Математические структуры и моделирование 2018. № 4(48). С. 5–13

УДК 519.214
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.4.5-13

СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН К MAX-УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия для сходимости распределений симметрических калибровочных функций от зависимых случайных величин к max-устойчивым законам. Эти условия включают в себя и так называемые минимальные условия слабой зависимости.

Ключевые слова: калибровочные функции от случайных величин, max-устойчивые распределения, минимальные условия слабой зависимости.

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых величин, $X_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_n,\ F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n < x\},\quad F_1(x) < 1,\ x > 0$, а $F_n \Rightarrow F$ означает, что $\{F_n\}$ слабо сходится к F. Следуя [1], назовём $\{a_n,\ n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $a_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ — целая часть x.

Для того чтобы при некотором выборе нормирующих констант a_n имело место соотношение $F_n(xa_n) \Rightarrow F_\xi(x),\quad n \to \infty$, где ξ — невырожденная случайная величина, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant x\}$ являлась правильно меняющейся функцией порядка $-\rho,\ \rho > 0$. При этом предельное распределение (их называют max-устойчивыми) имеет вид $F_\xi(x) = G_\rho(x) = \exp\{-cx^{-\rho}\},\ x > 0,\ c > 0,$ а нормирующие постоянные a_n можно найти из соотношения

$$a_n = \sup\{x : n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\} \geqslant 1\}. \tag{1}$$

Такая последовательность $\{a_n\}$ существует и является правильно меняющейся порядка $1/\rho$ [1, с. 29] и

$$n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant xa_n\} \to x^{-\rho},\ n \to \infty \tag{2}$$

[2, с. 319].

Символ $n + m \to \infty$ в каком-либо соотношении будет означать, что указанное соотношение выполняется при $n \to \infty$ и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$. В [3] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n\},\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность, у которой $\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant x\}$ является правильно меняющейся функцией* *порядка* $-\rho$, $\rho > 0$ *и пусть* $X_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_n$, *а последовательность* $\{a_n\}$ *определяется из соотношения* $n\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant a_n\} \to 1, n \to \infty$. *Для того чтобы* $F_n(xa_n) \to G_\rho(x)$, $n \to \infty$, $x > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения:*

а)

$$F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m}) \to 0, \quad n+m \to \infty; \tag{R$_1$}$$

б) при любом $x > 0$ *и при любой достаточно медленно растущей последовательности* $k = k(n) \to \infty$, $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} \sim n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\},\ n \to \infty. \tag{R$_2$}$$

Замечание 1. Теорему 1 можно интерпретировать так: условия (R_1) и (R_2) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняются предельные теоремы для максимумов с той же нормировкой, что и в предельных теоремах для независимых величин.

В настоящей работе результат теоремы 1 обобщается на случай, когда X_n является функцией специального вида (так называемой калибровочной функцией) от величин $\xi_1, ..., \xi_n$ и приводится «общеупотребительное» условие слабой зависимости, обеспечивающее выполнение аналога условия (R_2).

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определено отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

f1. $f(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \neq 0$;

f2. $f(\gamma\mathbf{x}) = |\gamma| f(\mathbf{x}),\ \gamma \in \mathbb{R}$;

f3. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$;

f4. $f(x_1, ..., x_n) = f(\varepsilon_1 x_{i_1}, ..., \varepsilon_n x_{i_n})$ где $\varepsilon_i = \pm 1$, а $(i_1, ..., i_n)$ – перестановка множества $(1, ..., n)$.

Функция f (на самом деле последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью) называется *симметрической калибровочной функцией* (см., например, [4, с.107]).

Будем также предполагать, что

f5. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

В [5] можно посмотреть примеры функций, удовлетворяющих свойствам f1-f5. В силу f3 с $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, 0 ..., 0)$, $\mathbf{y} = (0, ..., 0, x_{k+1}, ..., x_n)$ при любом $k < n$

$$-f(x_{k+1}, x_2, ..., x_n) \leqslant f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k) \leqslant f(x_{k+1}, x_2, ..., x_n),$$

так что для любого $1 \leqslant k \leqslant n$

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant f(x_{k+1}, , ..., x_n). \tag{3}$$

Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n < x\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_n\}$, $n = 1,2,...\}$ *— стационарная последовательность, у которой* $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ *является правильно меняющейся функцией порядка* $-\rho$, $\rho > 0$, $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, *а последовательность* $\{a_n\}$ *определяется соотношением (1). Для того чтобы* $F_n(xa_n) \to G_\rho(x) = \exp\{-cx^{-\rho}\}$, $c = f^\rho(1)$, $x > 0$ $n \to \infty$*: необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения*

а)

$$F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m}) \to 0, \quad n+m \to \infty; \qquad (\mathrm{R}_1(\mathrm{f}))$$

б) при любом $x > 0$ *и при любой достаточно медленно растущей последовательности* $k = k(n) \to \infty, \ n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n > xka_n\} \sim n\mathbf{P}\{X_1 > xka_n\}, \ n \to \infty. \qquad (\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$$

Если же для некоторой последовательности $\{\xi_n\}$ $F_n(xa_n) \to G_\rho(x)$, $x > 0$ *и выполняются условия* $(\mathrm{R}_1(\mathrm{f}))$ *и* $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$*, то* $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ *является правильно меняющейся функцией порядка* $-\rho$.

Замечание 2. Условие R_2 интерпретировалось в [3] как одно из минимальных условий слабой зависимости, при которых распределения величин $X_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_n$ сходятся к max-устойчивым законам. В настоящей работе условие $\mathrm{R}_2(\mathrm{f})$ является не только условием слабой зависимости, но и накладывает значительные ограничения на вид функции f, заключающиеся по сути в том, что распределения функций $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ слабо эквивалентны распределениям максимумов некоторых независимых случайных величин.

Лемма 1. . *Последовательность* $\{a_n^\rho\}$ *является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а* a_n *— правильно меняющейся последовательностью порядка* $1/\rho$, $\rho > 0$) *тогда и только тогда, когда*

$$a_{n+m}^\rho \sim a_n^\rho + a_m^\rho, \quad n+m \to \infty.$$

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 в [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.

Необходимость. Пусть $F_n(xa_n) \Rightarrow G_\rho(x)$, $n \to \infty$. Функция $G_\rho(x)$ непрерывна при $x > 0$, поэтому слабая сходимость равносильна поточечной:

$$F_n(xa_n) \to G_\rho(x), \ x > 0. \qquad (4)$$

Пусть $m = m(n)$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\Delta(n) = |F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m})| \,.$$

Поскольку a_n^ρ — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$a_{n+m}^\rho \sim a_n^\rho + a_m^\rho, \ n \to \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leqslant a \leqslant 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такие, что

$$a_{n_2+m_2}^{-\rho} a_{n_2}^{\rho} \to a, \quad a_{n_2+m_2}^{-\rho} a_{m_2}^{\rho} \to 1-a, \quad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < a < 1$. С помощью (4) получаем

$$\Delta(n_2) = \left| F_{n_2+m_2}(x a_{n_2+m_2}) - F_{n_2}\left(x a_{n_2} \frac{a_{n_2+m_2}}{a_{n_2}}\right) F_{m_2}\left(x a_{m_2} \frac{a_{n_2+m_2}}{a_{m_2}}\right) \right| \to$$

$$\to \left| G_\rho(x) - G_\rho\left(x a^{-\frac{1}{\rho}}\right) G_\rho\left(x(1-a)^{-\frac{1}{\rho}}\right) \right| =$$

$$= \left| \exp\left\{-c x^{-\rho}\right\} - \exp\left\{-a c x^{-\rho}\right\} \exp\left\{-(1-a) c x^{-\rho}\right\} \right| = 0. \tag{5}$$

Если же $a = 0$ $(a = 1)$, то при $n \to \infty$ $a_{n_2+m_2}^{-1} X_{n_2} \to 0$ $(a_{n_2+m_2}^{-1} X_{m_2} \to 0)$ по вероятности, следовательно, при $x > 0$ $F_{n_2}(x a_{n_2+m_2}) \to 1$ $(F_{m_2}(x a_{n_2+m_2}) \to 1)$, и с помощью (4) легко выводится, что

$$|F_{n_2+m_2}(x a_{n_2+m_2}) - F_{m_2}(x a_{n_2+m_2})| \to 0 \ (|F_{n_2+m_2}(x a_{n_2+m_2}) - F_{n_2}(x a_{n_2+m_2})| \to 0),$$

то есть $\Delta(n_2) \to 0,\ n \to \infty$. Вместе с (5) это означает, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Следовательно, что $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$, и мы показали, что выполнено условие $(\mathrm{R}_1(\mathrm{f}))$.

Докажем $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$. В силу условия f_2 $X_1 = c^{1/\rho}|\xi_1|$. Так как $\{a_n^\rho\}$ — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то $a_{kn}^\rho \sim k a_n^\rho$, и если $k = k(n) \to \infty$ растёт достаточно медленно, то в силу (2)

$$n\mathbf{P}\{X_1 > x a_{kn}\} = n\mathbf{P}\{c^{1/\rho}|\xi_1| > x a_{kn}\} \sim \frac{c}{k x^\rho},\ n \to \infty. \tag{6}$$

По предположению теоремы

$$\mathbf{P}\{X_n > x a_{kn}\} = 1 - F_n(x a_{kn}) \sim 1 - \exp\left\{-\frac{c}{k x^\rho}\right\} \sim \frac{c}{k x^\rho},$$

что вместе с (6) даёт нам условие $\mathrm{R}_2(\mathrm{f})$.

Достаточность.

Пусть выполнены условия $(\mathrm{R}_1(\mathrm{f}))$ и $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$, $k = k(n) \to \infty$, $n = km + r$, $0 \leqslant r < m$. С помощью условия $(\mathrm{R}_1(\mathrm{f}))$ при k, растущем достаточно медленно, получаем

$$F_n(x a_n) \sim F_m^k(x a_n) F_r(x a_n),\ n \to \infty. \tag{7}$$

Правильно меняющаяся функция положительного порядка a_n эквивалентна неубывающей функции [1, с.26], и мы в дальнейшем будем считать её таковой. Если $r = r(n) \to \infty$, то из условия $(\mathrm{R}_1(\mathrm{f}))$ и (6) следует

$$1 - F_r(x a_n) \leqslant \mathbf{P}\{X_r \geqslant a_{kr}\} \sim r\mathbf{P}\{X_1 \geqslant a_{kr}\} \sim \frac{c}{k} \to 0,\ n \to \infty. \tag{8}$$

Если же $r = r(n)$ — ограниченная последовательность, то $r\mathbf{P}\{X_1 \geqslant a_{kr}\} \to 0$ просто потому, что $a_{kr} \to \infty,\ n \to \infty$. Вместе с (7) и (8) это означает, что

$$F_n(xa_n) \sim F_m^k(xa_n) = (1 - \mathbf{P}\{X_m > xa_n\})^k \ \ n \to \infty. \tag{9}$$

Из правильного изменения последовательности $\{a_n\}$ легко выводится, что $a_n \sim a_{km}$, и в силу условия $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$

$$\mathbf{P}\{X_m > xa_n\} \sim \mathbf{P}\{X_m > xa_{km}\} \sim m\mathbf{P}\{X_1 > xa_{km}\} \sim \frac{c}{kx^\rho}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) выводим

$$F_n(xa_n) \sim \left(1 - \frac{c}{kx^\rho}(1 + o_n(1))\right)^k \to \exp\left\{-cx^{-\rho}\right\},\ n \to \infty.$$

Пусть теперь $F_n(xa_n) \to G_\rho(x) = \exp\{-cx^{-\rho}\},\ c = f^\rho(1),\ x > 0$ и $k = k(n) \to \infty,\ n \to \infty$. Тогда если $k(n)$ растет достаточно медленно, то

$$\mathbf{P}\{X_n > xka_n\} \sim \frac{c}{k^\rho x^\rho},$$

а в силу $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$

$$\mathbf{P}\{X_n > xka_n\} \sim n\mathbf{P}\{X_1 > xka_n\} = n\mathbf{P}\{c^{1/\rho}|\xi_1| > xka_n\} \sim \frac{c}{k^\rho x^\rho},\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$ [2, с.318]. Теорема доказана.

Приведём пример условия слабой зависимости, обеспечивающего выполнение условия $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$.

Пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ – σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Если для некоторой функции $\lambda(x) > 0$ такой, что $\lambda(x) \downarrow 0,\ x \to 0$

$$\sup\left\{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\lambda(\mathbf{P}(B))} : A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0}, B \in \mathcal{F}_{\geqslant 1} \text{ или } A \in \mathcal{F}_{\geqslant 1}, B \in \mathcal{F}_{\leqslant 0}\right\} < 1,$$

то говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию λ-перемешивания* (см.[6]).

Пусть $\{c_n\}$ — последовательность положительных чисел. Обозначим

$$X_{k,l} = f(\xi_k, ..., \xi_l), k < l,\ \ \overline{X}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k,\ \ \delta_n = \lambda\left(2\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{X_k \geqslant \varepsilon c_n\}\right).$$

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0,\ x > 0$ и $m \leqslant n$, а функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_5$. Если последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\delta_n < 1$, то*

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1} \geqslant (x + \varepsilon)c_n\} \leqslant (1 - \delta_n)^{-1}\mathbf{P}\{X_m \geqslant xc_n\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1} < (x+\varepsilon)c_n \leqslant X_k\},\ k = 1, ..., m,\ \varepsilon > 0$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{m-1} E_k = \{\overline{X}_{m-1} \geqslant (x+\varepsilon)c_n\}$, а в силу (3)

$$\{X_k \geqslant (x+\varepsilon)c_n,\ X_{k+1,m} < \varepsilon c_n\} \subseteq \{X_m \geqslant xc_n\},$$

то есть

$$\{X_m < xc_n\} \subseteq \{X_k < (x+\varepsilon)c_n\} \cup \{X_{k+1,m} \geqslant \varepsilon c_n\},$$

откуда

$$\{X_m < xc_n,\ E_k\} \subseteq \{X_{k+1,m} \geqslant \varepsilon c_n,\ E_k\},\ k = 1, ..., m-1. \tag{11}$$

С помощью (11) и условия λ-перемешивания получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1} \geqslant (x+\varepsilon)c_n\} \leqslant \mathbf{P}\{X_m \geqslant xc_n\} + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{X_m < xc_n,\ E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{X_m \geqslant xc_n\} + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{X_{k+1,m} \geqslant \varepsilon c_n,\ E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{X_m \geqslant xc_n\} + \lambda \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{P}\{X_k \geqslant \varepsilon c_n\} \right) \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{X_m \geqslant xc_n\} + \delta_n \cdot \mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1} \geqslant (x+\varepsilon)c_n\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 3. *Если функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_5$, последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\delta_n < 1/2$, то при любом $x > 0$ и $0 < \varepsilon < x$*

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant xc_n\} \geqslant n\mathbf{P}\{X_1 \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\}(1 - 3\delta_n).$$

Доказательство. Пусть $A_n = \{X_{n-1} < 2\varepsilon,\ f(\xi_n) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\}$

$$A_k = \{X_{k-1} < 2\varepsilon c_n,\ f(\xi_k) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ X_{k+1,n} < \varepsilon c_n\},\ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

В силу (3)

$$|X_n - f(\xi_k)| \leqslant X_{k-1} + X_{k+1,n}, \tag{12}$$

так что

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant xc_n\} \geqslant \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\overline{A}_1 \cdot ... \cdot \overline{A}_{k-1} A_k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{A_k\} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right\}. \tag{13}$$

При $1 \leqslant k \leqslant n-1$ получаем

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \mathbf{P}\{f(\xi_k) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\} -$$

$$-\mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ \left(\{X_{k-1} \geqslant 2\varepsilon c_n\} \cup \{X_{k+1,n} \geqslant \varepsilon c_n\}\right)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\right\}\left(1-\lambda\left(\mathbf{P}\{X_{k+1,n} \geqslant \varepsilon c_n\}\right)-\lambda\left(\mathbf{P}\{X_{k-1} \geqslant 2\varepsilon c_n\}\right) \geqslant\right.$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\right\}(1-2\delta_n). \tag{14}$$

$\mathbf{P}\{A_n\}$ оценивается аналогично. Далее

$$\left\{X_{j-1} < 2\varepsilon c_n,\ f\left(\xi_j\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\right\} \subseteq \left\{X_{j-1} < 2\varepsilon c_n,\ X_j \geqslant (x+\varepsilon)c_n\right\},$$

так что если $\varepsilon < x$, то $\mathbf{P}\left\{A_k \cdot \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j\right\} \leqslant$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ \bigcup_{j=1}^{k-1}\left(X_{j-1} < 2\varepsilon c_n, f\left(\xi_j\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n, \overline{X}_{k-1} \geqslant 2\varepsilon c_n\right\}\Big)$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\right\}\lambda\left(\mathbf{P}\{\overline{X}_{k-1} \geqslant 2\varepsilon c_n\}\right). \tag{15}$$

и тогда из (13), (14) и (15) и леммы 2 с $\delta_n < 1/2$ следует

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant x c_n\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{f\left(\xi_k\right) \geqslant (x+\varepsilon)c_n\right\}(1-3\delta_n).$$

Лемма доказана.

■

Следующее предложение – это модификация леммы 3.1 из [7].

Лемма 4. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_5$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\delta_n < 1$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\} \leqslant \delta_n(1-\delta_n)^{-1}\mathbf{P}\{X_n \geqslant \varepsilon c_n\} + n\mathbf{P}\left\{X_1 \geqslant x c_n\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1} < 2\varepsilon c_n \leqslant X_k\}, k = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} E_k = \{\overline{X}_{n-1} \geqslant 2\varepsilon c_n\}$. В силу (3) при $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\left\{X_{k+1,n} < \varepsilon c_n,\ E_k,\ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f\left(\xi_k\right) < x c_n\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{X_n < (x+3\varepsilon)c_n,\ E_k,\ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f\left(\xi_k\right) < x c_n\right\},$$

откуда

$$\left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ E_k,\ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f\left(\xi_k\right) < x c_n\right\} \subseteq \{E_k,\ X_{k+1,n} \geqslant \varepsilon c_n\}. \tag{16}$$

Аналогично выводится

$$\left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\} \subseteq \left\{\overline{X}_{n-1} \geqslant 2\varepsilon c_n,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\}.$$

Отсюда

$$\left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ \max_{1\leqslant kn} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\} =$$

$$= \left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n,\ \overline{X}_{n-1} \geqslant 2\varepsilon c_n,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\}. \tag{17}$$

С помощью (16) и (17) получаем $\mathbf{P}\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\} \leqslant$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n, \max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) \geqslant xc_n\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n, \overline{X}_{n-1} \geqslant 2\varepsilon c_n, \max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) \geqslant xc_n\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\left\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n, E_k, \max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) < xc_n\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) \geqslant xc_n\right\}. \tag{18}$$

Из соотношения (3) следует

$$X_{k+1,n} \geqslant X_n - f\left(\xi_k\right) - X_{k-1},$$

и из (18) выводим

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{X_{k+1,n} \geqslant \varepsilon c_n, E_k\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\xi_k\right) \geqslant xc_n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant n\mathbf{P}\{X_1 \geqslant xc_n\} + \lambda\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{X_k \geqslant \varepsilon c_n\}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{E_k\} =$$

$$= \delta_n \mathbf{P}\{\overline{X}_{n-1} \geqslant 2\varepsilon c_n\} + n\mathbf{P}\{X_1 \geqslant xc_n\}.$$

Из этого соотношения с помощью Леммы 1 выводим утверждение леммы. ■

Замечание 3. Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение: если последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ такова, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\delta_n = \lambda\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{X_k \geqslant \varepsilon c_n\}\right) \to 0,\ n \to \infty$$

и при любых $x > 0,\ \varepsilon > 0$ выполняется одно из следующих предположений:

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)c_n\} = O\left(\mathbf{P}\{X_n \geqslant \varepsilon c_n\}\right)\ n \to \infty, \tag{19}$$

$$\delta_n \mathbf{P}\{X_n \geqslant \varepsilon c_n\} = o\left(n\mathbf{P}\{X_1 \geqslant xc_n\}\right),\ n \to \infty, \tag{20}$$

то при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n \geqslant xc_n\} \sim n\mathbf{P}\{X_1 \geqslant xc_n\}, \tag{21}$$

то есть, имеет место $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$.

Если для некоторой последовательности $\{\xi_n\}$ выполняется условие λ-перемешивания, $F_n(xa_n) \to G_\rho(x) = \exp\{-cx^{-\rho}\}$, $x > 0$, а $k = k(n) \to \infty$ растёт достаточно медленно, то

$$\frac{\mathbf{P}\{X_n \geqslant (x+3\varepsilon)ka_n\}}{\mathbf{P}\{X_n \geqslant \varepsilon k a_n\}} \sim \frac{1-\exp\{-ck^{-\rho}(x+3\varepsilon)^{-\rho}\}}{1-\exp\{-c(\varepsilon k)^{-\rho}\}} \to \left(\frac{\varepsilon}{x+3\varepsilon}\right)^{\rho}, \ n \to \infty.$$

Это означает, что выполняется (19) и, следовательно, (21), то есть $(\mathrm{R}_2(\mathrm{f}))$.

Литература

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М. : Мир, 1984.
3. Гринь А.Г. Минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для максимумов // Математические структуры и моделирование. 2006. Вып. 16. С. 21–25.
4. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и её приложения. М. : Мир, 1983. 574 с.
5. Гринь А.Г. О предельных теоремах для функций от независимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 2(38). С. 5–15.
6. Гринь А.Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31, № 1. С. 53–63.
7. Peligrad M. An invariance principle for $\varphi-$ mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, No. 4. P. 1304–1313.

THE CONVERGENCE OF THE DISTRIBUTIONS OF THE CALIBRATION FUNCTIONS FROM THE DEPENDENT VARIABLES TO MAX-STABLE LAWS

A.G. Grin
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The necessary and sufficient conditions for convergence of the distributions of symmetric calibration functions from dependent random variables to max-stable distributions are obtained in this article. These conditions include the so-called minimal conditions of the weak dependence.

Keywords: calibration functions of random variables, max-stable distributions, minimal conditions of the weak dependence.

Дата поступления в редакцию: 15.10.2018