечить выполнение закона сохранения массы в конце расчёта на уровне близком к машинному нулю. Для проверки закона сохранения энергии на каждом шаге по времени t^n производится подсчёт дис-

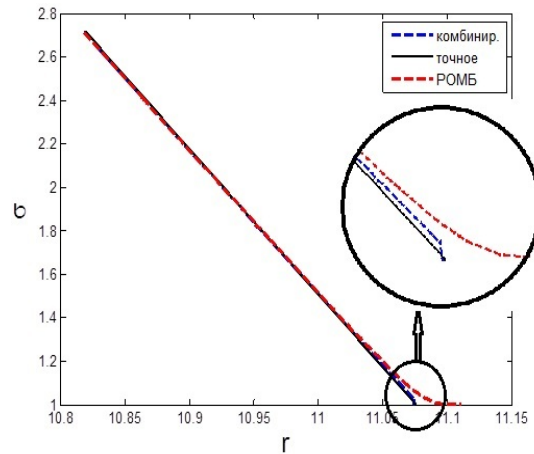


Рис. 5. Сравнение расчётов двумя методами

баланса по следующей формуле:

$$\Delta E^n = \frac{\sum_{k=1,N} m_k \cdot (E_k^n - E_k^0) + W}{\sum_{k=1,N} m_k \cdot E_k^n}, \tag{5}$$

где m, E_k^n, E_k^0 — масса, удельная полная энергия интервала на текущий и на начальный момент времени, W — работа сжимающего поршня, вычисляемая по формуле:

$$W = \sum_{l=2,n} \frac{1}{2} (P^{l-1} + P^l) (V^l - V^{l-1}) \approx \int_{t^0}^{t^n} P dV,$$

где P^l, V^l — давление на левой границе и объём системы на l -м временном шаге, полученные по вычисленным ранее значениям скорости звука на поршне и координаты поршня соответственно.

Дисбаланс энергии на различные моменты времени для одного из расчётов приведён в таблице 1.

Таблица 1. Дисбаланс энергии на различные моменты времени

$0.95t^*$	$0.975t^*$	$0.99t^*$	$0.995t^*$	$0.998t^*$
$-5.0861 \cdot 10^{-5}$	$-8.7531 \cdot 10^{-5}$	$-2.9584 \cdot 10^{-4}$	$-3.3866 \cdot 10^{-4}$	$-4.6709 \cdot 10^{-4}$

Дисбаланс связан с неточностью определения скорости поршня на текущем шаге по времени с помощью линейной интерполяции. Из таблицы 1 видно, что он практически не меняется с начала расчёта и его величина незначительна.

Ниже приводятся рисунки, демонстрирующие хорошую точность модифицированного метода, в том числе, и в области стыковки волны сжатия с покоящимся газом при расчётах задач с различной симметрией.

В качестве эталонного используется решение соответствующих задач в обратном направлении изменения времени методом характеристик с пересчётом.

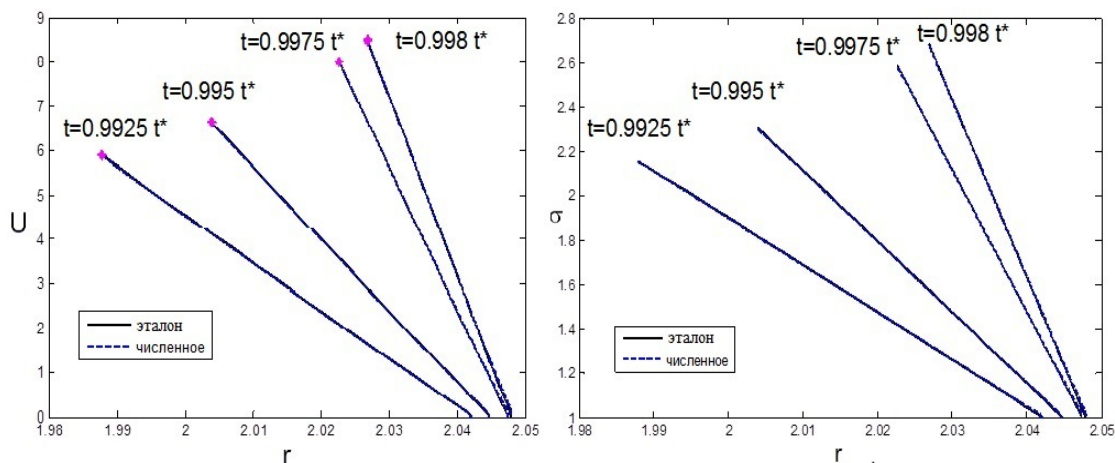


Рис. 6. Результаты расчёта на различные моменты времени $\gamma = 1.4, m^* = 10, \nu = 1$

Стоит отметить, что область стыковки волны сжатия и покоящегося газа описывается достаточно точно. Для примера приведены два решения различных задач. На рисунке 6 приведены профили искомых величин на различные моменты времени для цилиндрическисимметричной задачи $\gamma = 1.4, m^* = 10, \nu = 1$, а на рисунке 7 — для сферическисимметричной задачи $\gamma = 5/3, m^* = 10, \nu = 2$.

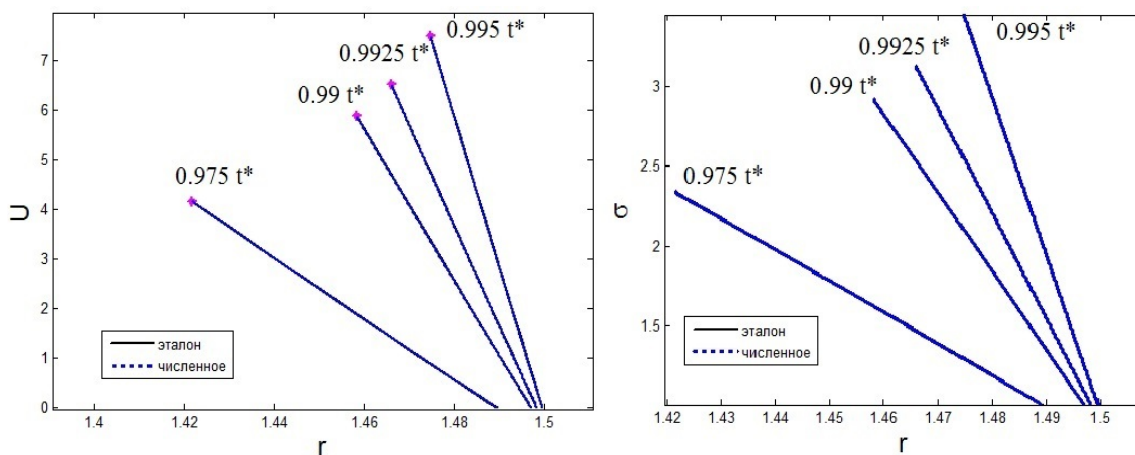


Рис. 7. Результаты расчёта на различные моменты времени $\gamma = 5/3, m^* = 10, \nu = 2$

4. Выводы

Представленные результаты позволяют сделать некоторые выводы.

1. Расчёты при возрастании времени неявным конечно-разностным методом «Ромб» демонстрируют работоспособность предлагаемой методики. При этом область волны сжатия адекватно описывается при приближении к моменту времени t_* . Точность расчётов не зависит от симметрии задачи. Основная погрешность расчёта локализована в достаточно узкой области вокруг слабого разрыва, отделяющего волну сжатия от покоящегося газа.
2. Реализованная модификация метода «Ромб» обеспечивает отслеживание слабого разрыва. Точность расчёта становится принципиально лучше.
3. При приближении к моменту времени t_* в области слабого разрыва наблюдается опережение нижним краем фронта волны сжатия звуковой C^+ -характеристики, что не позволяет проводить расчёт далее. При этом градиент искомых функций достигает значения 45.
4. Для получения в расчётах при возрастании времени значительных масс сжатого газа требуется привлечение дополнительных аналитических методов.

Автор выражает своему научному руководителю профессору С.П. Баутину признательность за внимание, помощь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М. : Наука, 1988. 173 с.
2. Накколс Дж.Г. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза // Успехи физ. наук. 1984. Т. 143, № 3. С. 467–482.
3. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 71 с.
4. Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск : Наука, 2007. 308 с.
5. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск : Наука, 1997. 160 с.
6. Баутин С.П., Николаев Ю.В. Об одном методе расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 3–12.
7. Николаев Ю.В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 104–108.
8. Новаковский Н.С. Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 93–109.
9. Гаджиев А.Д., Писарев В.Н. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. // Ж. выч. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288–1303.

**THE COMBINED NUMERICAL METHOD FOR SOLVING
THE ONE-DIMENSIONAL IDEAL GAS SHOCK-FREE STRONG COMPRESSION
PROBLEM IN R. MISES CONFIGURATION**

N.S. Novakovskiy

Graduate Student, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. A method for solving the one-dimensional ideal gas shock-free strong compression problem in R. Mises configuration is proposed. The method combines finite-difference method "ROMB" and tracking feature method. The method allows to calculate gas-dynamic characteristic (velocity, density, etc.) of ideal gas layer while time increases and provides better accuracy in comparison with other finite-difference methods. The accuracy of the proposed method was demonstrated in calculations of test plane-symmetry problem. Exact solution and numerical one agree quite well. Numerical results of solving one-dimensional problems with different symmetry and gas characteristic are also shown. The main results of numerical simulations are shown in graphs and tables.

Keywords: gas strong compression, finite difference method "Romb", discontinuity tracking method.

Дата поступления в редакцию: 27.12.2016

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.Е. Полосков

доцент, д.ф.-м.н., e-mail: polosk@psu.ru

Механико-математический факультет, Пермский государственный национальный
исследовательский университет

Аннотация. В работе рассматривается приближённая схема анализа линейных динамических систем, описываемых стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями с неразностными ядрами. Уравнения такого типа являются математическими моделями значительного числа явлений в различных областях науки и техники, включающих теорию колебаний объектов с сосредоточенными и распределёнными параметрами с учётом аэроавтоупругости, наследственности, (термо)вязкоупругости и старения материалов (асфальт, бетон, биополимеры, горные породы, коллоидные растворы, композиты, природные и искусственные полимеры, суспензии, стекло, целлюлоза и т.п.) и др. Предлагаемая расчётная схема основана на использовании модификации итерационного метода аппроксимации матричной функции Грина и предназначена для вычисления первых моментных функций вектора состояния системы, включая функции математического ожидания и ковариационные функции. Приводится пример применения схемы для анализа модельной системы с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: стохастический анализ, линейная динамическая система, вектор состояния, интегро-дифференциальное уравнение, матричная функция Грина, моментная функция.

Введение

Модели в форме детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ, СИДУ), обыкновенных и в частных производных, интересны как с теоретической, так и практической точек зрения вследствие того, что эти уравнения описывают значительное число явлений в различных областях науки и техники, в частности, в теории колебаний с учетом аэроавтоупругости [2], наследственности материала [9], (термо)вязкоупругости [11] и др. Общая теория и первичная классификация детерминированных интегро-дифференциальных уравнений была разработана В. Вольтерра [3] в первой

половине XX в. Некоторые современные общие приложения ИДУ рассмотрены в [14].

Системы обыкновенных СИДУ, например, в стохастической механике, часто возникают как результат применения таких методов, как метод конечных элементов (МКЭ) [4], метод Галёркина [5], метод конечных разностей (МКР) [8], метод прямых [13], разложение неизвестных функций по собственным функциям краевой задачи [12, 20] или каким-либо специальным функциям [7], к СИДУ в частных производных (СИДУвЧП) [21], которые описывают непрерывные вязкоупругие среды. После преобразования ИДУвЧП или СИДУвЧП в обыкновенные ИДУ или СИДУ зависящая от времени структура ядер в обыкновенных детерминированных или стохастических интегро-дифференциальных уравнениях движения сохраняется.

Некоторые интегро-дифференциальные уравнения можно свести к дифференциальным уравнениям в линейных нормированных пространствах. Однако существуют эволюционные ИДУ, служащие моделями во многих областях науки и содержащие интегрирование по времени, для которых это сделать сложно. Такие уравнения [3], обыкновенные и в частных производных, описывают сложное поведение объектов в различных средах с учётом предыдущей истории.

Нелинейные и линейные стохастические ИДУ, кроме предыстории, позволяют учесть влияние случайных возмущений на поведение объекта. Достаточно общие формы линейных систем СИДУ имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \int_{t_0}^t \mathcal{B}(t, \tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau + \mathbf{c}(t) + \mathcal{G}(t) \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0. \quad (1)$$

В этих уравнениях t — время, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$, $T < +\infty$; $\mathbf{X}(t) = \text{col}(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ и $\mathbf{U}(t) = \text{col}(U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t))$ — случайные векторные процессы, определяющие состояние системы (вектор состояния) и случайные возмущения соответственно; $\mathbf{c}(t) = \text{col}(c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$, $\mathcal{A}(t) = \{a_{ij}(t)\} \in \mathbb{M}_{n \times n}$, $\mathcal{B}(t, \tau) = \{b_{ij}(t, \tau)\} \in \mathbb{M}_{n \times n}$, $\mathcal{G}(t) = \{g_{ij}(t)\} \in \mathbb{M}_{n \times m}$ — неслучайные векторная и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов; \mathbf{X}^0 — случайный вектор с известными характеристиками, причём векторы \mathbf{X}^0 и $\mathbf{V}(t)$ статистически независимы; \mathbb{R}^s — стандартное евклидово пространство размерности s , $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $\text{col}(d_1, d_2, \dots, d_s)$ — вектор-столбец с соответствующими компонентами; $\mathbb{M}_{s \times q}$ — множество действительных $s \times q$ -матриц; точкой или точками сверху символа обозначаются производные по переменной t соответствующего порядка.

Вопросы, связанные с определением СИДУ, существованием и единственностью их решений, рассмотрены в [18, 19].

1. Постановка задачи

Пусть \mathbf{X}^0 — гауссов случайный вектор со значениями в \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{m}_{X^0} = \mathcal{E}[\mathbf{X}^0], \quad \mathcal{C}_{X^0 X^0} = \mathcal{E}[\{\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_{X^0}\}\{\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_{X^0}\}^\top];$$

а $U(t)$ — стохастический процесс, удовлетворяющий векторному линейному стохастическому дифференциальному уравнению Ито

$$dU(t) = \mathcal{H}U(t) dt + \mathcal{Q}dW(t), \quad t \in (t_0, T] \quad (2)$$

со случайным начальным условием $U(t_0) = U^0$. В уравнении (2) $\mathcal{H} = \{h_{ij}\} \in M_{m \times m}$ и $\mathcal{Q} = \{q_{ij}\} \in M_{m \times r}$ — заданные постоянные матрицы; $W(t) = \text{col}(W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t))$ — векторный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами, такой, что его обобщённая производная по времени t , обозначаемая через $V(t) = \text{col}(V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t))$, есть векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, $\mathcal{E}[W(t)] = \mathbf{0}_r$, $\mathcal{E}[V(t)V^\top(t')] = 2\pi \mathcal{I} \delta(t - t')$; δ — дельта-функция Дирака; \top — символ транспонирования; \mathcal{I} — единичная матрица соответствующего порядка; U^0 — начальный вектор, представляющий собой центрированную гауссову случайную величину со значениями в \mathbb{R}^m ; $\mathbf{0}_s$ — нулевой s -вектор. Предполагается, что плотность вероятности вектора U^0 — гауссово стационарное распределение, ассоциированное с уравнением (2). Параметрами этого распределения являются вектор математических ожиданий $m_{U^0} = \mathcal{E}[U^0] = 0$ и ковариационная матрица $C_{U^0 U^0} = \mathcal{E}[U^0 U^{0\top}]$. Кроме того, в уравнении (2) матрицы \mathcal{H} и \mathcal{Q} таковы, что $U(t)$ — случайный процесс второго порядка. Следовательно, $\{U(t), t \in [t_0, T]\}$ — стационарный центрированный непрерывный в среднем квадратичном гауссовский случайный процесс, для которого

$$U^0 = \mathbf{0}_m,$$

$$C_{UU}(t_1 - t_2) = C_{UU}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[U(t_1)U^\top(t_2)], \quad C_{UU}(0) = C_{U^0 U^0}.$$

Учитывая, что X^0 и $U(t)$ — гауссовские случайные вектор и процесс соответственно, линейность уравнений (1) и (2), а также высказанные выше предположения, можно установить, что $\{X(t), t \in [t_0, T]\}$ — непрерывный в среднем квадратичном гауссовский векторный случайный процесс второго порядка. При этом для всех непустых и неупорядоченных точечных подмножеств отрезка $[t_0, T]$ многомерные распределения расширенных случайных векторов состояния будут гауссовыми, определяемыми соответствующими векторами средних и ковариационных матриц.

Найдём теперь векторную функцию математических ожиданий (ВФМО) и матрицу ковариационных функций (МКФ) векторного случайного процесса $X(t)$, а также все взаимные МКФ $X(t)$ и векторного возмущения $U(t)$:

$$m_X(t) = \mathcal{E}[X(t)], \quad C_{XX}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[X(t_1)X^\top(t_2)] - m_X(t_1)m_X^\top(t_2),$$

$$C_{XU}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[X(t_1)U^\top(t_2)], \quad C_{UX}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[U(t_1)X^\top(t_2)].$$

Принимая во внимание введённые определения и обозначения, несложно установить, что решение поставленной задачи заключается в создании схемы для вычисления ВФМО $m_X(t)$ и МКФ $C_{XX}(t_1, t_2)$ для любых $t, t_1, t_2 \in (t_0, T]$.

2. Уравнения для моментных функций первого и второго порядка

Применение оператора математического ожидания к обеим частям уравнений (1) даёт:

$$\dot{\mathbf{m}}_X(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{m}_X(t) + \int_{t'}^t \mathcal{B}(t, \tau) \mathbf{m}_X(\tau) d\tau + \mathbf{c}(t), \quad t_0 \leq t' < t \leq T, \quad (3)$$

$$\mathbf{m}_X(t') = \mathbf{m}_{X'}, \quad \mathbf{m}_X(t') = \mathbf{m}_{X^0} \quad \text{для} \quad t' = t_0.$$

Чтобы получить уравнение для $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$, необходимо расширить вектор состояния системы (1) до нового случайного вектора $\mathbf{Y}(t) = \text{col}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))$ со значениями в \mathbb{R}^{n+m} . Тогда ВФМО $\mathbf{m}_Y(t)$ со значениями в \mathbb{R}^{n+m} и МКФ $\mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) \in \mathbb{M}_{(n+m) \times (n+m)}$ случайного процесса $\mathbf{Y}(t)$ определяются соотношениями

$$\mathbf{m}_Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X(t) \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2) & \mathcal{C}_{XU}(t_1, t_2) \\ \mathcal{C}_{UX}(t_1, t_2) & \mathcal{C}_{UU}(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Введённый случайный процесс $\mathbf{Y}(t)$ (4) будет удовлетворять системе СИДУ

$$d\mathbf{Y}(t) = \left[\mathbb{A}(t) \mathbf{Y}(t) + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathbf{Y}(\tau) d\tau + \mathbf{c}(t) \right] dt + \mathbb{Q} d\mathbf{W}(t), \quad t_0 \leq t' < t \leq T \quad (5)$$

со случайным начальным условием

$$\mathbf{Y}(t') = \mathbf{Y}', \quad \mathbf{Y}' = \text{col}(\mathbf{X}^0, \mathbf{U}^0) \quad \text{для} \quad t' = t_0. \quad (6)$$

В уравнении (5) матрицы $\mathbb{A}(t) \in \mathbb{M}_{(n+m) \times (n+m)}$, $\mathbb{B}(t) \in \mathbb{M}_{(n+m) \times (n+m)}$, $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}_{(n+m) \times r}$ и вектор $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$ имеют блочную структуру и определяются так:

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(t) & \mathcal{G}(t) \\ \mathcal{O}_{m \times n} & \mathcal{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}(t) & \mathcal{O}_{n \times m} \\ \mathcal{O}_{m \times n} & \mathcal{O}_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times r} \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(t) \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{O}_{s \times q}$ — нулевая $s \times q$ -матрица.

Для получения уравнений для ковариационных функций равенством $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{m}_Y(t)$ введём центрированный случайный процесс

$\{\mathbf{Z}(t), t \in [t_0, T]\}$ со значениями в \mathbb{R}^{n+m} , где $\mathbf{m}_Y(t)$ — математическое ожидание, определённое равенством (4). Поэтому центрированный векторный случайный процесс $\mathbf{Z}(t)$ будет решением системы СИДУ

$$d\mathbf{Z}(t) = \left[\mathbb{A}(t) \mathbf{Z}(t) + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathbf{Z}(\tau) d\tau \right] dt + \mathbb{Q} d\mathbf{W}(t), \quad t_0 \leq t' < t \leq T \quad (7)$$

со случайным начальным условием $\mathbf{Z}(t') = \mathbf{Y}' - \mathbf{m}_{Y'}$.

Вследствие того, что $\mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) = \mathcal{C}_{Y'Y'}^\top(t_2, t_1) = \mathcal{C}_{ZZ}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t_1) \mathbf{Z}^\top(t_2)]$, при заданном $\mathcal{C}_{YY}(t', t')$ из (7) могут быть получены следующие уравнения ($t_0 \leq t' < t \leq T$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_{YY}(t, t') &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t) \mathbf{Z}^\top(t')] = \mathcal{E}[\dot{\mathbf{Z}}(t) \mathbf{Z}^\top(t')] = \\ &= \mathbb{A}(t) \mathcal{C}_{YY}(t, t') + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathcal{C}_{YY}(\tau, t') d\tau; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_{YY}(t', t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t') \mathbf{Z}^\top(t)] = \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t') \dot{\mathbf{Z}}^\top(t)] = \\ &= \mathcal{C}_{YY}(t', t) \mathbb{A}^\top(t) + \int_{t'}^t \mathcal{C}_{YY}(t', \tau) \mathbb{B}^\top(t, \tau) d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{C}_{YY}(t, t) &= \frac{d}{dt} \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t) \mathbf{Z}^\top(t)] = \mathcal{E}[\dot{\mathbf{Z}}(t) \mathbf{Z}^\top(t)] + \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t) \dot{\mathbf{Z}}^\top(t)] = \\ &= \mathbb{A}(t) \mathcal{C}_{YY}(t, t) + \{\mathbb{A}(t) \mathcal{C}_{YY}(t, t)\}^\top + \\ &+ \int_{t'}^t \left[\mathbb{B}(t, \tau) \mathcal{C}_{YY}(\tau, t) + \{\mathbb{B}(t, \tau) \mathcal{C}_{YY}(\tau, t)\}^\top \right] d\tau + 2\pi \mathbb{Q} \mathbb{Q}^\top. \quad (10) \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (9) может быть получено транспонированием уравнения (8), а также заменой t' на t , и наоборот, в ряде мест.

Уравнения (8)–(10) должны решаться с учётом начальных условий

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{YY}(t', t') &= \mathcal{C}_{Y'Y'}, \\ \mathcal{C}_{Y'Y'} &= \mathcal{C}_{YY}(t_0, t_0) = \mathcal{C}_{Y^0Y^0} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times m} \\ \mathcal{O}_{m \times n} & \mathcal{C}_{U^0U^0} \end{bmatrix} \quad \text{для } t' = t_0. \end{aligned}$$

3. Матричная функция Грина для системы линейных ИДУ и схема для её приближённого вычисления

Предположим, что необходимо решить систему ИДУ

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbb{A}(t) \mathbf{z}(t) + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathbf{z}(\tau) d\tau + \mathbf{f}(t), \quad t_0 \leq t' < t \quad (11)$$

с начальным условием

$$z(t') = z', \quad z' = z^0 \quad \text{для} \quad t' = t_0. \quad (12)$$

Тогда решение уравнений (11) и (12) может быть записано так (см., например, [15]):

$$z(t) = \mathcal{R}(t, t') z' + \int_{t'}^t \mathcal{R}(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad t' < t, \quad (13)$$

где $\mathcal{R}(s, p)$ — матричная функция Грина, ассоциированная с уравнением (11) и являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}(s, p) = \mathbf{A}(s) \mathcal{R}(s, p) + \int_p^s \mathbf{B}(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau, \quad p < s, \quad \mathcal{R}(p, p) = \mathcal{I}. \quad (14)$$

Среди методов решения систем ИДУ есть и те, практическое применение которых требует вычисления функций Грина. Первым среди них является метод последовательных приближений [15], предполагающий использование длинных аналитических выкладок. Для автоматизации таких действий может быть применен какой-либо пакет компьютерной алгебры (ПКА) [16]. Но применение даже современных ПКА не позволяет эффективно реализовать указанный метод последовательных приближений. Основной причиной является то, что эта схема требует вычисления значительного числа интегралов в замкнутой форме, что не всегда выполнимо. С другой стороны, существует возможность представить $\mathcal{R}(s, p)$ вообще без использования операции интегрирования в следующей форме [10]:

$$\mathcal{R}(s, p) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}_\ell(p, p)}{\ell!} (s - p)^\ell, \quad \mathcal{R}_\ell(s, p) = \frac{\partial^\ell \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^\ell}. \quad (15)$$

При применении этого подхода, коэффициенты ряда Тейлора в равенстве (15) могут быть получены последовательным дифференцированием обеих частей уравнения (14) по t (см. Приложение). Ограничиваясь на практике L -й производной, из равенства (15) можно получить, что с точностью $O[(s - p)^L]$

$$\widehat{\mathcal{R}}(s, p) \approx \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}(s, p) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{\mathcal{R}_\ell(p, p)}{\ell!} (s - p)^\ell. \quad (16)$$

4. Матричная функция Грина для первых и вторых моментных функций

Сравнивая уравнения (11) и (12) с уравнениями (3) и используя уравнение (13), можно установить, что ВФМО $\mathbf{m}_X(t)$ выражается соотношением

$$\mathbf{m}_X(t) = \mathcal{R}^{[m]}(t, t') \mathbf{m}'_X + \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[m]}(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (17)$$

в котором вектор $\mathbf{f}(\tau)$ определяется равенством $\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{c}(\tau)$, а матричная функция Грина $\mathcal{R}(s, s_0)$, ассоциированная с векторной функцией $\mathbf{m}_X(t)$, записывается как $\mathcal{R}^{[m]}(s, s_0)$ и вычисляется из уравнения (14) и соотношения (16) при

$$\mathbf{A}(t) = \mathcal{A}(t), \quad \mathbf{B}(t, \tau) = \mathcal{B}(t, \tau).$$

Построение соотношений для вычисления МКФ начнём с уравнения (8) для $\mathcal{C}_{YY}(t, t')$ при $t > t'$. Заметим, что решение уравнений (11) и (12), которое даётся равенством (13), а матричная функция Грина $\mathcal{R}(s, s_0)$ удовлетворяет (14), записано для векторной функции. Рассматривая матрицу $\mathcal{C}_{YY}(t, t')$ как множество векторов-столбцов $\{\mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t, t'), \gamma = 1, 2, \dots, n + m\}$, получим

$$\mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t, t') = \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t', t'), \quad t_0 \leq t' < t \leq T, \quad (18)$$

где матричная функция Грина $\mathcal{R}(s, s_0)$, ассоциированная с $\mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t_1, t_2)$, не зависит от γ , записана как $\mathcal{R}^{[C]}(t, t')$ и вычисляется из уравнения (14) и соотношения (16) при

$$\mathbf{A}(t) = \mathbb{A}(t), \quad \mathbf{B}(t, \tau) = \mathbb{B}(t, \tau).$$

Применяя выражение (18) для всех значений $\gamma = 1, 2, \dots, n + m$, можно установить, что матрица $\mathcal{C}_{YY}(t, t')$ определяется так:

$$\mathcal{C}_{YY}(t, t') = \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}(t', t'), \quad t_0 \leq t' < t \leq T. \quad (19)$$

Теперь обратимся к уравнению (9) для МКФ $\mathcal{C}_{YY}(t', t)$ ($t' < t$). Принимая во внимание замечание о возможности транспонирования обеих частей векторно-матричного уравнения (19) и перемены местами t' и t , получим:

$$\mathcal{C}_{YY}(t', t) = \mathcal{C}_{YY}(t', t') \mathcal{R}^{[C]\top}(t, t'), \quad t_0 \leq t' < t \leq T. \quad (20)$$

Более сложной задачей является вычисление МКФ $\mathcal{C}_{YY}(t, t)$, удовлетворяющей уравнению (10) для $t_0 < t \leq T$. Причина этого — присутствие $\mathcal{C}_{YY}(\tau, t)$ и $\mathcal{C}_{YY}^\top(\tau, t)$ для $t' < \tau < t$ в подынтегральной функции интеграла в правой части этого уравнения. Поэтому здесь требуется схема, основанная на использовании $\mathcal{R}^{[C]}(\cdot, \cdot)$ для представления векторного случайного процесса $\mathbf{Z}(t)$ — решения уравнения (7) в виде:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathbf{Z}(t') + \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[C]}(t, \tau) \mathbb{Q} d\mathbf{W}(\tau), \quad t' < t.$$

Это соотношение позволяет представить матричную функцию ковариаций $\mathcal{C}_{YY}(t, t)$ для всех $t_0 \leq t' < t \leq T$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{YY}(t, t) &= \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}(t', t') \mathcal{R}^{[C]\top}(t, t') + \\ &+ \int_{t'}^t \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[C]}(t, \tau_1) \mathbb{Q} \cdot 2\pi \mathbf{I} \delta(\tau_1 - \tau_2) \cdot \{\mathcal{R}^{[C]}(t, \tau_2) \mathbb{Q}\}^\top d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}(t', t') \mathcal{R}^{[C]\top}(t, t') + 2\pi \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[C]}(t, \tau) \mathbb{Q} \cdot \{\mathcal{R}^{[C]}(t, \tau) \mathbb{Q}\}^\top d\tau. \quad (21) \end{aligned}$$

5. Расчётные формулы для первых и вторых моментных функций

Введём временную сетку

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k < \dots < \tau_N = T,$$

$$h_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad \max_k h_k = h_* \ll 1.$$

Далее, полученные выше соотношения (17), (19), (20), (21) для первых и вторых моментных функций в непрерывном времени адаптируются для расчёта этих же функций в узлах сетки: $\mathbf{m}_{Xk} = \mathbf{m}_X(\tau_k)$, $\mathcal{C}_{YYk\nu} = \mathcal{C}_{YY}(\tau_k, \tau_\nu)$, $k, \nu = 1, 2, \dots, N$.

Численная аппроксимация ВФМО $\mathbf{m}_X(t)$, определяемая равенством (17), для $t' = \tau_{k-1}$, $t = \tau_k$ может быть записана так:

$$\widehat{\mathbf{m}}_{Xk} = \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau_{k-1}) \widehat{\mathbf{m}}_{X,k-1} + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau) \mathbf{c}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

$$\widehat{\mathbf{m}}_{X0} = \mathbf{m}_{X^0},$$

где

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \left. \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[m]}(s, \tau)}{\partial s^\ell} \right|_{s=\tau} (\tau_k - \tau)^\ell, \quad \tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k,$$

а для $\tau = \tau_{k-1}$

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau_{k-1}) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \left. \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[m]}(s, \tau_{k-1})}{\partial s^\ell} \right|_{s=\tau_{k-1}} h_k^\ell.$$

Интеграл в (22) может быть вычислен, например, с помощью правила Симпсона [6] (K – число интервалов разбиения шага h_k).

Подобным образом МКФ, которая для $t_0 \leq t' < t \leq T$ определяется соотношениями (19), (20), для $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ и $\nu = k+1, 2, \dots, N$ может быть приближённо рассчитана по формулам

$$\widehat{\mathcal{C}}_{YY\nu k} = \widehat{\mathcal{R}}^{[C]}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}) \widehat{\mathcal{C}}_{YY, \nu-1, k}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_{YYk\nu} = \widehat{\mathcal{C}}_{YYk, \nu-1} \mathcal{R}^{[C]\tau}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}),$$

в которых

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \left. \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[C]}(s, \tau_{\nu-1})}{\partial s^\ell} \right|_{s=\tau_{\nu-1}} h_k^\ell. \quad (23)$$

Наконец, для $t_0 \leq t' < t \leq T$ матричная функция ковариаций $\mathcal{C}_{YY}(t, t)$, которая находится из соотношения (21), для $k = 1, 2, \dots, N$ приближённо вычисляется по формуле

$$\widehat{\mathcal{C}}_{YYkk} = \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau_{k-1}) \widehat{\mathcal{C}}_{YY,k-1,k-1} \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]\top}(\tau_k, \tau_{k-1}) + 2\pi \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \mathcal{R}_L^{[C]}(\tau_k, \tau) \mathbb{Q} \cdot \{ \mathcal{R}_L^{[C]}(\tau_k, \tau) \mathbb{Q} \}^\top d\tau$$

с учётом начального условия $\widehat{\mathcal{C}}_{YY00} = \mathcal{C}_{Y_0Y_0}$, причём

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[C]}(s, \tau)}{\partial s^\ell} \Big|_{s=\tau} (\tau_k - \tau)^\ell, \quad \tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k,$$

а матрица $\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau_{k-1})$ должна быть определена из (23) после замены индекса ν на k .

6. Пример

Рассмотрим модельную систему, описываемую системой СИДУ

$$\ddot{\mathcal{X}}_1(t) + 2\alpha_1 [\dot{\mathcal{X}}_1(t) - \dot{\mathcal{X}}_2(t)] + \omega_1^2 [\mathcal{X}_1(t) - \mathcal{X}_2(t)] + b_0(t, \tau) \mathcal{X}_1(t) + \int_0^t b(t, \tau) \mathcal{X}_1(\tau) d\tau = g_0(t) U(t), \quad (24)$$

$$\ddot{\mathcal{X}}_2(t) + 2\alpha_2 [\dot{\mathcal{X}}_2(t) - \dot{\mathcal{X}}_1(t)] + \omega_2^2 [\mathcal{X}_2(t) - \mathcal{X}_1(t)] = g_0(t) U(t), \quad (25)$$

где $t \in [0, T]$, $\alpha_i > 0$, $\omega_i > 0$ — постоянные ($i = 1, 2$), $g_0(t)$ — действительная функция, определённая на $[0, T]$, $\{U(t), t \in [0, T]\}$ — стационарный центрированный гауссов случайный процесс второго порядка, непрерывный в среднем квадратическом, $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, являющийся решением СИДУ

$$dU(t) = -c_U U(t) dt + d_U dW(t) \quad (26)$$

со случайным начальным условием $U(0) = U^0$, причём случайная величина U^0 имеет распределение, соответствующее равновесному для $U(t)$, т.е. гауссову плотность вероятности с нулевым математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением σ_{U^0} :

$$\sigma_{U^0}^2 = \int_{\mathbb{R}} S_U(\omega) d\omega, \quad S_U(\omega) = \frac{d_U^2}{c_U^2 + \omega^2}, \quad c_U > 0, \quad d_U > 0$$

($S_U(\omega)$ — спектральная плотность). Далее, структура функций $b_0(t, \tau)$ и $b(t, \tau)$ была выбрана в следующей форме:

$$b_0(t, \tau) = \gamma_0 [1 - \mu_1 e^{-\beta_1 (t-\tau)^2} (h_0 + h_1 t + h_2 t^2) - \mu_2 e^{-\beta_2 (t-\tau)^2}], \quad (27)$$

$$b(t, \tau) = \frac{\partial b_0(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (28)$$

где $\gamma_0, \mu_i > 0, \beta_i > 0, h_0, h_1, h_2$ — постоянные ($i = 1, 2$).

Сравнивая уравнения модели (24)–(27) с системой (1), (2) и вводя обозначения $X_1(t) = \mathcal{X}_1(t), X_2(t) = \mathcal{X}_2(t), X_3(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t), X_4(t) = \mathcal{X}_2(t)$, находим, что $n = 4, m = 1, \mathbf{c}(t) = \mathbf{0}_4, \mathcal{H} = \{-c_U\}, \mathcal{Q} = \{d_U\}$,

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 - b_0(t, t) & \omega_1^2 & -2\alpha_1 & 2\alpha_1 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 & 2\alpha_2 & -2\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(t, \tau] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b(t, \tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0(t) \\ g_0(t) \end{bmatrix}.$$

В расчётах использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi, & \omega_2 &= 6\pi, & \alpha_1 &= \xi\omega_1, & \alpha_2 &= \xi\omega_2, & \xi &= 0.01, \\ c_U &= d_U = 0.5/\pi, & h_0 &= 1.0, & h_1 &= 1/6, & h_2 &= -1/144, \\ \gamma_0 &= 100.0, & \mu_1 &= 0.25, & \beta_1 &= 2.0, & \mu_2 &= 0.5, & \beta_2 &= 4.0, \\ g_0(t) &= -\frac{27}{27+t^3}, & T &= 24.0, & h_k &= h_* = 0.001, & L &= 4, & K &= 8, \end{aligned}$$

$$\mathbf{m}_{X^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{X^0 X^0} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Несложно установить, что при выбранных значениях параметров вектор функций математического ожидания $\mathbf{m}_X(t)$ будет нулевым для любого $t > 0$, т.е. не требует расчёта. Кроме того, на этапе подготовки вычислений было решено ограничиться получением компонент матрицы ковариаций $\mathcal{D}_X(t) = \mathcal{C}_X(t, t)$, как более информативных и более сложных для определения.

Рассмотренная выше расчётная схема была реализована в виде консольной программы на языке Intel Fortran [1]. Необходимые аналитические выкладки и построение графиков проводились в среде пакета Mathematica [17].

Наиболее интересные переходные режимы, демонстрирующие хаотические колебания в исследуемой системе, показаны на рис. 1–5, причём на рис. 1, 2 приведены кривые, соответствующие дисперсиям выбранных компонент вектора состояния, а на остальных — функции ковариации.

Для проверки адекватности полученного решения задачи вычисления производились с уменьшенными десятикратно шагами сетки, но результаты расчётов, полученные для различных величин шагов, отличались несущественно.

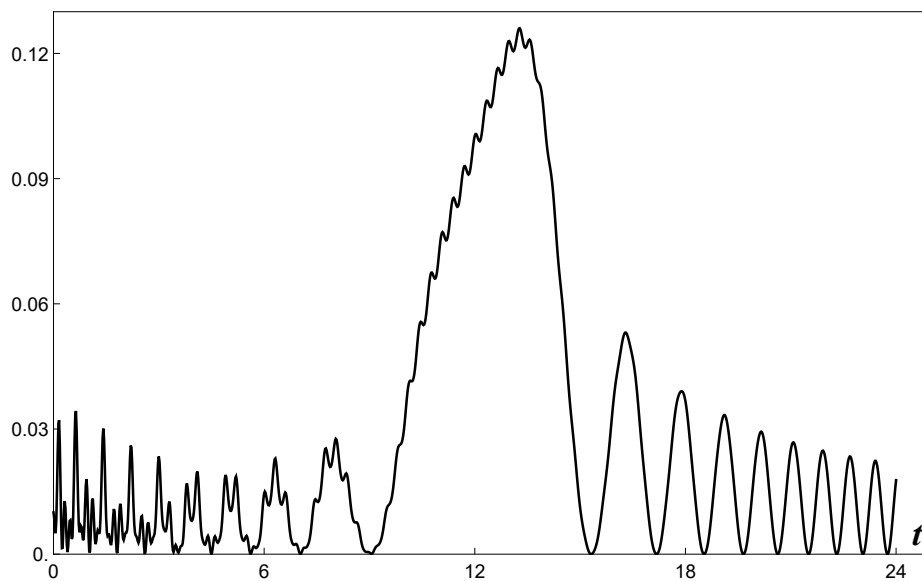


Рис. 1. Функция дисперсии $X_2(t)$

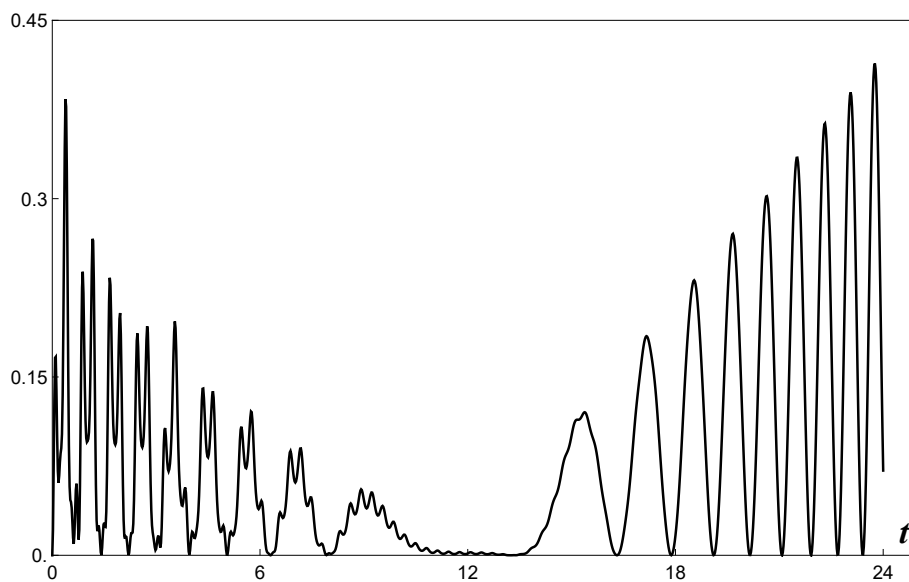
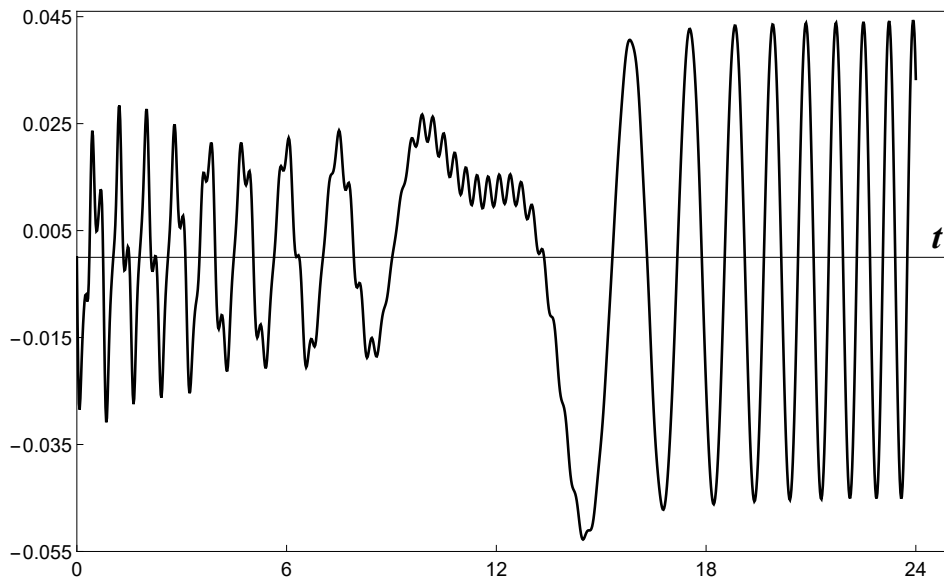
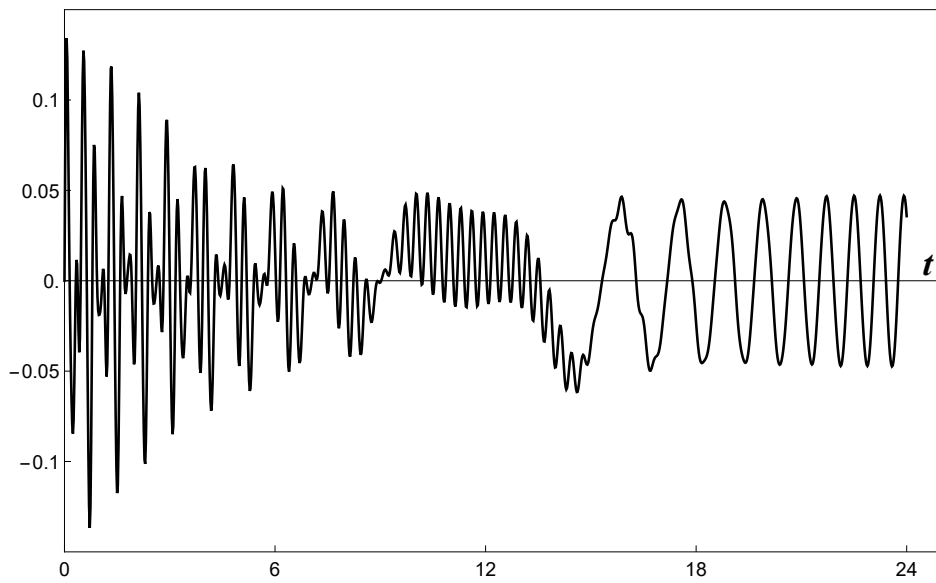
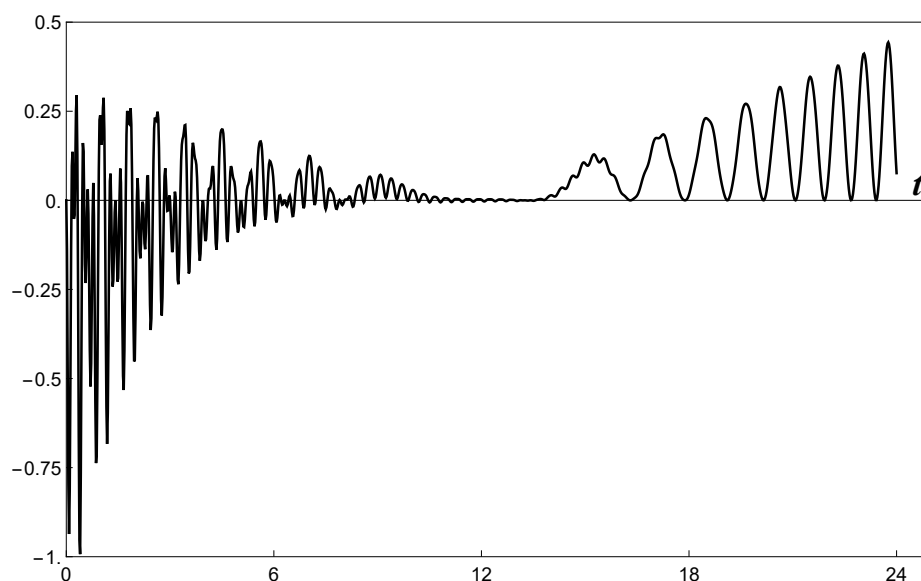


Рис. 2. Функция дисперсии $X_3(t)$

Рис. 3. Функция ковариации $C_{13}(t)$ Рис. 4. Функция ковариации $C_{14}(t)$

Рис. 5. Функция ковариации $C_{34}(t)$

7. Заключение

В работе представлена приближённая схема вычисления векторной функции математических ожиданий и матричной ковариационной функции вектора состояния линейной стохастической интегро-дифференциальной системы, основанная на использовании аппроксимации матричной функции Грина. Структура построенных расчётных формул позволяет использовать переменный шаг h_k с целью поддержания необходимой точности оценивания $\mathbf{m}_X(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, и $C_{XX}(t, t')$, $t_0 \leq t' \leq t \leq T$, а также, при необходимости, применить параллельные вычисления для получения сеточных значений МКФ.

Благодарности

Благодарю профессора К. Суаза (C. Soize, Университет Париж–Восток в Марн-ла-Валле, Франция) за прототип модели, исследовавшейся в разделе 6. Данная работа была выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019), а также Минобрнауки России (Задание № 2014/153).

Приложение

Коэффициенты ряда Тейлора для функции Грина при $L = 4$ имеют вид:

$$\mathcal{R}_1(s, p) = A(s) \mathcal{R}(s, p) + \int_p^s B(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau,$$

$$\mathcal{R}_1(p, p) = A(p),$$

$$\mathcal{R}_2(s, p) = [A'(s) + B(s, s)] \mathcal{R}(s, p) + A(s) \frac{\partial \mathcal{R}(s, p)}{\partial s} + \int_p^s B'_s(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau,$$

$$\mathcal{R}_2(p, p) = A'(p) + B(p, p) + A(p) \mathcal{R}_1(p, p),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3(s, p) = & [A''(s) + 2B'_s(s, q)|_{q=s} + B'_q(s, q)|_{q=s}] \mathcal{R}(s, p) + \\ & + [2A'(s) + B(s, s)] \frac{\partial \mathcal{R}(s, p)}{\partial s} + A(s) \frac{\partial^2 \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^2} + \int_p^s B''_{ss}(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3(p, p) = & A''(p) + 2B'_p(p, q)|_{q=p} + B'_q(p, q)|_{q=p} + \\ & + [2A'(p) + B(p, p)] \mathcal{R}_1(p, p) + A(p) \mathcal{R}_2(p, p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4(s, p) = & [A'''(s) + 3B''_{ss}(s, q)|_{q=s} + 3B''_{sq}(s, q)|_{q=s} + B''_{qq}(s, q)|_{q=s}] \mathcal{R}(s, p) + \\ & + [3A''(s) + 3B'_s(s, q)|_{q=s} + 2B'_q(s, q)|_{q=s}] \frac{\partial \mathcal{R}(s, p)}{\partial s} + [3A'(s) + B(s, s)] \frac{\partial^2 \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^2} + \\ & + A(s) \frac{\partial^3 \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^3} + \int_p^s B'''_{sss}(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4(p, p) = & A'''(p) + 3B''_{pp}(p, q)|_{q=p} + 3B''_{pq}(p, q)|_{q=p} + B''_{qq}(p, q)|_{q=p} + \\ & + [3A''(p) + 3B'_p(p, q)|_{q=p} + 2B'_q(p, q)|_{q=p}] \mathcal{R}_1(p, p) + \\ & + [3A'(p) + B(p, p)] \mathcal{R}_2(p, p) + A(p) \mathcal{R}_3(p, p). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Л., Кондратьев В.В. Программирование на Visual Fortran. М. : Диалог-МИФИ, 2008. 472 с.
2. Введение в аэроавтоупругость / С.М. Белоцерковский [и др.]. М. : Наука, 1980. 384 с.
3. Вольterra В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1982. 304 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М. : Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. М. : Наука и техника, 1983. 287 с.

7. Маланин В.В., Полосков И.Е. Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 160 с.
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М. : Наука, 1980. 536 с.
9. Кхием Н.Т. Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 115-118.
10. Полосков И.Е. Об одном методе приближённого анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1276–1279.
11. Потапов В.Д. Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 137–145.
12. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 152 с.
13. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.
14. Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics / Y.N. Grigoriev [et al.]. Dordrecht, Heidelberg : Springer Science+Business Media, 2010. XIII. 305 p.
15. Hu Sh., Lakshmikantham V. Monotone iterative technique for integro-differential equations // Асимптотические методы математической физики: сб-к научн. трудов. АН УССР, Ин-т математики. Киев : Наукова думка, 1988. С. 263–270.
16. List of computer algebra systems. URL: en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems (дата обращения: 01.08.2016).
17. Mangano S. Mathematica cookbook. Sebastopol (CA) : O'Reilly, 2010. XXIV. 800 p.
18. Mao X. Stochastic differential equations and applications. Oxford : Woodhead Publishing, 2010. 422 p.
19. Mohammed S.E.A. Stochastic functional differential equations. Boston : Pitman, 1984. VI. 245 p.
20. Potapov V.D. Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. Chichester : John Wiley and Sons, 1999. XI. 275 p.
21. Soize C., Poloskov I. Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // Computers and Math. Appl. 2012. V. 64, N. 11. P. 3594–3612.

**SYMBOLIC & NUMERIC SCHEME OF APPLICATION OF THE MATRIX
GREEN'S FUNCTION FOR AN ANALYSIS OF LINEAR SYSTEMS
OF STOCHASTIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

I.E. Poloskov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor,
the Head of Higher Mathematics Department, e-mail: polosk@psu.ru

Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University

Abstract. A scheme for analysis of linear dynamical systems described by stochastic integro-differential equations with nondifference kernels is considered. Such equations are mathematical models of a significant number of phenomena in various scientific and technological fields including the theory of oscillations for objects with lumped and distributed parameters taking into account aeroautoelasticity, heredity, (thermo)viscoelasticity and aging of materials (asphalt, concrete, biopolymers, rocks, colloidal solutions, composites, natural and synthetic polymers, suspensions, glass, cellulose, etc.) and others. The calculation scheme proposed is based on a modification of the iterative method for approximation of the matrix Green's function and is designed to compute the first moment functions of the state vector of the system including functions of mathematical expectation and covariance functions. The example shows an application of our scheme for an analysis of a model system with two degrees of freedom.

Keywords: stochastic analysis, linear dynamic system, state vector, integro-differential equation, matrix Green's function, moment function.

Дата поступления в редакцию: 06.09.2016

WHY MOST BRIGHT STARS ARE BINARY BUT MOST DIM STARS ARE SINGLE: A SIMPLE QUALITATIVE EXPLANATION

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. It is known that most visible stars are binary: they have a nearby companion star, and these two stars orbit around each other. Based on this fact, until recently, astronomers believed that, in general, most stars are binary. A few years ago, a surprising paper showed that while most bright stars are indeed binary, most dim stars are single. In this paper, we provide a simple qualitative explanation for this empirical fact.

Keywords: binary stars, single stars, statistics.

1. Why Most Bright Stars are Binary But Most Dim Stars Are Single: An Empirical Fact That Needs to Be Explained

Most visible stars are binary stars: an empirical fact. Since the 18th century, it has been known that many visible stars are binary. As the resolution of the astronomical instruments increased, more and more visible stars turned out to have star companions.

At present, it is estimated that 75-80% of visible stars are binary stars; see, e.g., [1]. From this viewpoint, our Sun is an exception.

Resulting conjecture: most stars are binary. Since most visible stars are binary, astronomers naturally concluded that, in general, most stars are binary.

This conclusion led to pessimistic estimates for the number of planets: it is very difficult for a binary star to have a stable planetary orbit, so the natural conclusion was that most stars do not have planets.

Recent observation: most stars are single. Surprisingly, it turns out that most stars are single. This does not contradict to the fact that most visible stars are binary. Indeed, for a star to be visible to a naked eye at a large distance, this star must be sufficiently bright. From this viewpoint, visible stars are bright stars.

However, observations with modern telescopes have shown that most stars are dim, much less bright than our Sun. And it turns out that the vast majority of dim stars are single; see, e.g., [2]. Thus, most stars are single.

An explanation is needed. How can we explain this empirical fact — that most bright stars are binary while most dim stars are single? In this paper, we provide a possible qualitative explanation of this fact.

For this explanation, we need to recall how stars are formed in the first place.

2. How Stars Are Formed: A Brief Reminder

How celestial bodies are formed: a general description. According to astrophysics, in the beginning, matter was reasonably uniformly distributed. However, a uniform distribution is not stable: if we have an excess mass at some point, this excess mass starts attracting matter from nearby regions. Thus, clusters are formed. Clusters grow and merge and eventually, instead of the original reasonably uniform cloud, we have one, two, or more bodies.

Some bodies become stars, some become planets. Depending on the density of the cloud, these bodies have different masses.

If the body's mass is sufficiently large, then the gravitational pressure inside this body becomes large enough to ignite a nuclear reaction, and a star is born. In general, the larger the mass, the brighter the star.

If a body does not have enough mass, it remains a planet. Let us denote the threshold mass separating stars from planets by M_0 .

3. Resulting Explanation of the Empirical Fact

Average mass of the resulting bodies. In the above star formation process, the density of the original cloud determines the average mass \bar{M} of the resulting bodies.

The actual masses differ from the average. The actual masses of the resulting bodies may deviate from the average, due to many random factors.

According to the Central Limit Theorem, the joint effect of many independent random factors can be described, with high accuracy, by a normal distribution; see, e.g., [3]. Thus, we can conclude that the masses M_i of different objects have the form $M_i = \bar{M} \cdot \eta_i$, where η_i is a normally distributed random variable with mean 1 and some standard deviation.

If we have two bodies, then the largest has the mass $\bar{M} \cdot \max(\eta_1, \eta_2)$ and the smallest has the mass $\bar{M} \cdot \min(\eta_1, \eta_2)$.

Here, on average, $\eta_1 \approx 1$ and $\eta_2 \approx 1$, so $\min(\eta_1, \eta_2) \approx 1$ and $\max(\eta_1, \eta_2) \approx 1$.

When are both bodies stars? By definition of the threshold M_0 , both bodies are stars if and only if the masses of both bodies exceed M_0 . This is equivalent to requiring that the mass of the smallest body exceeds M_0 , i.e., that $\bar{M} \cdot \min(\eta_1, \eta_2) \geq M_0$ and thus, that

$$\min(\eta_1, \eta_2) \geq \frac{M_0}{\bar{M}}.$$

This explains why most bright stars are binary. The bright stars correspond to large values of the average mass, i.e., to $\bar{M} \gg M_0$. In this case,

$$\frac{M_0}{\bar{M}} \ll 1$$

and, since $\min(\eta_1, \eta_2) \approx 1$, we have, with high probability, $\min(\eta_1, \eta_2) \geq \frac{M_0}{\bar{M}}$.

Thus, when $\bar{M} \gg M_0$, with high probability both objects are stars, and we have a binary star.

This also explains why most dim stars are single. By definition, a dim star is a star whose mass is barely above the threshold, i.e., for which

$$\bar{M} \cdot \max(\eta_1, \eta_2) \approx M_0.$$

In this case, for the smaller object, we have

$$\bar{M} \cdot \min(\eta_1, \eta_2) = (\bar{M} \cdot \max(\eta_1, \eta_2)) \cdot \frac{\min(\eta_1, \eta_2)}{\max(\eta_1, \eta_2)} \approx M_0 \cdot \frac{\min(\eta_1, \eta_2)}{\max(\eta_1, \eta_2)}.$$

Here,

$$\frac{\min(\eta_1, \eta_2)}{\max(\eta_1, \eta_2)} < 1$$

and thus, with high probability, the mass of the smaller object is smaller than the threshold M_0 .

So, for dim stars, with high probability, the second body is not a star — and thus, most dim stars are single.

Conclusion. So, our simple model explains why most bright stars are binary, while most dim stars are single.

Acknowledgments

This work was supported by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award “UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative” from Prudential Foundation.

The authors are thankful to all the participants of the IEEE Series of Symposia on Computational Intelligence SSCI'2016 (Athens, Greece, December 6–9, 2016) for valuable discussions.

REFERENCES

1. Duquennoy A., Mayor M. Multiplicity among solar-type stars in the solar neighbourhood. II — Distribution of the orbital elements in an unbiased sample // *Astronomy and Astrophysics*. 1991. V. 248, N. 2. P. 485–524.

2. Lada C.J. Stellar Multiplicity and the IMF: Most Stars Are Single // The Astrophysical Journal Letters. 2006. V. 640. P. L63–L66.
3. Sheskin D.J. Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2011.

**ПОЧЕМУ БОЛЬШИНСТВО ЯРКИХ ЗВЁЗД ЯВЛЯЮТСЯ ДВОЙНЫМИ,
А БОЛЬШИНСТВО ТУСКЛЫХ ЗВЁЗД — ОДИНОЧНЫМИ: ПРОСТОЕ
КАЧЕСТВЕННОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ**

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Известно, что большинство видимых звёзд являются двойными — у них поблизости есть звезда-компаньон, и эти две звезды вращаются вокруг друг друга. Исходя из этого факта, до недавнего времени астрономы полагали, что в целом большинство звёзд являются двойными. Несколько лет назад неожиданный результат показал, что в то время как большинство ярких звёзд действительно двойные, большинство тусклых звёзд одиночные. В этой статье мы приводим простое качественное объяснение этого эмпирического факта.

Ключевые слова: двойные звёзды, одиночные звёзды, статистика.

Дата поступления в редакцию: 7.12.2016

WHEN INVADING, CANCER CELLS DO NOT DIVIDE: A GEOMETRIC (SYMMETRY-BASED) EXPLANATION OF AN EMPIRICAL OBSERVATION

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. In general, malignant tumors are known to grow fast, cancer cells that form these tumors divide and spread around. Tumors also experience the process of metastasis, when cancer cells invade neighboring organs. A recent experiment has shown that, contrary to the previous assumptions, when cancer cells are invading, they stop dividing. In this paper, we provide a geometric explanation for this empirical phenomenon.

Keywords: cancer, metastasis, symmetry.

1. Formulation of the Problem

What is cancer and how it is usually treated: a brief reminder. In a nutshell, cancer is when some cells in the body start dividing uncontrollably. As a result, we have a growing mass of such defective cells — a tumor — which, if untreated, is usually fatal for the patient.

Many other illnesses — e.g., many bacterial infections — are caused by an exponential growth of corresponding cells. However, in such diseases, the dividing cells are alien to the body and thus, the immune system is actively fighting against the proliferation of these cells. In contrast, cancer cells are minor modifications of the cells that form the patient's body; the difference between the cancer cells and the healthy cells is so small that it does not trigger the immune system response — and, as a result, if untreated, cancer tumors grow exponentially.

The fact that cancer cells are similar to healthy ones not only makes it difficult for the body to fight cancer, it also makes it difficult to come up with good treatments for cancer.

Typically, a cancer treatment targets cells that are dividing too much. While such a treatment is aimed at cancer cells, because of the similarity between the cancer and healthy cells, this treatment also harms nearby healthy cells as well. As a result, cancer treatment is usually effective only when the cancer cells are concentrated in one reasonably small location in the body. In such situations, an (inevitable) damage to healthy cells in this (relatively small) part of the body is not fatal for the patient.

The situation is much worse in metastasis, when cancer cells have spread to many locations within the body. In such situations, the prognosis is often bad: we cannot apply the usual cancer treatment to all these locations, since the resulting damage to healthy cells in all these locations may also be fatal.

A recent discovery. A recent empirical study (see, e.g., [1,5]) showed that when the cancer cells invade new organs, they stop dividing.

This discovery is important for cancer treatment. This empirical discovery is very important, since cancer cells are usually detected by their fast division. The above result means that when a cancer cell is in the process of invading a new organ, it is not affected by the current cancer treatments. In other words, while the current cancer treatments help fight the cancer cells in their original organ, they do not prevent these cells from metastasis — and metastasis is what usually kills the patient.

Thus, to prevent metastasis, new methods are needed for detecting and destroying invading cancer cells.

The empirical fact is important, but how do we explain it? At this moment, there is no convincing explanation for the above empirical phenomenon.

In this paper, we show that geometric analysis can provide such an explanation.

2. Geometric Analysis of the Problem

Original (pre-cancer) state of an organ. The tissue within an organ is reasonably homogeneous: if we shift from one location to another or rotate, we will not see much of the difference. Similarly, if we re-scale the tissue, it will still look approximately the same.

In other words, the original organ is (locally) invariant with respect to shifts, rotations, and scalings ($\vec{x} \rightarrow \lambda \cdot \vec{x}$).

From the geometric viewpoint, cancer is a symmetry violation. Cancer does not immediately appear at all the locations of the organ, it only appears at some of the locations. As a result, if we shift from a cancer location to a non-cancer location, the tissue changes.

In other words, with the appearance of cancer, the organ is no longer invariant with respect to all the shifts, i.e., we have what physicists call *symmetry violation*.

What physics can teach us about symmetry violations. According to physics, while it is possible to go directly from a highly symmetric state to a state with no symmetries, such transitions are highly improbable. In general, the more symmetries are preserved, the more probable the transition. Thus, in most cases, we first go to the state with the largest number of remaining symmetries. Similarly, from a solid state, we usually first go to a fluid state, and only then to gas — although in some cases, a solid can directly turn into gas; see, e.g., [2].

What are the resulting geometric shapes? We start with the group G_0 generated by all shifts, rotations, and scalings. After a symmetry violation, the state is

invariant with respect to only some of these transformations, i.e., with respect to some proper subgroup G of the original symmetry group G_0 .

If we have cancer cells at some location x , then, due to symmetry of the resulting configuration, we should have cancer cells also at every point $g(x)$ corresponding to transformations $g \in G$. Thus, the set of all cancer locations contains, with each point x , the whole orbit $G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g(x) : g \in G\}$.

So, to describe all possible shapes, we must describe the orbits of all the proper subgroups G of the largest possible dimension.

Such orbits have already been classified, let us use it. The full description of all the orbits of subgroups of the group G_0 is already known; see, e.g., [3,4]. Let us use this known classification to describe the orbits of the most symmetric (and thus, the most probable) groups. This will allow us to describe the most probable shapes of cancer-affected regions.

Resulting shapes of cancer configurations. The largest possible subgroups are 4-dimensional (= 4-parametric) ones. There are three types of orbits corresponding to such groups:

- a *single point*, which is invariant with respect to 3 rotations and scaling,
- a *plane*, which is invariant with respect to 2 shifts (in this plane), rotation (in this plane), and scaling, and
- a *half-space*, which is invariant with respect to 2 shifts in the boundary plane, rotation in the boundary plane, and scaling.

So, the starting point of cancer configuration must have one of these shapes.

The half-space means that cancer has immediately affected half of the organ. This may be possible for some cancers, but most cancers start small.

Similarly, a plane means that the cancer has immediately spread to the whole surface — e.g., to a large skin area in case of melanoma. Again, this may be possible, but this is not a typical start of a cancer.

For describing typical cancers, the only remaining shape is a point, which means that the cancer starts with one location.

As cancer progresses, symmetry decreases further, from a 4-dimensional symmetry group to smaller subgroups. As we have mentioned, the most probable transitions are to the largest possible proper subgroups, i.e., in this case, to 3-dimensional subgroups. There are two geometric shapes corresponding to 3-dimensional symmetry groups G :

- a *sphere*, which is invariant with respect to 3 rotations, and
- a *straight line*, which is invariant with respect to shifts along the line, rotations around this line, and scaling.

So, we conclude that once the cancer emerged at some location, it will spread either to a spherical (ball) shape, or to a linear shape.

Seemingly natural interpretation. In cancer terms, a spherical shape seems to correspond to tumor growth in all directions, while a linear shape seems to correspond to invasion.

Let us check that this is indeed the case.

How are different shapes related to the dynamical picture: a symmetry-based analysis. Our interest is to describe when cancer cells invade neighboring tissues, i.e., when we see a movement in a certain direction.

In the case of a sphere, once we add a direction, then for the resulting configuration of a shape and a direction, only one symmetry remains: rotations around the direction. Thus, in case of a spherical shape — corresponding to tumor growth — invasion requires symmetry violations and is, thus, highly improbable.

On the other hand, for a linear shape, if the direction of the invasion coincides with the direction of the shape, all symmetries remain in place. So, in this case, there is no symmetry-based reason why there will be no invasion.

Conclusion. Our geometric analysis shows that in the tumor growth stage — when the shape of the tumor corresponds to a ball — invasion is highly improbable, while invasion is quite possible for the linear shape.

In other words, our geometric analysis shows that in most cases, when cancer cells invade the neighboring organs, in the process of invasion they stop the usual dividing-and-spreading-around behavior — which is exactly what the new research has observed. So, we have indeed come up with a geometric explanation for the observed behavior.

Acknowledgments

This work was supported by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award “UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative” from Prudential Foundation.

The authors are thankful to all the participants of the IEEE Series of Symposia on Computational Intelligence SSCI'2016 (Athens, Greece, December 6–9, 2016) for valuable discussions.

REFERENCES

1. Callier V. Cancer cells can't proliferate and invade at the same time: the new findings could inform cancer treatments, which typically target only cells that are dividing // *Scientific American*. January 2016.
2. Feynman R., Leighton R., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2005.
3. Finkelstein A., Kosheleva O., Kreinovich V. Astrogeometry: geometry explains shapes of celestial bodies // *Geoinformatics*. 1997. V. VI, N. 4. P. 125–139.
4. Finkelstein A., Kosheleva O., Kreinovich V. Astrogeometry: towards mathematical foundations // *International Journal of Theoretical Physics*. 1997. V. 36, N. 4. P. 1009–1020.

5. Matus D.Q., Lohmer L.L., Kelley L.C., Schindler A.J., Kohrman A.Q., Barkoulas M., Zhang W., Chi Q., Sherwood D.R. Invasive cell fate requires G1 cell-cycle arrest and Histone Deacetylase-mediated changes in gene expression // *Developmental Cell*. 2015. V. 35, N. 2. P. 162–174.

**РАКОВЫЕ КЛЕТКИ НЕ ДЕЛЯТСЯ ПРИ ВТОРЖЕНИИ: ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ
(НА ОСНОВЕ СИММЕТРИИ) ОБЪЯСНЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО
НАБЛЮДЕНИЯ**

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. В целом злокачественные опухоли, как известно, растут быстро; раковые клетки, которые формируют эти опухоли, делятся и распространяются вокруг. Опухоли также испытывают процесс метастазирования, когда раковые клетки проникают в соседние органы. Недавний эксперимент показал, что, вопреки предыдущим предположениям, когда раковые клетки вторгаются, они прекращают деление. В этой статье мы приводим геометрическое объяснение этого эмпирического явления.

Ключевые слова: рак, метастазы, симметрия.

Дата поступления в редакцию: 10.12.2016

YES- AND NO-GESTURES EXPLAINED BY SYMMETRY

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. In most cultures, “yes” is indicated by a vertical head movement (nod), while “no” is indicated by a left-right movement (shake). In this paper, we show that basic symmetries can explain this cultural phenomenon.

Keywords: yes-gestures, no-gestures, nodding vs. shaking, symmetry.

1. Formulation of the Problem

In most cultures, “yes” is indicated by a vertical head movement (nod), while “no” is indicated by a left-right movement (shake); see, e.g., [1]. There are a few exceptions to this rule: e.g., in Bulgaria, the gestures are swapped, but in most cultures, “yes” and “no” are described by similar gestures. Why?

2. Our Explanation: General Idea

One of the main purposes of communications is to coordinate efforts between different people. From this viewpoint, “yes” means agreement; it means, in general, that we can safely continue what we have agreed on or what has been proposed. In contrast, “no” means disagreement, it means a change in plans.

In view of this, it is more crucial not to miss the “no” gesture; indeed:

- if we miss the “yes” gesture, we will either continue our previous action (as intended), or continue waiting for an agreement, which is probably also OK in situations where we have already been waiting for such agreement for some time;
- however, if we miss the “no” gesture, we will erroneously continue the action that needs to be stopped — and consequences may be serious: e.g., a primitive person during the ancient hunt may fall into a pit or not notice a wild animal attacking him.

So, we expect that between two possible gestures, the most easily detectable one will correspond to “no”, while the less easily detectable one will correspond to “yes”.

To describe this idea in precise terms, we need to describe how to tell which of the two gestures is more easily detectable.

3. Enter Symmetries

How do we make predictions and observations in general? A general idea is what is called *physical induction*: to find out what will happen in a given situation, we recall what happened in similar situations in the past, and we predict that a similar thing will happen now; see, e.g., [2].

Informally, similarity between two situations means that we can match objects from different situations, so that most important properties remain the same. For example, if in the past, a tiger attacked a person, and now this person sees a similar predator – e.g., a lion – the person will match the tiger to the lion and expects the same behavior.

In mathematical terms, this description means that we have a transformation that preserves important properties, i.e., we have what mathematicians call a *symmetry* [2].

From this viewpoint, a gesture is more easily detectable in comparison with no-gesture if they have different symmetries – and a gesture is less easily detectable if it has the same symmetries as the no-gesture situation.

Let us compare the vertical and the left-right motions from this viewpoint.

4. Symmetries Explain “Yes”- and “No”-Gestures

When two people talk, they usually face each other; this provides the best ability to communicate, we can clearly see all the gestures. A human being seen face-to-face has a natural left-right symmetry.

In a vertical gesture, this symmetry is retained at every moment of time, while for the left-right gesture, this symmetry is clearly violated. Thus, the left-right gesture is easier to detect.

In view of the above, this explains why the left-right gesture corresponds to “no”, while the vertical gesture corresponds to “yes”.

5. A Similar Argument Explains Verbal “Yes”- and “No”-Expressions

A similar idea can explain why in many languages (including English) “yes” is described by an “aha”-type expression, with stress on the second syllable of the two-syllable expression, while “no” is described by a similar two-part expression in which the stress is on the first syllable.

Indeed, we have mentioned that “no” should be more easily detectable. A syllable under stress is easier to detect, so, after hearing the first syllable, it is easier to detect the expression in which this first syllable is under stress.

This explains why the expression starting with an emphasized sound corresponds to “no”.

Acknowledgments

This work was supported by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award “UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative” from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Darwin C. The Expression of the Emotions in Man and Animal. D. Appleton and Company, New York, 1913.
2. Feynman R., Leighton R., Sands M. // The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2005.

ОБЪЯСНЕНИЕ «ДА»- И «НЕТ»-ЖЕСТОВ С ПОМОЩЬЮ СИММЕТРИИ

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. В большинстве культур «да» выражается вертикальным движением головы (кивок), в то время как «нет» выражается движением влево-вправо (мотание головой). В этой статье мы показываем, что основные виды симметрии могут объяснить это культурное явление.

Ключевые слова: да-жест, нет-жест, кивание против мотания головой, симметрия.

Дата поступления в редакцию: 21.12.2016

WHY PAIRWISE TESTING WORKS SO WELL: A POSSIBLE THEORETICAL EXPLANATION OF AN EMPIRICAL PHENOMENON

Francisco Zapata

Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: fazg74@gmail.com

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Some software defects can be detected only if we consider all possible combinations of three, four, or more inputs. However, empirical data shows that the overwhelming majority of software defects are detected during pairwise testing, when we only test the software on combinations of pairs of different inputs. In this paper, we provide a possible theoretical explanation for the corresponding empirical data.

Keywords: software testing, pairwise testing, empirical data, theoretical explanation.

1. Pairwise Testing: Empirical Data

Need for software testing. At present, many processes depend on computer programs. In software dealing with health issues and with complex technology like flying a plane or operating a nuclear power station, a program mistake can be fatal and/or catastrophic. It is therefore important to make sure that the software functions correctly.

In the ideal world, we should be able to *prove* program correctness, so that we will be 100% sure that the program produces the correct results. However, at present, such formal verification is only possible for rather simple programs. For most programs, the only way to make sure that the program works correctly is to test it with different inputs and different parameters.

Testing is not a perfect way to verify software. Most programs have many possible inputs and many possible settings. For each of the inputs, we have a large number of possible values. It is therefore not feasible to test all possible combinations of inputs. So, we have to select which combinations we can feasibly test.

Empirical data helps to decrease number of tests. Since there is usually a large number of possible inputs, we cannot test all possible combinations of these inputs, so we have to limit the number of inputs whose combinations we test.

The simplest approach is to consider each input one by one, and for each input, to try different values of the corresponding quantity. This approach helps find some program defects, but it misses many defects that can be hidden behind if-statements with two or more conditions.

Let us present a simple example related to real-number computations following the IEEE 754 standard. A program may contain a division x/y of two real numbers x and y . If we fix a value $y \neq 0$ and consider all possible values x , the division will be performed perfectly well. Similarly, if we fix a value $x \neq 0$ and consider all possible values y , the division will be performed perfectly well. Even for $y = 0$, we will get a legitimate infinite value. However, if both x and y are equal to 0, then – unless we explicitly instructed a computer what to do in this case – we will have a problem, since $0/0$ is undefined.

A natural next step is to consider *pairwise testing* when we consider all possible pairs of inputs, and for each pair, test different combinations of the corresponding values. The following step is to consider all possible triples of inputs, etc.

At first glance, since, as we have mentioned, most program have a large number of inputs, we should need to consider all possible combinations of such inputs to find all the program's errors. Interestingly, however, in practice, most program errors can be detected already on the pairwise testing stage. Specifically, the empirical data (see, e.g., [1]) shows that 84% of the defects are detected in pairwise testing. Out of the remaining 16% of the defects:

- 11% are detected when we perform triple-wise testing, and
- 4% require trying combinations of 4 inputs.

Only the remaining (1%) of the defects require combinations of 5 or more inputs. In other words, the vast majority of defects can be found by using pairwise testing.

Open problem. To the best of our knowledge, there is no convincing theoretical explanation for the above statistics.

In this paper, we provide a possible theoretical explanation for the empirical data – and thus, for the empirical efficiency of pairwise testing. The existence of such a theoretical explanation increases our confidence that pairwise testing is indeed a reasonable testing strategy.

2. Towards an Explanation

How testing is done: a general description. In principle, even for a single real-valued variable, there is an astronomical number of possible values. It is therefore not practically possible to test the program on all these values. Usually, there is a certain time allocated for testing, and we only perform as many tests as we can fit within this time.

Testing often starts with considering the values of one of the variables. This way, we can catch some defects. However, it is well understood that if we only change the value of *one* of the variables, then many defects will remain undetected.

So, the next step is usually to perform pairwise testing, i.e., for different *pairs* of variables, to test the program on different combinations of their values.

It is also known that even pairwise testing leaves some defects undetected. So, if we want a reliable software, we test it also on combinations of triples of variables, etc. For each size of variables-to-change, be it 1 variable, 2 variables, 3 variables, or even more, potentially we can have many possible combinations, but for each size, we are limited by time. In the first approximation, it is reasonable to assume that each stage of this testing process takes approximately the same time T :

- first, we spend time T testing the software on changed values of one of the variables,
- then, we spend time T on pairwise testing,
- then, we (may) spend time T on triple-wise testing, etc.

From the general description of testing to numerical estimates. Let us see how the above general description of the testing process translates into probabilities of detecting a defect.

During each stage, we spend approximately the same time T on testing. Thus, on each stage, we perform approximately the same number of tests, and so, we have approximately the same probability of detecting any given defect on this stage. Let us denote this probability by p .

After the first stage, we detect a defect with this probability p . With the remaining probability $1 - p$, the defect will be undetected.

If we started with the second stage, then we would get the same probability $1 - p$ of not detecting the defect on this stage. To estimate the probability that the defect will not be detected after two consequent stages, we can take into account that the tests performed on different stages are (or at least should be) independent. Thus, the probability that we did not detect a defect after the first two stages is equal to the product of the two probabilities:

- the probability $1 - p$ that this defect was not detected on the first stage, and
- the probability $1 - p$ that this defect was not detected on the second stage.

This probability is therefore equal to $(1 - p)^2$.

Similarly, the probability that the defect is not detected after three stages is equal to $(1 - p)^3$, the probability that this defect will not be detected after four stages is $(1 - p)^4$, and, in general, the probability that the defect will not be detected in k stages is equal to $(1 - p)^k$.

Let us compare these numerical predictions with the observed values. According to the above estimations, the probability that we *did not* detect a defect after the first two stages is equal to $(1 - p)^2$. Thus, the probability that the defect *was* detected after the first two stages is equal to $1 - (1 - p)^2$. This probability applies to all the defects, so the proportion of defects that are detected after the

first two stages is equal to the same number $1 - (1 - p)^2$. We know that empirically, this proportion is approximately equal to 84%, so $1 - (1 - p)^2 \approx 0.84$, hence $(1 - p)^2 \approx 1 - 0.84 = 0.16$, and $1 - p \approx \sqrt{0.16} = 0.4$.

The probability that the defects were not detected after *three* stages is equal to $(1 - p)^3$. Thus, the proportion of the defects that were not detected after three stages is also equal to $(1 - p)^3$. So, the proportion of the defects that were not detected after the two stages but that were detected after the third stage is equal to the difference $(1 - p)^2 - (1 - p)^3$ between:

- the proportion $(1 - p)^2$ of the defects that were not detected after the first two stages, and
- the proportion $(1 - p)^3$ of the defects that were not detected after the first three stages.

For $1 - p \approx 0.4$, this proportion is equal to $0.4^2 - 0.4^3 \approx 16\% - 6\% = 10\%$, which is very close to the observed amount of 11%.

Similarly, the probability that the defects were not detected after *four* stages is equal to $(1 - p)^4$. Thus, the proportion of the defects that were not detected after four stages is also equal to $(1 - p)^4$. So, the proportion of the defects that were not detected after the two stages but that were detected after the third stage is equal to the difference $(1 - p)^3 - (1 - p)^4$ between:

- the proportion $(1 - p)^3$ of the defects that were not detected after the first three stages, and
- the proportion $(1 - p)^4$ of the defects that were not detected after the first four stages.

For $1 - p \approx 0.4$, this proportion is equal to $0.4^3 - 0.4^4 \approx 6.4\% - 2.6\% = 3.8\%$, which is very close to the observed amount of 4%.

So, our model indeed provides a very accurate description of the empirical data.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award “UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative” from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Black R. Pragmatic Software Testing: Becoming an Effective and Efficient Test Professional. John Wiley & Sons, 2007.

**ПОЧЕМУ ПАРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ТАК ХОРОШО РАБОТАЕТ:
ВОЗМОЖНОЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО
ЯВЛЕНИЯ**

Ф. Запата

к.ф.-м.н., e-mail: fazg74@gmail.com

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Некоторые ошибки программного обеспечения могут быть обнаружены, только если мы рассмотрим все возможные комбинации из трёх, четырёх или более входов. Однако, эмпирические данные показывают, что подавляющее большинство ошибок программного обеспечения обнаруживаются во время парного тестирования, когда мы проверяем программное обеспечение только на парах различных входов. В этой статье мы приводим возможное теоретическое объяснение соответствующих эмпирических данных.

Ключевые слова: тестирование программного обеспечения, парное тестирование, эмпирические данные, теоретическое объяснение.

Дата поступления в редакцию: 22.09.16

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме.

Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета L^AT_EX и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор MiK_TE_X, так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры И моделирование

№1(41)

Главный редактор

А.К. Гуц

Выпускающий редактор

Д.Н. Лавров

Технический редактор

Н.Ф. Богаченко

Корректор:

И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:

Е.А. Илюшечкин

А.Н. Кабанов

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск, пр. Мира, 55А

Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>



Подписано в печать 09.02.2017. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 15,9. Тираж 100 экз. Заказ № 9.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, г. Омск, пр. Мира, 55А

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



17041 >