Математические структуры и моделирование
2017. № 2(42). С. 5–10

УДК 510.643

О РЕДУКЦИИ МОДАЛЬНОСТЕЙ В ДЕОНТИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЯХ

И.П. Бесценный
доцент, к.ф.-м.н., e-mail: ibests@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Рассматриваются формальные теории деонтической логики, основанные на исчислении высказываний генценовского типа. Анализируются синтаксические и семантические различия между алетическими и деонтическими исчислениями в аспекте редукции последовательностей идущих подряд модальных знаков.

Ключевые слова: модальная логика, деонтические исчисления, семантика Крипке.

В данной работе рассматриваются формальные теории, основанные на исчислении высказываний генценовского типа ИС [1, с. 11–17]. Будем использовать с сохранением нумерации из [1, с. 12–13] те же основные правила вывода, а также следующие допустимые правила:

Т. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Phi;\ \Gamma_2, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Psi}$;

9а. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\Phi}$;

9б. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash}$.

Формулы модальных исчислений определяются, как в ИС, с добавлением фразы

- Если Φ — формула, то $\Box\Phi$, $\Diamond\Phi$ — тоже формулы.

При этом полагаем по определению $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$.
Добавляя в ИС схему аксиом

А2. $\Box(\Phi \to \Psi) \vdash \Box\Phi \to \Box\Psi$

и правило Гёделя

Г. $\dfrac{\vdash \Phi}{\vdash \Box\Phi}$,

получаем минимальное модальное исчисление I, которое служит основой как для алетических, так и для деонтических модальных исчислений.

Нетрудно убедиться, что в I допустимы правила вывода

B. $\dfrac{\vdash\ \Phi \to \Psi}{\vdash\ \Box\Phi \to \Box\Psi}$;

BB. $\dfrac{\Phi\ \vdash\ \Psi}{\Box\Phi\ \vdash\ \Box\Psi}$;

BBa. $\dfrac{\Phi\ \vdash\ \Psi}{\Diamond\Phi\ \vdash\ \Diamond\Psi}$.

В алетических модальных исчислениях формулы $\Box A$, $\Diamond A$ (где A — пропозициональная переменная) выражают степень соответствия объективным закономерностям и имеют содержательный смысл «необходимо истинно A» и «возможно истинно A» соответственно.

В деонтических модальных исчислениях они выражают степень соответствия моральным и этическим нормам и правилам, поэтому их содержательный смысл будет «A обязательно» и «A разрешено» соответственно.

Субъективный характер норм и правил, которые устанавливаются в обществе, можно синтаксически подчеркнуть различием в аксиомах для алетических и деонтических исчислений. Алетическое исчисление T получается из I добавлением схемы аксиом

A1. $\Box\Phi\ \vdash\ \Phi$.

Деонтическое исчисление D получается из I добавлением схемы аксиом

D1. $\Box\Phi\ \vdash\ \Diamond\Phi$.

Синтаксически аксиомы D1 являются следствием аксиом A1 и их обращения по правилам 9а и 9б:

$$\frac{\Box\neg\Phi\ \vdash\ \neg\Phi}{\Phi\ \vdash\ \Diamond\Phi}(9ab).$$

Поэтому исчисление D содержится в T, но не совпадает с ним. При добавлении других аксиом различие будет сказываться на правилах редукции идущих подряд модальных знаков.

Невыполнение A1 в деонтических исчислениях можно интерпретировать как «не всегда общепринятые нормы являются логически обоснованными» или «обязательность действия не гарантирует его совершения в действительности».

Аксиомы D1 обеспечивают внутреннюю непротиворечивость самих норм: «если что-то обязательно, то оно не может быть запрещено».

Вопросы адекватности интерпретаций теорем деонтических исчислений в качестве логического обоснования реальных нормативных систем являются предметом дискуссии как среди логиков, так и среди представителей философии, социологии и правоведения. Большой обзор различных подходов содержится в [2]. Целью данной работы является только лишь выявление синтаксических различий.

Предложение 1. *В исчислении D являются допустимыми правила вывода*

Га. $\dfrac{\Phi \vdash}{\Box\Phi \vdash}$;

Гб. $\dfrac{\vdash \Phi}{\vdash \Diamond\Phi}$.

Доказательство. Если доказуема секвенция $\Phi \vdash$, то её можно получить только по правилу 10. Значит, для некоторой формулы Ψ доказуемы $\Phi \vdash \Psi$, $\Phi \vdash \neg\Psi$ и поэтому

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \Psi}{\Box\Phi \vdash \Box\Psi;}(BB) \quad \dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \neg\Psi}{\Box\Phi \vdash \Box\neg\Psi;}(BB) \quad \dfrac{\Box\Psi \vdash \Diamond\Psi}{\Box\neg\Psi \vdash \neg\Box\Psi}(9ab)}{\Box\Phi \vdash \neg\Box\Psi}(T)}{\Box\Phi \vdash}(10).$$

Таким образом, Га допустимо. Для обоснования Гб достаточно принципа двойственности:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Phi}{\neg\Phi \vdash}(9b)}{\Box\neg\Phi \vdash}(\Gamma a)}{\vdash \Diamond\Phi}(9a).$$

■

Правила вывода Га и Гб похожи на правило Гёделя по внешнему виду. Их деонтическая интерпретация может быть сформулирована следующим образом: «недопустимо делать обязательным логическое противоречие» и «нельзя запретить тождественную истинность».

Известна связь между аксиомами модальных исчислений и свойствами отношения достижимости R в семантике Крипке $K = \langle W, R, v, G\rangle$. Чтобы аксиома A1 была тождественно истинной, необходимо и достаточно рассматривать только такие семантики, в которых отношение R является рефлексивным (wRw для всех $w \in W$). Для тождественной истинности аксиомы D1 требуется не рефлексивность отношения R, а следующее свойство «неограниченной достижимости» (serial):

$$\forall w \exists w' : wRw'.$$

Более подробно связь между аксиомами и свойствами отношения R показана в [4].

В [2] обсуждаются также разные подходы к интерпретации рядом стоящих модальных знаков. Следуя [3], назовём модальностью любую последовательность подряд идущих знаков $\neg$, $\Box$, $\Diamond$. В исчислениях T и D имеется бесконечно много не эквивалентных друг другу модальностей.

В алетических исчислениях рассматривается схема аксиом

A3. $\Box\Phi \vdash \Box\Box\Phi$.

Отметим, что A3 тождественно истинна тогда и только тогда, когда отношение достижимости R в семантике Крипке транзитивно. В исчислении S4, полученном из T добавлением аксиом A3, существует всего 14 не эквивалентных друг другу модальностей ([3], метатеорема 14).

Исчисление DS4, полученное из D добавлением аксиом A3, таким свойством не обладает.

Теорема 1. *Секвенция вида* $\underbrace{\Box\ldots\Box}_{k}A \vdash \underbrace{\Box\ldots\Box}_{k-1}A$ *не доказуема в DS4 ни для какого натурального числа* $k > 0$.

Доказательство. Пусть $W = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество неотрицательных целых чисел, R — отношение «меньше» ($<$), $G = 0$. Очевидно, что R нерефлексивно, транзитивно и обладает свойством «неограниченной достижимости». Зафиксируем произвольное натуральное число k и положим $v(w, A) = 1 \Leftrightarrow w \geqslant k$. (В дальнейшем изложении будем вместо $v(w, \Phi) = 1$ писать кратко $w \models \Phi$, а вместо $v(w, \Phi) = 0$ использовать запись $w \not\models \Phi$.) В полученной таким образом семантике Крипке для исчисления DS4 выполнено

$$\begin{aligned}
&k-1 \models \Box A,\\
&k-2 \models \Box\Box A,\\
&\vdots\\
&0 \models \underbrace{\Box\ldots\Box}_{k}A.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
&k-1 \not\models A,\\
&k-2 \not\models \Box A,\\
&\vdots\\
&0 \not\models \underbrace{\Box\ldots\Box}_{k-1}A.
\end{aligned}$$

Значит, секвенция вида $\underbrace{\Box\ldots\Box}_{k}A \vdash \underbrace{\Box\ldots\Box}_{k-1}A$ не доказуема, ввиду непротиворечивости исчисления DS4. ■

Доказанная теорема опровергает утверждение о редукции модальностей в исчислении DS4, приведённое в [3] (метатеорема 41).

Теперь рассмотрим схему аксиом

A4. $\neg\Box\Phi \vdash \Box\neg\Box\Phi$.

Подстановка $\neg\Phi$ в A4 вместо Φ приводит к другой форме этой схемы аксиом:

A4′. $\Diamond\Phi \vdash \Box\Diamond\Phi$.

Обращение A4 (по правилам 9ab) даёт

A4″. $\Diamond\Box\Phi \vdash \Box\Phi$.

Отметим [4], что A4 тождественно истинна тогда и только тогда, когда отношение достижимости R в семантике Крипке евклидово. То есть

$$\forall w \forall v \forall u((wRv \wedge wRu) \to vRu).$$

В исчислении S5, полученном из T добавлением аксиом A4, доказуема схема аксиом A3. Поэтому S4 содержится в S5. Это соответствует факту, что рефлексивное евклидово отношение является симметричным и транзитивным. Также известно, что в S5 выполнено следующее правило редукции модальностей: любая цепочка идущих подряд модальных знаков эквивалентна последнему из них.

Обозначим через DS* исчисление, полученное из D добавлением аксиом A4. Их деонтический смысл может быть выражен как «если действие разрешено, то обязательно его разрешать» (для A4′) или «если разрешено приказывать, то следует приказывать» (для A4″). В отличие от алетических исчислений имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *В DS* не доказуемы аксиомы A3.*

Доказательство. Рассмотрим семантику Крипке $K = \langle W, R, v, G\rangle$, где $W = \{G, F, H\}$, GRF, FRF, FRH, HRH, HRF. Свойство «неограниченной достижимости» и евклидовость R проверяются непосредственно. Пусть $F \models A$, $H \not\models A$. Тогда $G \models \Box A$, $F \not\models \Box A$, поэтому $G \not\models \Box\Box A$. Таким образом, посылка A3 истинна, а заключение ложно. A3 не доказуема, ввиду непротиворечивости. ■

Тем не менее, в исчислении DS* имеют место некоторые интересные в аспекте редукции модальностей свойства.

Предложение 2. *В исчислении DS* для произвольной формулы* Φ *доказуемы секвенции:*

M1. $\Diamond\Box\Phi \vdash \Box\Diamond\Phi$;

M2. $\Box\Box\Phi \vdash \Box\Phi$;

M3. $\vdash \Box(\Box\Phi \to \Phi)$.

Доказательство. M1. Применим последовательно правило вывода T (транзитивность импликации) к A4″, D1 и A4′.

M2. Подставляя $\Box\Phi$ в схему D1, получим $\Box\Box\Phi \vdash \Diamond\Box\Phi$. Применение правила вывода T к этой секвенции и A4″ даёт требуемое.

M3. Известно, что в любом модальном исчислении с допустимым правилом вывода BB доказуема секвенция $\Box\Phi \vee \Box\Psi \vdash \Box(\Phi \vee \Psi)$. Подставим в неё $\neg\Box\Phi$ и Φ, получим $\Box\neg\Box\Phi \vee \Box\Phi \vdash \Box(\neg\Box\Phi \vee \Phi)$. Из эквивалентности $\Phi \to \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$ следует $\Diamond\Box\Phi \to \Box\Phi \vdash \Box(\Box\Phi \to \Phi)$. Посылка этой секвенции совпадает с A4″, значит, заключение является доказуемой формулой. ■

Заметим, что M1 и M2 соответствуют таким свойствам отношения R, как слабая направленность и слабая плотность [4]. Для M3 соответствие неизвестно.

Схема M2 не доказуема в DS4 (см. теорему 1), а A3 не доказуема в DS*. Следовательно, для редукции модальностей требуется объединение схем A3 и A4. В исчислении DS5, получаемом из D добавлением и A3, и A4, выполняется правило редукции такое же, как в алетическом исчислени S5. Но деонтическая интерпретация в этом исчислении вызывает сомнения в адекватности.

Более перспективным является изучение исчислений, получаемых из DS4 добавлением M3 или M2. Очевидно, что M2 является логическим следствием M3 и A2.

M3 имеет вполне приемлемый деонтический смысл «обязательно считать, что если действие обязательно, то оно выполняется». Обращение M3 (также доказуемое в DS*): $\vdash \Box(\Phi \to \Diamond\Phi)$ тоже имеет деонтический смысл «обязательно считать, что если действие логически истинно, то оно разрешено». Так как схема A1 не доказуема в модальных исчислениях, то те части предложений в кавычках, которые идут после слов «обязательно считать, что» не всегда истинны. Таким образом, налицо кажущийся парадокс: утверждение может быть не истинным, но в обществе обязательно считать, что оно верно. Другие парадоксы деонтических логик приведены в [2].

Литература

1. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. М. : ИНФРА–М; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. 224 с.
2. Ивин А.А. Логика норм. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1973. 124 с.
3. Костюк В.Н. Элементы модальной логики. Киев : Наукова думка, 1978. 180 с.
4. Goldblatt R. Logics of time and computation. CSLI Lecture Notes No. 7, 1992.

ON THE REDUCTION OF MODALITIES IN DEONTIC CALCULI

I.P. Bestsennyi
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: ibests@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. Formal theories of deontic logic based on the Gensen-type propositional calculus are considered. Syntactic and semantic differences between the aletic and deontological calculi are analyzed in the aspect of reduction of sequences of successive modal signs.

Keywords: modal logic, deontic calculi, Kripke semantic.

Дата поступления в редакцию: 27.03.2017