

## ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ: III. 10-ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ

**В.В. Варламов**

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsui.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

**Аннотация.** Изучается 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в рамках теоретико-группового подхода. Подробно рассматривается мультиплетная структура периодов расширенной таблицы. Показывается, что длины периодов системы элементов определяются строением основного представления группы Румера–Фета. Вычисляются теоретические массы элементов 10-го и 11-го периодов. Вводится понятие гипертвистора.

**Ключевые слова:** периодический закон, таблица Менделеева, модель Бора, группа Румера–Фета.

### 1. Введение

В 2019 г. исполняется 150 лет со дня открытия Дмитрием Ивановичем Менделеевым периодического закона химических элементов. Периодическая система элементов Менделеева пролила свет на огромное число опытных фактов и позволила предсказать существование и основные свойства новых, ранее неизвестных, элементов. Однако, как отмечается в [1, с. 9]: «... Периодический закон и периодическая система химических элементов всё ещё остаются для нас загадкой. До сих пор не ясны до конца причины (точнее, первопричины) периодичности, в частности, причины периодической повторяемости сходных электронных конфигураций атомов, хотя очевидно, что феномен этот связан с непосредственной динамической симметрией атомных систем. До сих пор не очерчены границы применимости периодического закона — продолжается полемика относительно специфики ядерных и электронных свойств атомов сверхтяжёлых элементов».

Общепринятая ныне структура периодической системы, базирующаяся на модели Бора, исходит из того, что расположение элементов в системе при возрастании их атомных номеров однозначно определяется индивидуальными особенностями электронного строения атомов, описанного в рамках одноэлектронного приближения (метод Хартри), и непосредственно отражает энергетическую последовательность атомных орбиталей  $s$ -,  $p$ -,  $d$ -,  $f$ -оболочек, заселяющихся электронами при увеличении их суммарного числа по мере возрастания заряда ядра атома в соответствии с принципом минимума энергии. Однако

это возможно лишь в самом простом варианте приближения Хартри, но уже в варианте приближения Хартри-Фока полная энергия атома не равна сумме орбитальных энергий, и электронная конфигурация атома определяется минимумом его полной энергии. Авторы [1] отмечают, что «... традиционная интерпретация структуры периодической системы на основе последовательности заполнения электронных атомных орбиталей в соответствии с их относительными энергиями  $\varepsilon_{nl}$  весьма и весьма приближённа, имеет, безусловно, ряд недостатков и обладает неширокими границами применимости. Универсальной последовательности орбитальных энергий  $\varepsilon_{nl}$  не существует, к тому же такая последовательность не определяет полностью порядок заселения атомных орбиталей электронами, поскольку необходим учёт конфигурационных взаимодействий (наложение конфигураций в многоконфигурационном приближении). И, безусловно, периодичность — это не только и не полностью орбитально-энергетические эффекты» [1, с. 31]. И далее: «... причина повторения сходных электронных конфигураций атомов в их основных состояниях от нас ускользает, и в рамках одноэлектронного приближения вряд ли вообще может быть выявлена. Более того, не исключено, что теорию периодичности вообще ждёт судьба, несколько напоминающую судьбу теории планетных ретроградных в системе Птолемея после создания системы Коперника. Вполне возможно, что то, что мы называем принципом периодичности, есть результат непространственных симметрий атома — перестановочной и динамической» [1, с. 31-32].

В 1971 г. академик В.А. Фок в своей работе [2] поставил главный для учения о принципе периодичности и теории периодической системы вопрос: «Вмещаются ли свойства атомов и их составных частей в рамки чисто пространственных представлений или же нужно как-то расширить понятия пространства и пространственной симметрии, чтобы вместить присущие атомам и их составным частям степени свободы?» [2, с. 108]. Как известно, модель Бора в своей первоначальной формулировке использует квантовые числа, относящиеся к электронам в поле со сферической симметрией, что позволило Бору ввести понятие замкнутых электронных оболочек и сблизить это понятие с периодами таблицы Менделеева. Несмотря на этот успех, задача объяснения периодической системы была далека от решения. Более того, при всей глубине и радикальности этих новых идей они ещё укладывались в рамки обычных пространственных представлений. Дальнейший важный шаг был связан с открытием внутренней, не пространственной, степени свободы электрона — спина, представляющего собой не механическое понятие. Открытие спина тесно связано с открытием принципа Паули, который был сформулирован ещё до квантовой механики как требование, чтобы на каждой орбите, характеризующейся определёнными квантовыми числами, находилось не более двух электронов. В конце статьи [2] Фок сам отвечает на им же поставленный вопрос: «Чисто пространственных степеней свободы электрона недостаточно для описания свойств электронной оболочки атома и нужно выйти за пределы чисто пространственных понятий, чтобы выразить те законы, которые лежат в основе периодической системы. Новая степень свободы электрона — его спин — позволяет описать чуждые классическим представлениям свойства физических систем. Эта внут-

ренная степень свободы электрона существенно необходима для формулировки свойств многоэлектронных систем, а тем самым и для теоретического обоснования периодической системы Менделеева» [2, с. 116].

В настоящей статье, являющейся продолжением работ [3, 4], рассматривается 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в рамках модели Румера–Фета. В отличие от модели Бора, в которой пространственные и внутренние (спин) симметрии объединяются на основе классической составной системы, заимствованной из небесной механики<sup>1</sup>, группа Румера–Фета  $G$  описывает непространственные симметрии<sup>2</sup>. Более того, модель Румера–Фета целиком опирается на математический аппарат квантовой механики и теории групп без привлечения каких-либо классических аналогий, таких как понятие составной системы. Понятие составной системы, непосредственно вытекающее из принципа сепарабельности (основного принципа редукционизма), имеет, как известно, ограниченное применение в квантовой механике, поскольку в микромире, в отличие от композиционной (составной) структуры макромира, преобладает суперпозиционная структура. Гейзенберг утверждал, что понятие «состоит из» не работает в физике частиц<sup>3</sup>. С другой стороны, проблема «критических» элементов модели Бора также является следствием наглядных пространственных представлений. Решение Фейнмана, представляющее атомное ядро в виде точки, приводит к парадоксу Клейна для элемента **Uts** (Унтрисептий) с атомным номером  $Z = 137$ . Другой пространственный образ, используемый в решении Грейнера–Рейнхардта, представляет атомное ядро в виде заряженного шара, что приводит к потере электронейтральности для атомов выше значения  $Z = 173$ .

Можно как угодно представлять себе электрон: в виде точки (частицы или волны) или заряженного шарика, или в виде электронного облака на атомной орбитали — все эти мысленные образы лишь затемняют существо дела, поскольку остаются в рамках наглядных пространственных представлений. Однако есть математическая структура, далёкая от наглядности, и тем не менее, точно описывающая электрон: это 2-компонентный спинор, вектор фундаментального представления двулистной накрывающей  $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$  группы Лоренца. Аналогично, отвлекаясь от каких-либо наглядных представлений об

<sup>1</sup>Очевидно, что наглядный пространственный образ, используемый в модели Бора, есть рудимент классических представлений. Так, в середине 19-го века предпринимались многочисленные попытки построения механических моделей электромагнитных явлений, даже трактат Максвелла содержит большое число механических аналогий. Как показало время, все механические модели электромагнетизма оказались не более чем вспомогательными строительными лесами, которые впоследствии были отброшены за ненужностью.

<sup>2</sup>Группа  $G$  также содержит в качестве подгруппы и группу Лоренца (группа вращений пространства-времени Минковского).

<sup>3</sup>Кварковая модель, являющаяся ярким примером составной системы, утверждает, что все существующие в природе адроны построены («по правилам детского конструктора») либо из трёх кварков (барионы), либо из кварка и антикварка (мезоны). Как и всякая составная система, модель кварков имеет весьма условный и приближенный характер. Так, например, октет  $B_0$  псевдоскалярных мезонов и октет  $B_1$  векторных мезонов имеют одинаковую кварковую структуру, хотя частицы, входящие в эти октеты, различаются по массе, спину и чётности. Более того, большое число адронов (спин  $> 3/2$ ) находится вне рамок кварковой модели.

атоме, можно утверждать, что значение имеет только та математическая структура, которая непосредственно вытекает из группы симметрии периодической системы. В п.4 показывается, что такой структурой является гипертвистор, действующий в  $\mathbb{K}$ -гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}_8 \otimes \mathbf{H}_\infty$ .

Модель Бора не объясняет периодичность, а только лишь аппроксимирует её в рамках одноэлектронного приближения Хартри. По всей видимости, объяснение периодического закона лежит на пути, указанном академиком Фоком, т. е. необходимо выйти за пределы классических (пространственно-временных) представлений при описании периодической системы элементов. Очевидно, что наиболее подходящей на этом пути схемой описания является теоретико-групповой подход.

## 2. 10-периодическое расширение

На рис. 1 представлено 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в форме основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета  $G = \text{SO}(2, 4) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)'$  для базиса

$$|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle, \quad \nu = 1, 2, \dots; \quad s' = -1/2, 1/2; \quad \lambda = 0, 1, \dots, \nu - 1; \\ \iota_\lambda = \lambda - 1/2, \lambda + 1/2; \quad \kappa = -\iota_\lambda, -\iota_\lambda + 1, \dots, \iota_\lambda - 1, \iota_\lambda, \quad (1)$$

где  $\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa$  — квантовые числа группы  $G$ . Пунктирными рамками с символами **M** и **S** обозначены соответственно таблицы Менделеева и Сиборга (8-периодическое расширение, см. [4]). Первый период таблицы Менделеева, включающий в себя водород **H** и гелий **He**, соответствует простейшему мультиплету ( $\nu = 1, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) группы  $G$ . Второй период состоит из трёх мультиплетов: литий **Li** и бериллий **Be** ( $\nu = 1, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), бор **B** и углерод **C** ( $\nu = 2, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), элементы **N, O, F, Ne** образуют квадруплет ( $\nu = 2, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ). Третий период также состоит из трёх мультиплетов (два дублета и один квадруплет): дублет **Na** и **Mg** ( $\nu = 2, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), дублет **Al** и **Si** ( $\nu = 2, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплет **P, S, Cl, Ar** ( $\nu = 2, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ). Четвёртый период включает в себя пять мультиплетов: дублеты **K, Ca** ( $\nu = 2, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Ga, Ge** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **As, Se, Br, Kr** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Sc, Ti, V, Cr** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), а также секстет, образованный элементами **Mn, ..., Zn** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ). Этот секстет и квадруплет ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ) образуют первую вставную декаду (переходные элементы). Аналогичную структуру имеет пятый период: дублеты **Rb, Sr** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), **In, Sn** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплет **Sb, Te, I, Xe** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ), квадруплет **Y, Zr, Nb, Mo** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ) и секстет **Tc, ..., Cd** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) (вторая вставная декада). Шестой период состоит из семи мультиплетов: дублеты **Cs, Ba** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Tl, Pb** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Bi, Po, At, Rn** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Lu, Hf, Ta, W** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ),

$s'$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=6$			
$\lambda=0$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ \text{H} & \text{Li} \\ \text{He} & \text{Be} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ \text{Na} & \text{K} \\ \text{Mg} & \text{Ca} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ \text{Rb} & \text{Cs} \\ \text{Sr} & \text{Ba} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ \text{Fr} & \text{Uue} \\ \text{Ra} & \text{Ubn} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ \text{Uhe} & \text{Bue} \\ \text{Usn} & \text{Bbn} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ \text{Beu} & \text{Tht} \\ \text{Beb} & \text{Thq} \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=1/2$		
$\lambda=1$		$\begin{matrix} \text{B} & \text{Al} & \text{Ga} & \text{In} & \text{Tl} & \text{Nh} & \text{Uht} & \text{But} & \text{Bop} & \text{Tps} \\ \text{C} & \text{Si} & \text{Ge} & \text{Sn} & \text{Pb} & \text{Fl} & \text{Uhq} & \text{Buq} & \text{Boh} & \text{Tpo} \\ \text{N} & \text{P} & \text{As} & \text{Sb} & \text{Bi} & \text{Mc} & \text{Uhp} & \text{Bup} & \text{Bos} & \text{Tpe} \\ \text{O} & \text{S} & \text{Se} & \text{Te} & \text{Po} & \text{Lv} & \text{Uhn} & \text{Buh} & \text{Boo} & \text{Thn} \\ \text{F} & \text{Cl} & \text{Br} & \text{I} & \text{At} & \text{Ts} & \text{Uhs} & \text{Bus} & \text{Boe} & \text{Thu} \\ \text{Ne} & \text{Ar} & \text{Kr} & \text{Xe} & \text{Rn} & \text{Og} & \text{Uho} & \text{Buo} & \text{Ben} & \text{Thb} \end{matrix}$						$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=1/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=3/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\}$	
$\lambda=2$			$\begin{matrix} \text{Sc} & \text{Y} & \text{Lu} & \text{Lr} & \text{Upt} & \text{Bnt} & \text{Bsp} & \text{Tqs} \\ \text{Ti} & \text{Zr} & \text{Hf} & \text{Rf} & \text{Upq} & \text{Bnq} & \text{Bsh} & \text{Tqo} \\ \text{V} & \text{Nb} & \text{Ta} & \text{Db} & \text{Upp} & \text{Bnp} & \text{Bss} & \text{Tqe} \\ \text{Cr} & \text{Mo} & \text{W} & \text{Sg} & \text{Upn} & \text{Bnh} & \text{Bso} & \text{Tpn} \\ \text{Mn} & \text{Tc} & \text{Re} & \text{Bh} & \text{Ups} & \text{Bno} & \text{Bse} & \text{Tpu} \\ \text{Fe} & \text{Ru} & \text{Os} & \text{Hs} & \text{Upo} & \text{Bns} & \text{Bon} & \text{Tpb} \\ \text{Co} & \text{Rh} & \text{Ir} & \text{Mt} & \text{Upe} & \text{Bne} & \text{Bou} & \text{Tpi} \\ \text{Ni} & \text{Pd} & \text{Pt} & \text{Ds} & \text{Uhn} & \text{Bun} & \text{Bob} & \text{Tpq} \\ \text{Cu} & \text{Ag} & \text{Au} & \text{Rg} & \text{Uhu} & \text{Buu} & \text{Bot} & \text{Tpp} \\ \text{Zn} & \text{Cd} & \text{Hg} & \text{Cn} & \text{Uhb} & \text{Bub} & \text{Boq} & \text{Tpn} \end{matrix}$					$\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=3/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=-5/2 \\ \kappa=-3/2 \end{matrix} \right\}$	
$\lambda=3$				$\begin{matrix} \text{La} & \text{Ac} & \text{Ute} & \text{Uoe} & \text{Bhu} & \text{Ttt} & \kappa=-5/2 \\ \text{Ce} & \text{Th} & \text{Uqn} & \text{Uen} & \text{Bhb} & \text{Ttq} & \kappa=-3/2 \\ \text{Pr} & \text{Pa} & \text{Uqu} & \text{Ueb} & \text{Bht} & \text{Ttp} & \kappa=-1/2 \\ \text{Nd} & \text{U} & \text{Uqb} & \text{Ueb} & \text{Bhq} & \text{Tth} & \kappa=1/2 \\ \text{Pm} & \text{Np} & \text{Uqt} & \text{Uet} & \text{Bhp} & \text{Tts} & \kappa=3/2 \\ \text{Sm} & \text{Pu} & \text{Uqq} & \text{Ueq} & \text{Bhh} & \text{Tto} & \kappa=5/2 \\ \text{Eu} & \text{Am} & \text{Uqp} & \text{Uep} & \text{Bhs} & \text{Tte} & \kappa=-7/2 \\ \text{Gd} & \text{Cm} & \text{Uqh} & \text{Ueh} & \text{Bho} & \text{Tqn} & \kappa=-5/2 \\ \text{Tb} & \text{Bk} & \text{Uqs} & \text{Ueo} & \text{Bhe} & \text{Tqu} & \kappa=-3/2 \\ \text{Dy} & \text{Cf} & \text{Uqo} & \text{Ueo} & \text{Bsn} & \text{Tqb} & \kappa=-1/2 \\ \text{Ho} & \text{Es} & \text{Uqe} & \text{Uen} & \text{Bsu} & \text{Tqt} & \kappa=1/2 \\ \text{Er} & \text{Fm} & \text{Upn} & \text{Ubn} & \text{Bse} & \text{Tqq} & \kappa=3/2 \\ \text{Tm} & \text{Md} & \text{Upu} & \text{Bnu} & \text{Bst} & \text{Tqp} & \kappa=5/2 \\ \text{Yb} & \text{No} & \text{Upb} & \text{Bnb} & \text{Bsq} & \text{Tqn} & \kappa=7/2 \end{matrix}$				$\left. \begin{matrix} \kappa=-5/2 \\ \kappa=-3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=3/2 \\ \kappa=5/2 \end{matrix} \right\}$	
$\lambda=4$					$\begin{matrix} \text{Ubu} & \text{Usu} & \text{Bqt} & \text{Tup} & \kappa=-7/2 \\ \text{Ubb} & \text{Usb} & \text{Bqq} & \text{Tuh} & \kappa=-5/2 \\ \text{Ubt} & \text{Ust} & \text{Bqp} & \text{Tus} & \kappa=-3/2 \\ \text{Ubq} & \text{Usq} & \text{Bqh} & \text{Tuo} & \kappa=-1/2 \\ \text{Ubp} & \text{Usp} & \text{Bqs} & \text{Tue} & \kappa=1/2 \\ \text{Ubn} & \text{Ush} & \text{Bqo} & \text{Tbn} & \kappa=3/2 \\ \text{Ubs} & \text{Uss} & \text{Bqe} & \text{Tbu} & \kappa=5/2 \\ \text{Ubo} & \text{Uso} & \text{Bpn} & \text{Tbb} & \kappa=7/2 \\ \text{Ube} & \text{Use} & \text{Bpu} & \text{Tbt} & \kappa=-9/2 \\ \text{Utn} & \text{Uon} & \text{Bpb} & \text{Tbq} & \kappa=-7/2 \\ \text{Utu} & \text{Uou} & \text{Bpt} & \text{Tbp} & \kappa=-5/2 \\ \text{Utb} & \text{Uob} & \text{Bpq} & \text{Tbh} & \kappa=-3/2 \\ \text{Utt} & \text{Uot} & \text{Bpp} & \text{Tbs} & \kappa=-1/2 \\ \text{Utq} & \text{Uoq} & \text{Bph} & \text{Tbo} & \kappa=1/2 \\ \text{Utp} & \text{Uop} & \text{Bps} & \text{Tbe} & \kappa=3/2 \\ \text{Uth} & \text{Uoh} & \text{Bpo} & \text{Ttn} & \kappa=5/2 \\ \text{Uts} & \text{Uos} & \text{Bpe} & \text{Ttu} & \kappa=7/2 \\ \text{Uto} & \text{Uoo} & \text{Bhn} & \text{Ttb} & \kappa=9/2 \end{matrix}$				$\left. \begin{matrix} \kappa=-7/2 \\ \kappa=-5/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\}$ $\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=5/2 \\ \kappa=7/2 \end{matrix} \right\}$
$\lambda=5$						$\begin{matrix} \text{Bbu} & \text{Bet} & \kappa=-9/2 \\ \text{Bbb} & \text{Beq} & \kappa=-7/2 \\ \text{Bbt} & \text{Bep} & \kappa=-5/2 \\ \text{Bbq} & \text{Beh} & \kappa=-3/2 \\ \text{Bbp} & \text{Bes} & \kappa=-1/2 \\ \text{Bbh} & \text{Beo} & \kappa=1/2 \\ \text{Bbs} & \text{Bee} & \kappa=3/2 \\ \text{Bbo} & \text{Tnn} & \kappa=5/2 \\ \text{Bbe} & \text{Tnu} & \kappa=7/2 \\ \text{Bbh} & \text{Tnb} & \kappa=9/2 \\ \text{Btu} & \text{Tnt} & \kappa=-11/2 \\ \text{Btb} & \text{Tnq} & \kappa=-9/2 \\ \text{Btt} & \text{Tnp} & \kappa=-7/2 \\ \text{Btq} & \text{Tnh} & \kappa=-5/2 \\ \text{Btp} & \text{Tns} & \kappa=-3/2 \\ \text{Bth} & \text{Tno} & \kappa=-1/2 \\ \text{Bts} & \text{Tne} & \kappa=1/2 \\ \text{Bto} & \text{Tun} & \kappa=3/2 \\ \text{Bte} & \text{Tuu} & \kappa=5/2 \\ \text{Bqn} & \text{Tub} & \kappa=7/2 \\ \text{Bqu} & \text{Tut} & \kappa=9/2 \\ \text{Bqb} & \text{Tuq} & \kappa=11/2 \end{matrix}$			$\left. \begin{matrix} \kappa=-9/2 \\ \kappa=-7/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=-5/2 \\ \kappa=-3/2 \end{matrix} \right\}$ $\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=11/2$ $\left. \begin{matrix} \kappa=3/2 \\ \kappa=5/2 \end{matrix} \right\}$

Рис. 1. 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в форме основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета.

секстеты **Re**, ..., **Hg** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **La**, ..., **Sm** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октет **Eu**, ..., **Yb** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ). Седьмой период (последний период таблицы Менделеева) дублирует структуру шестого периода: дублеты **Fr**, **Ra** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Nh**, **Fl** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Mc**, **Lv**, **Ts**, **Og** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Lr**, **Rf**, **Db**, **Sg** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Bh**, ..., **Cn** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Ac**, ..., **Pu** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октет **Am**, ..., **No** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ). Восьмой период<sup>4</sup>, формирующий расширение таблицы Менделеева (таблица Сиборга), состоит из девяти мультиплетов: дублеты **Uue**, **Ubn** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Uht**, **Uhq** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Uhp**, ..., **Uho** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Upt**, ..., **Uph** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Ups**, ..., **Uhb** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Ute**, ..., **Uqq** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Uqp**, ..., **Upb** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Ubu**<sup>5</sup>, ..., **Ubo** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплет **Ube**, ..., **Uto** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ). Восьмой период содержит 50 элементов. Девятый период, завершающий таблицу Сиборга, также содержит девять мультиплетов: дублеты **Uhe**, **Usn** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **But**, **Buq** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Bup**, ..., **Buo** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Bnt**, ..., **Bnh** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Bns**, ..., **Bub** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Uoe**, ..., **Ueq** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Uep**, ..., **Bnb** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Usu**, ..., **Uso** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплет **Use**, ..., **Uoo** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ). С десятого периода начинается построение семейства мультиплетов с квантовым числом  $\lambda = 5$  группы  $G$ , что соответствует в модели Бора формированию  $h$ -оболочки. Десятый период состоит из 11-ти мультиплетов: дублеты **Bue**, **Bbn** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Bop**, **Boh** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Bos**, ..., **Ben** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Bsp**, ..., **Bso** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Bse**, ..., **Boq** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Bhu**, ..., **Bhh** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Bhs**, ..., **Bsq** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Bqt**, ..., **Bpn** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплеты **Bpu**, ..., **Bhn** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ) и **Bbu**, ..., **Bth** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 9/2$ ), 12-плет **Btu**, ..., **Bqb** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 11/2$ ). Аналогичную структуру имеет 11-ый период: дублеты **Beu**, **Beb** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Tps**, **Tpo** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Tpe**, ..., **Thb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Tqs**, ..., **Tpn** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Tpu**, ..., **Tph** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Ttt**, ..., **Tto** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Tte**, ..., **Tqh** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Tup**, ..., **Tbb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплеты

<sup>4</sup>С восьмого периода начинается область гипотетических (неоткрытых) элементов периодической системы.

<sup>5</sup>Согласно модели Бора, с элемента **Ubu** (Унбиуний) начинается заполнение  $g$ -оболочки. В модели Румера-Фета аналогом  $g$ -оболочки является семейство мультиплетов с квантовым числом  $\lambda = 4$  группы  $G$ .

**Tbt**, ..., **Ttb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ) и **Bet**, ..., **Tnb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 9/2$ ), 12-плет **Tnt**, ..., **Tuq** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 11/2$ ). Десятый и одиннадцатый период каждый содержит по 72 элемента. Длины периодов образуют следующую последовательность чисел<sup>6</sup>:

$$2, 8, 8, 18, 18, 32, 32, 50, 50, 72, 72, \dots \quad (2)$$

Далее с элементов **Tht** (Тригексотритий,  $Z = 363$ ) и **Thq** (Тригексоквадий,  $Z = 364$ ), образующих дублет ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), начинается 12-ый период. Этот период, уже выходящий за рамки таблицы на рис. 1, содержит 13 мультиплетов и имеет длину в 98 элементов (в точном соответствии с последовательностью (2)). Начиная с 12-го периода, образуется новое семейство мультиплетов с квантовым числом  $\lambda = 6$  группы  $G$ , что соответствует в модели Бора построению  $i$ -оболочки. Аналогичную структуру имеет 13-ый период.

Очевидно, что по мере увеличения квантового числа  $\nu$  у фигуры на рис. 1 будут появляться новые «ступени» (удвоенные периоды) и соответствующие  $\lambda$ -семейства мультиплетов (оболочки).

### 3. Массы элементов

Таблица на рис. 1 соответствует следующей редукционной цепочке:

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \mapsto \text{SO}(2, 4) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(4) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(3)_c. \quad (3)$$

Цепочка групп  $G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3$  (3) позволяет провести поэлементное расщепление масс основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета. С этой целью используем массовую формулу, введённую в [4]:

$$m = m_0 + a \left[ s'(2\nu - 3) - 5\nu + \frac{11}{2} + 2(\nu^2 - 1) \right] - b \cdot \lambda(\lambda + 1) + a' [2\kappa - 0,1666\kappa^3 + 0,0083\kappa^5 - 0,0001\kappa^7] + (b'\iota_\lambda)^p - 1, \quad (4)$$

где

$$p = \begin{cases} 0, & \text{если } \iota_\lambda = \lambda - 1/2; \\ 1, & \text{если } \iota_\lambda = \lambda + 1/2. \end{cases}$$

Теоретические массы элементов 10-го и 11-го периодов, начиная с атомного номера  $Z = 221$  по  $Z = 364$ , вычисляются согласно массовой формуле (4) при значениях  $m_0 = 1, a = 17, b = 5,5, a' = 2,15, b' = 5,3$  (см. таб. 1). Первый столбец таб. 1 содержит атомный номер элемента; во втором столбце находится

<sup>6</sup>Числа этой последовательности определяются знаменитой формулой Ридберга  $2p^2$  ( $p$  — целое число), которую Зоммерфельд в своей книге «Строение атомов и спектры» назвал «кабалистической» (см. В. Паули [5]). Ряд Ридберга  $P = 2(1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + \dots)$  содержит удвоенный первый период, что несколько не соответствует реальности, т. е. последовательности (2).

общепринятое (согласно организации IUPAC<sup>7</sup>) обозначение элемента; в третьем столбце приведены квантовые числа элемента, задающие вектор  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$  базиса (1); четвёртый столбец содержит массу элемента, вычисленную согласно формуле (4).

**Таб. 1.** Массы элементов 10-го и 11-го периодов.

$Z$	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
221	<b>Bbu</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -9/2\rangle$	521,3949
222	<b>Bbb</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -7/2\rangle$	525,3181
223	<b>Bbt</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -5/2\rangle$	526,2352
224	<b>Bbq</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -3/2\rangle$	527,6270
225	<b>Bbp</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -1/2\rangle$	530,8342
226	<b>Bbh</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 1/2\rangle$	535,1057
227	<b>Bbs</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 3/2\rangle$	538,3729
228	<b>Bbo</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 5/2\rangle$	539,7647
229	<b>Bbe</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 7/2\rangle$	540,6818
230	<b>Btn</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 9/2\rangle$	544,6050
231	<b>Btu</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -11/2\rangle$	545,0151
232	<b>Btb</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -9/2\rangle$	549,5449
233	<b>Btt</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -7/2\rangle$	553,4681
234	<b>Btq</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -5/2\rangle$	554,3852
235	<b>Btp</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -3/2\rangle$	555,7770
236	<b>Bth</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -1/2\rangle$	559,0442
237	<b>Bts</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 1/2\rangle$	563,2557
238	<b>Bto</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 3/2\rangle$	566,5229
239	<b>Bte</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 5/2\rangle$	567,9147
240	<b>Bqn</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 7/2\rangle$	568,8318
241	<b>Bqu</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 9/2\rangle$	572,7556
242	<b>Bqb</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 11/2\rangle$	582,2848
243	<b>Bqt</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -7/2\rangle$	580,3181
244	<b>Bqq</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -5/2\rangle$	581,2352
245	<b>Bqp</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -3/2\rangle$	582,6270
246	<b>Bqh</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -1/2\rangle$	585,8942
247	<b>Bqs</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 1/2\rangle$	590,1057
248	<b>Bqo</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 3/2\rangle$	593,3729
249	<b>Bqe</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 5/2\rangle$	594,7647
250	<b>Bpn</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 7/2\rangle$	595,6818
251	<b>Bpu</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -9/2\rangle$	599,2449
252	<b>Bpb</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -7/2\rangle$	603,1681
253	<b>Bpt</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -5/2\rangle$	604,0852
254	<b>Bpq</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -3/2\rangle$	605,4770
255	<b>Bpp</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -1/2\rangle$	608,7442
256	<b>Bph</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 1/2\rangle$	612,9557
257	<b>Bps</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 3/2\rangle$	616,2229

<sup>7</sup>IUPAC — International Union of Pure and Applied Chemistry.



Z	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
258	<b>Bpo</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 5/2\rangle$	617,6147
259	<b>Bpe</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 7/2\rangle$	618,5318
260	<b>Bhn</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 9/2\rangle$	622,4550
261	<b>Bhu</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, -5/2\rangle$	625,2352
262	<b>Bhb</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, -3/2\rangle$	626,6270
263	<b>Bht</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, -1/2\rangle$	629,8942
264	<b>Bhq</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, 1/2\rangle$	634,1057
265	<b>Bhp</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, 3/2\rangle$	637,3729
266	<b>Bhh</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, 5/2\rangle$	638,7647
267	<b>Bhs</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -7/2\rangle$	641,8681
268	<b>Bho</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -5/2\rangle$	642,7852
269	<b>Bhe</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -3/2\rangle$	644,1770
270	<b>Bsn</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -1/2\rangle$	647,4442
271	<b>Bsu</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 1/2\rangle$	651,6557
272	<b>Bsb</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 3/2\rangle$	654,9229
273	<b>Bst</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 5/2\rangle$	656,3147
274	<b>Bsq</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 7/2\rangle$	657,2318
275	<b>Bsp</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, -3/2\rangle$	659,6270
276	<b>Bsh</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, -1/2\rangle$	662,8942
277	<b>Bss</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, 1/2\rangle$	667,1057
278	<b>Bso</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, 3/2\rangle$	670,3729
279	<b>Bse</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, -5/2\rangle$	670,4852
280	<b>Bon</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, -3/2\rangle$	671,8770
281	<b>Bou</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, -1/2\rangle$	675,1442
282	<b>Bob</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, 1/2\rangle$	679,3557
283	<b>Bot</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, 3/2\rangle$	682,6229
284	<b>Boq</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, 5/2\rangle$	684,0147
285	<b>Bop</b>	$ 6, -1/2, 1, 1/2, -1/2\rangle$	684,8942
286	<b>Boh</b>	$ 6, -1/2, 1, 1/2, 1/2\rangle$	689,1057
287	<b>Bos</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, -3/2\rangle$	689,5770
288	<b>Boo</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, -1/2\rangle$	691,8442
289	<b>Boe</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, 1/2\rangle$	696,0557
290	<b>Ben</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, 3/2\rangle$	699,3229
291	<b>Beu</b>	$ 6, -1/2, 0, 1/2, -1/2\rangle$	699,8942
292	<b>Beb</b>	$ 6, -1/2, 0, 1/2, 1/2\rangle$	700,1037
293	<b>Bet</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -9/2\rangle$	674,3949
294	<b>Beq</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -7/2\rangle$	678,3181
295	<b>Bep</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -5/2\rangle$	679,2352
296	<b>Beh</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -3/2\rangle$	680,6270
297	<b>Bes</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -1/2\rangle$	683,8942
298	<b>Beo</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 1/2\rangle$	688,1097
299	<b>Bee</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 3/2\rangle$	691,3729
300	<b>Tnn</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 5/2\rangle$	692,7647
301	<b>Tnu</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 7/2\rangle$	693,6818
302	<b>Tnb</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 9/2\rangle$	697,6050

Z	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
303	<b>Tnt</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -11/2\rangle$	693,0151
304	<b>Tnq</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -9/2\rangle$	702,5449
305	<b>Tnp</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -7/2\rangle$	706,4681
306	<b>Tnh</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -5/2\rangle$	707,3852
307	<b>Tns</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -3/2\rangle$	708,7770
308	<b>Tno</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -1/2\rangle$	712,0442
309	<b>Tne</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 1/2\rangle$	716,2557
310	<b>Tun</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 3/2\rangle$	719,5229
311	<b>Tuu</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 5/2\rangle$	720,9147
312	<b>Tub</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 7/2\rangle$	721,8318
313	<b>Tut</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 9/2\rangle$	725,7550
314	<b>Tuq</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 11/2\rangle$	735,2848
315	<b>Tup</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -7/2\rangle$	733,3181
316	<b>Tuh</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -5/2\rangle$	734,2352
317	<b>Tus</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -3/2\rangle$	735,6270
318	<b>Tuo</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -1/2\rangle$	738,8942
319	<b>Tue</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 1/2\rangle$	743,1057
320	<b>Tbn</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 3/2\rangle$	746,3729
321	<b>Tbu</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 5/2\rangle$	747,7647
322	<b>Tbb</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 7/2\rangle$	748,6818
323	<b>Tbt</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -9/2\rangle$	752,2449
324	<b>Tbq</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -7/2\rangle$	756,1681
325	<b>Tbp</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -5/2\rangle$	757,0852
326	<b>Tbh</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -3/2\rangle$	758,4770
327	<b>Tbs</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -1/2\rangle$	761,7442
328	<b>Tbo</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 1/2\rangle$	765,9557
329	<b>Tbe</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 3/2\rangle$	769,2229
330	<b>Ttn</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 5/2\rangle$	770,6147
331	<b>Ttu</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 7/2\rangle$	771,5318
332	<b>Ttb</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 9/2\rangle$	775,4550
333	<b>Ttt</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, -5/2\rangle$	778,2352
334	<b>Ttq</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, -3/2\rangle$	779,6270
335	<b>Ttp</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, -1/2\rangle$	782,8942
336	<b>Tth</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, 1/2\rangle$	787,1057
337	<b>Tts</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, 3/2\rangle$	790,3729
338	<b>Tto</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, 5/2\rangle$	791,7647
339	<b>Tte</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -7/2\rangle$	794,8681
340	<b>Tqn</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -5/2\rangle$	795,7852
341	<b>Tqu</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -3/2\rangle$	797,1770
342	<b>Tqb</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -1/2\rangle$	800,4442
343	<b>Tqt</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 1/2\rangle$	804,6557
344	<b>Tqq</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 3/2\rangle$	807,9229
345	<b>Tqp</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 5/2\rangle$	809,3147
346	<b>Tqh</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 7/2\rangle$	810,2318

Z	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
347	<b>Tqs</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, -3/2\rangle$	812,6270
348	<b>Tqo</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, -1/2\rangle$	815,8942
349	<b>Tqe</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, 1/2\rangle$	820,1057
350	<b>Tpn</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, 3/2\rangle$	823,3729
351	<b>Tpu</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, -5/2\rangle$	823,4852
352	<b>Tpb</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, -3/2\rangle$	824,8770
353	<b>Tpt</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, -1/2\rangle$	828,1442
354	<b>Tpq</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, 1/2\rangle$	832,3557
355	<b>Tpp</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, 3/2\rangle$	835,6224
356	<b>Tph</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, 5/2\rangle$	837,0147
357	<b>Tps</b>	$ 6, 1/2, 1, 1/2, -1/2\rangle$	837,8942
358	<b>Tpo</b>	$ 6, 1/2, 1, 1/2, 1/2\rangle$	842,1057
359	<b>Tpe</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, -3/2\rangle$	841,5770
360	<b>Thn</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, -1/2\rangle$	844,8442
361	<b>Thu</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, 1/2\rangle$	849,0557
362	<b>Thb</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, 3/2\rangle$	852,3229
363	<b>Tht</b>	$ 6, 1/2, 0, 1/2, -1/2\rangle$	848,8942
364	<b>Thq</b>	$ 6, 1/2, 0, 1/2, 1/2\rangle$	853,1057

#### 4. Гипертвисторы

Представление об атоме как о «бесструктурном» состоянии, введённое Румером и Фетом в пионерской работе [6], вызывает вполне понятное недоумение. Так уж устроено человеческое сознание, что для анализа необходимо наличие некоторой структуры или наглядного образа<sup>8</sup>. Попытаемся определить, к какой структуре атома приводит теоретико-групповое описание. Ясно, что эта структура не может иметь ничего общего с наглядными представлениями классической физики. Группа Румера–Фета во многом построена по аналогии с группами внутренних (динамических) симметрий, таких как SU(3) и SU(6). Продолжим эту аналогию, используя кварковую модель и SU(3)-симметрию. Как известно, кварк — это вектор фундаментального представления группы SU(3)<sup>9</sup>. Определим вектор «фундаментального» представления группы Румера–

<sup>8</sup>Так, в модели Резерфорда–Бора эксплуатируется наглядный образ, заимствованный из небесной механики: атом как система крутящихся друг возле друга шариков (атомных ядер и электронов).

<sup>9</sup>Т. е. изначально чисто математический объект, которому впоследствии было приписано некое «реальное» существование (в рамках так называемого конфайнмента). Согласно «кварковому конструктору», все наблюдаемые адроны (за исключением недавно открытых пентакварковых барионов и адронов спина выше 3/2) являются связанными состояниями либо трёх кварков (барионы), либо кварка и антикварка (мезоны). Румер и Фет пишут: «Формулы кваркового состава являются лишь перефразировкой на "кварковый" язык результатов теории представлений группы SU(3)» [7, с. 230]. «Реальный» статус кварки приобрели после включения в теоретико-групповую схему SU(3)-симметрии концепции близкодействия. Что касается тетракварков и пентакварков, то в статье «Развитие понятий в истории квантовой механики» Гейзенберг, критикуя гипотезу кварков, «предвосхитил» открытие экзотических барионов: «Думаю, что это за-

Фета.

Группа Румера–Фета

$$\mathrm{SO}(2, 4) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)'$$

эквивалентна группе

$$\widetilde{\mathrm{SO}}(2, 4) \otimes \mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{SU}(2, 2) \otimes \mathrm{SU}(2),$$

где  $\mathrm{SU}(2, 2)$  — двулистная накрывающая конформной группы (группа псевдоунитарных унимодулярных  $4 \times 4$  матриц). Далее, в силу изоморфизма

$$\mathrm{SU}(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4 : \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 \right\} \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4),$$

который следует из алгебраического определения группы Клиффорда–Липшица  $\Gamma_{p,q}$  (см. [9, 10]):

$$\mathbf{Spin}_+(2, 4) = \left\{ s \in \left[ \begin{array}{cc} \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^0 - i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^3 & -\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^1 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^2 \\ \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^1 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^2 & \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^0 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^3 \end{array} \right] \middle| N(s) = 1 \right\},$$

где  $\mathbb{C}_4$  — алгебра Дирака,  $\mathcal{O}_{1,1}$  — алгебра антикватернионов, будем рассматривать двулистную накрывающую  $\mathrm{SU}(2, 2)$  как *спинорную группу*<sup>10</sup>. Спинтензорные представления группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$  образуют субстрат конечномерных представлений  $\tau_{k/2,r/2}$ ,  $\bar{\tau}_{k/2,r/2}$  конформной группы, реализуемых в пространствах  $\mathrm{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2^{k+r}}$  и  $\overline{\mathrm{Sym}}_{(k,r)} \subset \overline{\mathbb{S}}_{2^{k+r}}$ , где  $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$  — спинпространство. Твистор  $\mathbf{Z}^\alpha = (\mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}_{\dot{\alpha}})^\top$  является вектором фундаментального представления группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$ , где  $\alpha, \dot{\alpha} = 0, 1$ ,  $\mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}_{\dot{\alpha}}$  — двухкомпонентные взаимносопряжённые спиноры. Тогда вектором фундаментального представления группы  $\mathrm{SU}(2, 2) \otimes \mathrm{SU}(2)$  будет удвоенный твистор

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_+ \\ \mathbf{z}_- \end{bmatrix}, \quad (5)$$

или *гипертвистор*. Далее, вектором общего спинтензорного представления группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$  является  $\mathbf{Z} = [\mathbf{S}, \bar{\mathbf{S}}]^\top$ , где  $\mathbf{S}$  — спинтензор вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_r}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \sum \mathbf{s}^{\alpha_1} \otimes \mathbf{s}^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{s}^{\alpha_k} \otimes \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_1} \otimes \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_r}, \quad \alpha_i, \dot{\alpha}_i = 0, 1;$$

блуждение. Заблуждение потому, что, даже если кварки окажутся реальностью, мы не сможем сказать, что протон состоит из трёх кварков. Нам придётся говорить, что иногда он, пожалуй, и состоит из трёх кварков, но в другие моменты он может состоять из четырёх кварков и одного антикварка или из пяти кварков и двух антикварков и т. д.» [8, с. 105]. Модель кварков в своё время (60-ые годы прошлого столетия) сыграла важную роль, позволив частично упорядочить адронные спектры (восьмеричный путь Гелл–Манна), однако на данный момент, эта модель не обладает достаточной степенью общности, чтобы охватить всё множество состояний спектра материи.

<sup>10</sup>Элементами группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$  являются 15 бивекторов  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$ , где  $i, j = 1, \dots, 6$ . Явный вид всех пятнадцати генераторов приводит через разложение Картана для группы  $\mathrm{SU}(2, 2)$  к бикватернионным углам, т. е. к обобщению комплексных и кватернионных углов для групп  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  и  $\mathrm{Sp}(1, 1)$ , где  $\mathrm{Sp}(1, 1)$  — двулистная накрывающая группы де Ситтера [11, 12].

т. е. вектор спинпространства  $\mathbb{S}_{2k+r} = \mathbb{S}_{2k} \otimes \dot{\mathbb{S}}_{2r}$ , где  $\dot{\mathbb{S}}_{2r}$  — дуальное спинпространство.  $\bar{\mathbf{S}}$  — спинтензор из сопряженного пространства  $\bar{\mathbb{S}}_{2k+r}$ . Следовательно, общий гипертвистор определяется выражением вида (5), где  $\mathbf{Z}_+ = [\mathbf{S}, \bar{\mathbf{S}}]^\top$ ,  $\mathbf{Z}_- = [\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{S}]^\top$ .

Применяя ГНС-конструкцию, получим векторные состояния

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi | \pi(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} = \frac{\langle \Phi | F_{ss'}^+(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle},$$

где  $H$  — оператор энергии,  $|\Phi\rangle$  — циклический вектор гильбертова пространства  $\mathbf{H}_\infty$ . Множество всех чистых состояний  $\omega_\Phi(H)$  образует *физическое гильбертово пространство*  $\mathbf{H}_{\text{phys}} = \mathbf{H}_8 \otimes \mathbf{H}_\infty$ <sup>11</sup> и, соответственно, *пространство лучей*  $\hat{H} = \mathbf{H}_{\text{phys}}/S^1$ .

Далее в целях соблюдения условия электронейтральности и включения дискретных симметрий необходимо расширить двулистную накрывающую  $SU(2, 2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4)$  до *универсальной накрывающей*  $\mathbf{Pin}(2, 4)$ . В общем виде (для произвольных ортогональных групп) такое расширение было проведено в работах [10, 13–15]. При этом центральную роль играет введённый Рашевским [16] псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  комплексной алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_n$ , где  $\mathcal{A}$  — произвольный элемент алгебры  $\mathbb{C}_n$ . Как известно, спинпространство является минимальным левым идеалом алгебры Клиффорда  $\mathcal{C}_{p,q}$ , т. е. существует изоморфизм  $\mathbb{S}_{2m}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = \mathcal{C}_{p,q}f$ , где  $f$  — примитивный идемпотент алгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$ ,  $\mathbb{K} = f\mathcal{C}_{p,q}f$  — кольцо деления для  $\mathcal{C}_{p,q}$ ,  $m = (p + q)/2$ . Комплексное спинпространство  $\mathbb{S}_{2m}(\mathbb{C})$  является комплексификацией  $\mathbb{C} \otimes I_{p,q}$  минимального левого идеала  $I_{p,q}$  вещественной подалгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$ . Следовательно,  $\mathbb{S}_{2k+r}$  является минимальным левым идеалом комплексной алгебры  $\mathbb{C}_{2k} \otimes \dot{\mathbb{C}}_{2r} \simeq \mathbb{C}_{2(k+r)}$ . Поскольку вещественная спинорная структура появляется в результате редукции  $\mathbb{C}_{2(k+r)} \rightarrow \mathcal{C}_{p,q}$ , то, как следствие, *зарядовое сопряжение*  $\mathcal{C}$  (псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ ) для алгебр  $\mathcal{C}_{p,q}$  над вещественным числовым полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  и кватернионным кольцом деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  (типы  $p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}$ ) редуцируется к *обмену частица-античастица*  $\mathcal{C}'^{12}$  (см. [15]). Как известно, существуют два класса нейтральных частиц: 1) частицы, имеющие античастицы, такие как

<sup>11</sup>При ограничении группы  $G$  на подгруппу Лоренца  $SO_0(1, 3)$  в рамках двулистной накрывающей  $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$  после применения ГНС-конструкции получим спинор (вектор фундаментального представления группы  $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ ), действующий в удвоенном гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_\infty$  (пространство Паули). Спинор является частным случаем гипертвистора.

<sup>12</sup>Здесь приходится вынужденно пользоваться такими рудиментами классических представлений, как частица и античастица. Гейзенберг в статье «Язык и реальность в современной физике» отмечает, что «при описании процессов, протекающих в области мельчайших размеров, при описании взаимосвязей, проанализированных и математически выраженных квантовой теорией, обыденный язык и язык классической физики столь явно обнаружили свою непригодность, что даже физики эйнштейновского ранга до конца жизни не в состоянии были примириться с новой ситуацией» [8, с. 216]. И далее: «В зависимости от характера конкретного эксперимента определяется, целесообразно ли в данном случае говорить о волне или о частице, о траекториях электрона или о стационарных состояниях. При этом, однако, мы всегда ясно сознаем, что подобные образы — лишь неточные аналогии, что мы имеем дело всего лишь с условными событиями и пытаемся с их помощью приблизиться к реальному событию. Если

нейтроны, нейтрино и т. д.; 2) частицы, совпадающие со своими античастицами (например фотоны,  $\pi^0$ -мезоны и т. д.), т. е. так называемые *истинно нейтральные частицы*. Первый класс описывается нейтральными состояниями  $\omega_{\mathbb{F}}^r(H)$  с алгебрами  $\mathcal{C}_{p,q}$  над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  с кольцами  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  и  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  (типы  $p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}$  и  $p - q \equiv 5 \pmod{8}$ ). Для описания второго класса нейтральных частиц введём *истинно нейтральные состояния*  $\omega_{\mathbb{F}}^{r_0}(H)$  с алгебрами  $\mathcal{C}_{p,q}$  над числовым полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  и вещественными кольцами деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$  и  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  (типы  $p - q \equiv 0, 2 \pmod{8}$  и  $p - q \equiv 1 \pmod{8}$ ). В случае состояний  $\omega_{\mathbb{F}}^{r_0}(H)$  псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$  редуцируется к тождественному преобразованию (частица совпадает со своей античастицей).

Следуя [17], определим  $\mathbf{H}_{\text{phys}} = \mathbf{H}_8 \otimes \mathbf{H}_{\infty}$  как  $\mathbb{K}$ -гильбертово пространство, т. е. как пространство, наделённое структурой  $*$ -кольца, где  $*$ -кольцо изоморфно кольцу деления  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Таким образом, гипертвистор обладает тензорной структурой (энергия, масса) и  $\mathbb{K}$ -линейной структурой (заряд), причём соединение этих двух структур приводит к динамическому изменению заряда и массы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кораблева Т.П., Корольков Д.В. Теория периодической системы. СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 2005.
2. Фок В.А. Вмещаются ли химические свойства атомов в рамки чисто пространственных представлений? // Периодический закон и строение атома. М. : Атомиздат, 1971. С. 107–117.
3. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 5–23.
4. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов II.: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1(49). С. 5–21.
5. Паули В. Ридберг и периодическая система элементов // Физические очерки. М. : Наука, 1975. С. 233–238.
6. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа Spin(4) и таблица Менделеева // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 203–209.
7. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970.
8. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
9. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001.
10. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168;

же требуется точная формулировка, чаще всего приходится ограничиваться искусственным языком математики» [8, с. 217–218]. Атомы суть дискретные стационарные состояния спектра материи. Представляя квантовый микробиъект как частицу или волну, мы остаёмся в рамках априорной формы созерцания и обыденного языка, которые имеют к реальности микромира весьма отдалённое отношение. Отсюда следует, что и так называемый корпускулярно-волновой «дуализм» есть также рудимент классических представлений. Единственно твёрдой и надёжной опорой в области микромира является язык математики.

11. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 805–822.
12. Varlamov V.V. Spherical functions on the de Sitter group // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. 163–201.
13. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805.
14. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191.
15. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
16. Рашевский П.К. Теория спиноров // УМН. 1955. Т. 10, С. 3–110.
17. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics // Found. Phys. 2012. V. 42. P. 819–855.

### GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS: III. 10-PERIODIC EXTENSION

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

**Abstract.** 10-periodic extension of Mendeleev table is studied within group theoretical approach. A multiplet structure is considered in detail for periods of the extended table. It is shown that period lengths are defined by a structure of basic representation of the Rumer-Fet group. Theoretical masses of elements are calculated for 10-th and 11-th periods. A notion of hypertwistor is introduced.

**Keywords:** periodic law, Mendeleev table, Bohr model, Rumer-Fet group.

### REFERENCES

1. Korableva T.P., Korol'kov D.V. Teoriya periodicheskoi sistemy. SPb., Izdatel'stvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2005. (in Russian)
2. Fok V.A. Vmeshchayutsya li khimicheskie svoystva atomov v ramki chisto prostanstvennykh predstavlenii? Periodicheskii zakon i stroenie atoma, Moscow, Atomizdat Publ., 1971, pp. 107–117. (in Russian)
3. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 2(46), pp. 5–23. (in Russian)
4. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov II.: Tablitsa Siborga. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 1(49), pp. 5–21. (in Russian)
5. Pauli V. Ridberg i periodicheskaya sistema elementov. Fizicheskie ocherki, Moscow, Nauka Publ., 1975, pp. 233–238. (in Russian)

6. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Gruppya Spin(4) i tablitsa Mendeleeva. TMF, 1971, vol. 9, pp. 203–209. (in Russian)
7. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Teoriya unitarnoi simmetrii. Moscow, Nauka Publ., 1970. (in Russian)
8. Geizenberg V. Shagi za gorizont. Moscow, Progress Publ., 1987. (in Russian)
9. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001.
10. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2004, vol. 14, pp. 81–168;
11. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group. J. Phys. A: Math. Gen., 2006, vol. 39, pp. 805–822.
12. Varlamov V.V. Spherical functions on the de Sitter group. J. Phys. A: Math. Theor., 2007, vol. 40, pp. 163–201.
13. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras. Int. J. Theor. Phys., 2001, vol. 40, pp. 769–805.
14. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space. Phys. Lett. B., 2005, vol. 631, pp. 187–191.
15. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces. Adv. Appl. Clifford Algebras., 2015, vol. 25, pp. 487–516.
16. Rashevskii P.K. Teoriya spinorov. UMN, 1955, vol. 10, pp. 3–110. (in Russian)
17. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics. Found. Phys., 2012, vol. 42, pp. 819–855.

*Дата поступления в редакцию: 15.08.2019*