Математические структуры и моделирование
2021. № 1(57). С. 26–40

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2021.1.26-40

НОРМИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Для симметрических функций от величин из стационарных последовательностей, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, получены критерии притяжения к нормальному закону в терминах последовательностей, которыми в предельных теоремах осуществляется масштабная нормировка. Основные результаты работы обобщают все известные к настоящему времени результаты такого типа.

Ключевые слова: симметрические функции, равномерно сильное перемешивание, нормирующие последовательности, притяжение к нормальному закону.

Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \overset{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [1, с. 393].

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ — целая часть x.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем обозначать $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ стационарную в узком смысле последовательность, $X_n = f\left(\xi_1, ..., \xi_n\right)$, а $\mathcal{N}(0,1)$ — случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и B_n

$$B_n^{-1}\left(X_n - A_n\right) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону. Если $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, ...$, и

$$(\mathbb{D}X_n)^{-1/2}\,(X_n - \mathbb{E}X_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

то говорят, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

В настоящей работе рассматриваются стационарные последовательности, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания (φ–перемешивания).

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ — σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если к тому же $\varphi(1) < 1$, то такое условие будем называть условием *φ_1-перемешивания.*

Если $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, ξ измерима относительно $\mathcal{F}_{\leqslant 0}$, η — относительно $\mathcal{F}_{\geqslant n}$, $\|\xi\|_s = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{1/s} < \infty$, $\|\eta\|_t < \infty$, $s, t \geqslant 1$, $1/s + 1/t = 1$, то

$$|\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta| \leqslant 2\varphi^{\frac{1}{s}}(n)\|\xi\|_s\|\eta\|_t \tag{1}$$

[3, с. 392].

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

f1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$, $f(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{x} \neq 0$;

f2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

f3. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$;

f4. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \sim f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, если $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |f(\mathbf{x} + \mathbf{y})| + |f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{y})| \to \infty$, (то есть хотя бы одно из слагаемых в $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ стремится к бесконечности). Эквивалентность в f_3 понимается следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > N$, то

$$|f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|.$$

Из этого соотношения нетрудно вывести (см. [4]), что при любых $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n} \in \mathbb{R}^n$

$$|f(\mathbf{x_1} + ... + \mathbf{x_k}) - f(\mathbf{x_1}) - ... - f(\mathbf{x_k})| \leqslant \varepsilon(|f(\mathbf{x_1})| + ... + |f(\mathbf{x_{k-1}})| + (k-1)N. \tag{2}$$

Пусть, как и выше, $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $n = 1, 2, ...$, но функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $Y_n = f(\xi_n)$.

Пусть $x > 0$, $\mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$.

Обозначим

$$\xi_k(x) = \xi_j \mathbf{1}(|f(\xi_j)| \leqslant x), \ X_n(x) = f(\xi_1(x), ..., \xi_n(x)), \ \sigma_n^2(x) = \mathbb{D}X_n(x).$$

Введём две последовательности, которыми может осуществляться масштабная нормировка в предельных теоремах для $\{X_n\}$. Универсальной нормирующей последовательностью назовём $b_n = \sup\{z \geqslant 0 : \sigma_n(z) \geqslant z\}$, а интегральной нормирующей последовательностью порядка $1 \leqslant p \leqslant 2$ — — — $b_n(p) = \|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-1} \|X_n - \mathbb{E}X_n\|_p$. Эта терминология оправдана тем, что в предположениях, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ_1-перемешивания, а функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, в теоремах о притяжении к нормальному закону масштабная нормировка может осуществляться только последовательностями, пропорциональными $\{b_n\}$ и $b_n(p)$, то есть если $B_n^{-1}(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, то $B_n \sim b_n \sim b_n(p)$, $n \to \infty$ (см. теорему 2).

В случае, когда $X_n = S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, в [5] и [6] доказаны следующие результаты

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ_1-перемешивания, $\{b_n\}$ и $\{b_n(p)\}$ — универсальная и интегральная нормирующая последовательность порядка p для последовательности S_n. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) последовательность $\{S_n\}$ притягивается к нормальному закону с параметрами 0 и 1;

b) при некотором $1 \leqslant p \leqslant 2$ выполняется условие Линдеберга порядка p:

$$nb_n^{-p}(p)\mathbb{E}\{|\xi_1|^p, |\xi_1| > \varepsilon b_n(p)\} \to 0, \ n \to \infty \ \text{ при любом } \varepsilon > 0;$$

c) $n\mathbb{P}\{|\xi_1| \geqslant \varepsilon b_n\} \to 0$, $n \to \infty$ при любом $\varepsilon > 0$.

При этом если $B_n^{-1}(S_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, то $B_n \sim b_n \sim b_n(p)$, $n \to \infty$.

Замечание 1. В [5] и [6] для доказательства импликаций $b) \Rightarrow a)$ и $c) \Rightarrow a)$ условие $\varphi(1) < 1$ не используются, кроме этого теорема доказана и в случае $0 < p < 1$, но в этом случае не предполагается существование $\mathbb{E}X_n$, понадобится другое определение интегральной нормирующей последовательности и в доказательстве потребуются многочисленные корректировки. Поэтому мы будем использовать приведённую выше формулировку теоремы, как более компактную и лучше воспринимаемую.

В настоящей работе доказывается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ_1-перемешивания, а функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $\{b_n\}$ и $\{b_n(p)\}$ — универсальная и интегральная нормирующая последовательность порядка $1 \leqslant p \leqslant 2$ для последовательности $\{X_n\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) последовательность $\{X_n\}$ *притягивается к нормальному закону с параметрами 0 и 1;*

b) при некотором $1 \leqslant p \leqslant 2$ *выполняется условие Линдеберга порядка* p:

$$nb_n^{-p}(p)\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| > \varepsilon b_n(p)\} \to 0, \ n \to \infty \ \text{ при любом } \ \varepsilon > 0; \qquad (\mathrm{L_p})$$

c)

$$n\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant \varepsilon b_n\} \to 0, \ n \to \infty \text{ при любом } \varepsilon > 0. \qquad (3)$$

При этом если $B_n^{-1}(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, *то* $B_n \sim b_n \sim b_n(p), \ n \to \infty$.

Будем обозначать

$$\xi_k(x,y) = \xi_j \mathbf{1}(x < |f(\xi_k)| \leqslant y), \quad \xi_k^{\vartriangle}(x) = \xi_j \mathbf{1}(|f(\xi_k)| > x),$$

$$X_{k,n} = f(\Xi_{k,n}) = f(\xi_k, ..., \xi_n), \ X_{k,n}(x) = f(\Xi_{k,n}(x)) = f(\xi_k(x), ..., \xi_n(x)),$$

$$X_{k,n}(x,y) = f(\Xi_{k,n}(x,y)) = f(\xi_k(x,y), ..., \xi_n(x,y)), \ X_{k,n}^{\vartriangle}(x) = f(\xi_k^{\vartriangle}(x), ..., \xi_n^{\vartriangle}(x)),$$

$$k \leqslant n, \ X_n(x) = X_{1,n}(x), \ X_n(x,y) = X_{1,n}(x,y), \ X_n^{\vartriangle}(x) = X_{1,n}^{\vartriangle}(x).$$

Введём *симметризованные* величины $\widetilde{X}_{k,n} = f(\Xi_{k,n}) - f(\Xi'_{k,n})$, где векторы $\Xi_{k,n}$ и $\Xi'_{k,n}$ независимы и одинаково распределены. Легко видеть, что для последовательности $\{\widetilde{X}_n\}$ выполняется соотношение (2), а последовательность $\{\widetilde{Y}_n\}$, $\widetilde{Y}_n = f(\xi_n) - f(\xi'_n)$ удовлетворяет условию φ-перемешивания с коэффициентом $\widetilde{\varphi}(n) \leqslant 1 - (1 - \varphi(n))^2$ [7, Lemma 2.3].

Аналогично $\widetilde{X}_{k,n}(x) = f(\Xi_{k,n}(x)) - f(\Xi'_{k,n}(x))$, где векторы $\Xi_{k,n}(x)$ и $\Xi'_{k,n}(x)$ независимы и одинаково распределены и $\widetilde{X}_{k,n}(x,y) = f(\Xi_{k,n}(x,y)) - f(\Xi'_{k,n}(x,y))$, где векторы $\Xi_{k,n}(x,y)$ и $\Xi'_{k,n}(x,y)$ независимы и одинаково распределены.

Имеют место слабые неравенства симметризации [1, с. 259]:

$$\mathbb{P}\{|X_n - \mu_n| \geqslant x\} \leqslant 2\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_n| \geqslant x\} \leqslant 4\mathbb{P}\{|X_n - a| \geqslant x/2\}, \ x \geqslant 0. \qquad (4)$$

Здесь μ — медиана Y_1, μ_n — медиана X_n, $a \in \mathbb{R}$. Из (4) при $p > 0$ следуют соотношения $\mathbb{E}\{|X_n - \mu_n|^p, \ |X_n - \mu_n| \geqslant x\} \leqslant$

$$\leqslant 2\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_n|^p, \ |\widetilde{X}_n| \geqslant x\} \leqslant 2^{p+2}\mathbb{E}\{|X_n - a|^p, \ |X_n - A_n| \geqslant x/2\}. \qquad (5)$$

Будем ещё обозначать $\widetilde{b}_n(p) = \|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-1} \|\widetilde{X}_n\|_p$, $\widetilde{\sigma}_n^2(x) = \mathbb{D}\widetilde{X}_n(x)$. Тогда $\widetilde{\sigma}_n^2(x) = 2\sigma_n^2(x)$, а если выполняется условие Линдеберга порядка $p \geqslant 1$, то $\widetilde{b}_n(p) \asymp b_n(p)$ [4, Лемма 5].

Лемма 1. [6] $\{c_n^\rho\}$ *является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а* c_n *— правильно меняющейся последовательностью порядка* $1/\rho, \ \rho > 0$)*, тогда и только тогда, когда*

$$c_{n+m}^\rho \sim c_n^\rho + c_m^\rho, \quad n + m \to \infty.$$

Лемма 2. [4] *Пусть* $\{\xi_n\}$ — *стационарная последовательность, удовлетворяющая условию* φ*-перемешивания, функция* f *удовлетворяет условиям* $f_1 - f_4$, $\varepsilon > 0$, $r \geqslant 1$, *а* $c_n \to \infty$. *Если* n *таково, что в* (2) $(m+1)N < c_n$ *и*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathbb{P}\left\{|X_j| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то

$$\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant (r+6)c_n\right\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant rc_n\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}.$$

Будем обозначать

$$Z_n = \max(Y_1, ..., Y_n), \quad \widetilde{Z}_n = \max(\widetilde{Y}_1, ..., \widetilde{Y}_n),$$
$$Z'_n = \max(Y'_1, ..., Y'_n), \quad \widetilde{Z}'_n = \max(\widetilde{Y}'_1, ..., \widetilde{Y}'_n),$$
$$a_n = \sup\left\{x : n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant x\} \geqslant 1\right\}.$$

Лемма 3. [8] *Для любых* x *и* $n \geqslant 1$

$$(1-\varphi(1))\mathbb{P}\{Z'_n \geqslant x\} \leqslant \mathbb{P}\{Z_n \geqslant x\} \leqslant (1+\varphi(1))\mathbb{P}\{Z'_n \geqslant x\}. \tag{6}$$

При любом $p > 0$

$$(1-\varphi(1))c_n^p(p) \leqslant \mathbb{E}|Z_n|^p \leqslant (1+\varphi(1))c_n^p(p). \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть* $\{\xi_n\}$ — *стационарная последовательность, удовлетворяющая условию* φ_1*-перемешивания, функция* f *удовлетворяет условиям* $f_1 - f_4$, $\varepsilon > 0$, *а* $c_n \to \infty$. *Если* n *таково, что* $N < c_n$, *где* N — *константа из* (2) *и*

$$\gamma = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi_1 < 1,$$

то

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant (r+3)c_n\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant rc_n\right\}.$$

Это утверждение содержится в доказательстве леммы 2 из [9].

Лемма 5. *Пусть* $\{\xi_n\}$ — *стационарная последовательность удовлетворяет условию* φ_1*-перемешивания, функция* f *удовлетворяет условиям* $f_1 - f_4$. *Тогда если* $B_n^{-1}X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, $B_n \to \infty$, $n \to \infty$ *то*

1. Выполняется условие $(\mathrm{R_f})$:

$$B_{n+m}^{-1}X_{n+m} \overset{d}{\sim} B_{n+m}^{-1}X'_n + B_{n+m}^{-1}(p)X'_m, \quad n+m \to \infty, \tag{$\mathrm{R_f}$}$$

(здесь и далее символ $n+m \to \infty$ *означает, что* $n \to \infty$, *а* $m = m(n)$ — *произвольная последовательность натуральных чисел).*

2. $\{B_n^2\}$ *является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.*

3. При $1 \leqslant p < 2$ *и любом* $\varepsilon > 0$

$$nB_n^{-p}\mathbb{E}\{|Y_1|^p, |Y_1| > \varepsilon B_n\} \to 0, \ n \to \infty.$$

Доказательство. 1. В силу (2) $|X_{n+m}-X_n-X_{n+1,n+m}| \leqslant \varepsilon|X_{n+m}|+N$, так что

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|X_{n+m}-X_n-X_{n+1,n+m}|}{B_{n+m}}>\delta\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon|X_{n+m}|+N}{B_{n+m}}>\delta\right\} \sim \mathbb{P}\left\{|\mathcal{N}(0,1)| \geqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\right\} \to 0,$$

при $\varepsilon \to 0$, то есть $B_{n+m}^{-1}(X_{n+m}-X_n-X_{n+1,n+m}) \to 0$ по вероятности и

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{X_n+X_{n+1,n+m}}{B_{n+m}}. \tag{8}$$

С помощью (8) получаем

$$\frac{X_{n+1,n+m}}{B_{n+m}}+\frac{X_{n+m+1,n+m+r}}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{X_{n+1,n+m+r}}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{X_{n+1,n+r}}{B_{n+m}}+\frac{X_{n+r+1,n+m+r}}{B_{n+m}}. \tag{9}$$

В (9) $r=r(n)\to\infty$ можно выбрать столь медленно растущей, что

$$B_{n+m}^{-1}X_{n+1,n+r} \to 0,\ B_{n+m}^{-1}X_{n+m+1,n+m+r} \to 0$$

по вероятности, и тогда из (8) и (9) следует

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{X_n}{B_{n+m}}+\frac{X_{n+r+1,n+m+r}}{B_{n+m}}. \tag{10}$$

В силу (1)

$$\left|\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X_n+X_{n+r+1,n+m+r}}{B_{n+m}}\right\}-\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X_n}{B_{n+m}}\right\}\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X_{n+r+1,n+m+r}}{B_{n+m}}\right\}\right| \leqslant$$

$\leqslant 2\varphi^{\frac{1}{2}}(r) \to 0,\ n\to\infty$, и из (10) и того, что $X_{n+r+1,n+m+r} \overset{d}{=} X_m$ получаем теперь условие $(\mathrm{R_f})$ для последовательности $\{X_n\}$.

Пусть $\alpha_n = B_{n+m}^{-1}B_n$ и $\beta_n = B_{n+m}^{-1}B_m$. В силу $(\mathrm{R_f})$

$$\alpha_n\frac{X_n}{B_n}+\beta_n\frac{X'_m}{B_m} \overset{d}{\sim} \frac{X_{n+m}}{B_{n+m}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),\ n\to\infty, \tag{11}$$

откуда следует, что последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ ограничены, так как в противном случае некоторая подпоследовательность в левой части (10) имела бы вырожденный предел. Из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, так что у каждой последовательности $\{n_1\} \subseteq N$ существует подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что $\alpha_{n_2}\to\alpha\geqslant 0,\ \beta_{n_2}\to\beta\geqslant 0$. Тогда

$$\alpha_{n_2}\frac{X_{n_2}}{B_{n_2}}+\beta_{n_2}\frac{X'_{m_2}}{B_{m_2}} \xrightarrow{d} \alpha\mathcal{N}(0,1)+\beta\mathcal{N}'(0,1)=\mathcal{N}\left(0,\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right),\ m_2=m(n_2).$$

В силу (11)

$$\alpha_{n_2}\frac{X_{n_2}}{B_{n_2}}+\beta_{n_2}\frac{X'_{m_2}}{B_{m_2}} \overset{d}{\sim} \frac{X_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),\ n\to\infty.$$

Из теоремы о сходимости типов [1, с. 216] следует, что $\alpha_n^2+\beta_n^2 \to \alpha^2+\beta^2 = 1$, то есть из любой последовательности $\{n_1\} \subseteq N$ можно извлечь подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такую, что $B_{n_2+m_2}^{-2}\left(B_{n_2}^2 + B_{m_2}^2\right) \to 1,\ n_2 \to \infty$. Это означает, что $B_{n+m}^2 \sim B_n^2 + B_m^2,\ n \to \infty$, и в силу леммы 1 $\{B_n^2\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.

3. Нетрудно показать (см., например [8]), что

$$\frac{n\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant x\}}{1+n\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant x\}} \leqslant \mathbb{P}\{|Z_n'| \geqslant x\} \leqslant n\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant x\},\ x > 0,$$

и если $\mathbb{P}\{|Z_n'| \geqslant x\} < 1 - \varphi(1)$, то в силу леммы 3

$$n\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant x\} \leqslant \frac{\mathbb{P}\{|Z_n'| \geqslant x\}}{1-\mathbb{P}\{|Z_n'| \geqslant x\}} \leqslant \frac{\mathbb{P}\{|Z_n| \geqslant x\}}{1-\varphi(1)-\mathbb{P}\{|Z_n| \geqslant x\}}.$$

Воспользовавшись (2), получаем

$$|X_k - X_{k-1} - Y_k| \leqslant \varepsilon|Y_k| + N, \quad |Y_k| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(|X_k| + |X_{k-1}| + N),$$

следовательно, $|Z_n| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(2\overline{X}_n + N)$. B_n, как правильно меняющуюся функцию положительного порядка, без ограничения общности можно считать неубывающей [2, с. 26] и тогда если $n \geqslant k = k(n) \to \infty$, то

$$\mathbb{P}\{|X_k| \geqslant MB_n\} \leqslant \mathbb{P}\{|X_k| \geqslant MB_k\} \to \mathbb{P}\{|\mathcal{N}(0,1)| \geqslant M\} = o_M(1).$$

В силу (2) $|X_k| \leqslant (1+\varepsilon)(|Y_1| + ... + |Y_k| + kN)$, так что если $k = k(n) \to \infty$ растет достаточно медленно, то

$$\mathbb{P}\{|X_k| \geqslant MB_n\} \leqslant k\mathbb{P}\left\{|Y_1| \geqslant \frac{MB_n - kN}{k(1+\varepsilon)}\right\} \to 0,\ n \to \infty.$$

Из двух последних соотношений следует, что $M > 0$ можно выбрать таким, что $N < MB_n$, где N — константа из (2) и

$$\gamma = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{MB_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi_1 < 1,$$

и из леммы 4 следует

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant 4MB_n\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant MB_n\right\}.$$

Таким образом,

$$n\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant MB_n\} \leqslant \frac{1}{(1-\gamma)}\mathbb{P}\left\{|\overline{X}_n| \geqslant \frac{1}{2}(MB_n(1-\varepsilon) - N)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1-\gamma)^2}\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{1}{8}(MB_n(1-\varepsilon) - N)\right\} \to$$

$$\to \frac{1}{(1-\gamma)^2}\mathbb{P}\left\{|\mathcal{N}(0,1)| \geqslant \frac{M(1-\varepsilon)}{8}\right\} = \delta(M) = o\left(\exp\{-\alpha M^2\}\right),\ \alpha > 0.$$

$B_{[x]}$ — правильно меняющаяся функция порядка 1/2, так что существует правильно меняющаяся функция $g(x)$ порядка 2 такая, что $g(B_{[x]}) \sim x,\ x \to \infty,$ и $g(B_n) \sim n, n \to \infty$. [2, с. 27]. Тогда при достаточно больших n

$$\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant MB_n\} < \frac{\delta(M)}{n} \sim \frac{\delta(M)}{g(B_n)},\ \mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant My\} \leqslant \frac{\delta(M)}{g(y)},$$

где $y = B_n$, причём в силу монотонности $\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant y\}$ последнее неравенство выполняется при всех достаточно больших y, а не только для переменных вида $y = B_n$. $1/g(y)$ является правильно меняющейся функцией порядка -2, то есть функцией вида $L(y)/y^2$, где $L(y)$ — медленно меняющаяся функция, так что при достаточно больших y

$$\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant My\} \leqslant \frac{L(y)}{y^2}\delta(M), \quad n\frac{L(B_n)}{B_n^2} \to 1, \quad \delta(M) = o\left(\exp\{-\alpha M^2\}\right). \qquad (12)$$

Далее если $0 < p < 2$, то

$$\int\limits_x^\infty y^{p-3}L(y)\,dy \sim \frac{x^{p-2}L(x)}{(2-p)},\ x \to \infty$$

[2, с. 82], так что с помощью (12) выводим

$$nB_n^{-p}\mathbb{E}\{|Y_1|^p, |Y_1| > MB_n\} = nM^p\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant MB_n\} +$$

$$+pM^pnB_n^{-p}\int\limits_{B_n}^\infty y^{p-1}\mathbb{P}\{|Y_1| \geqslant My\}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \delta(M)\left(M^pnB_n^{-2}L(B_n) + \frac{p}{2-p}M^pnB_n^{-2}L(B_n)\right) \sim \frac{2M^p\delta(M)}{2-p} \to 0,\ M \to \infty.$$

B_n — правильно меняющаяся последовательность порядка 1/2, так что $B_{kn} \sim \sqrt{k}B_n,\ k \in \mathbb{N},\ n \to \infty$ и из последнего соотношения выводим

$$nkB_{nk}^{-p}\mathbb{E}\{|Y_1|^p, |Y_1| > \varepsilon B_{nk}\} \sim nk^{1-p/2}\mathbb{E}\{|Y_1|^p, |Y_1| > \varepsilon\sqrt{k}B_n\} \leqslant \frac{2\varepsilon^p k\delta(\varepsilon\sqrt{k})}{2-p} \to 0,$$

$k \to \infty$, поэтому

$$nkB_{nk}^{-p}\mathbb{E}\{|Y_1|^p, |Y_1| > \varepsilon B_{nk}\} \to 0,\ n \to \infty, \qquad (13)$$

если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно. Далее если $nk \leqslant m \leqslant n(k+1)$, то $B_{nk} \leqslant B_m \leqslant B_{nk},\ B_{nk} \sim B_{n(k+1)}$, так что $B_m \sim B_{nk}$, и из (13) следует теперь утверждение 3 леммы. ■

Лемма 6. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность удовлетворяет условию φ_1-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$. Тогда, если выполняется условие (3), то*

a) $b_n \sim b_n(b_n) \sim b_n(xb_n),\ x > 0,\ n \to \infty;$

b) $\{b_n\}$ *является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2;*

c) последовательность $\{b_n^{-2}\widetilde{X}_n^2(xb_n),\ x > 0,\}$ *является равномерно интегрируемой.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если выполняется (3), то $b_n \to \infty,\ n \to \infty$. Действительно, если при некоторой последовательности $\{n'\} \subseteq \mathbb{N}$ $\sup\limits_{n'} b_{n'} < \infty$, то из $n'\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant \varepsilon b_{n'}\} \to 0$ следует $X_1 \stackrel{d}{=} Y_n = 0$, п.н. $n = 1, 2, \ldots$, отсюда $\xi_n = 0,\ \xi_n(x) = 0$, п.н., и $\sigma_n(x) = 0,\ b_n = 0,\ \mathbb{P}\{|X_1| \geqslant \varepsilon b_n\} = 1$, что противоречит (3).

$$\max_{1\leqslant i\leqslant j} \mathbb{P}\{|\widetilde{X}(xb_n, c_n)| \geqslant z\} \leqslant 2n\mathbb{P}\{|X_1| > xb_n\} \to 0, n \to \infty,\ 0 < xb_n < c_n,\ z > 0,$$

так что n и m можно выбрать такими, чтобы

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}\{|\widetilde{X}_i(xb_n, c_n)| \geqslant z\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \frac{7^2\gamma}{1-\gamma} < 1,$$

и из леммы 2 получаем

$$\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_n(xb_n, c_n)| \geqslant 7z\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_n(xb_n, c_n)| \geqslant z\} +$$

$$+\frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\widetilde{Y}_i(xb_n, c_n)| \geqslant \frac{x}{m(1+\varepsilon)}\right\}.$$

Откуда

$$\mathbb{E}\widetilde{X}_n^2(xb_n, c_n) \leqslant \frac{7^p\gamma}{1-\gamma}\mathbb{E}\widetilde{X}_n^2(xb_n, c_n) + \frac{(7m(1+\varepsilon))^2}{1-\gamma}\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \widetilde{Y}_i^2(xb_n, c_n)\right\}.$$

$$\mathbb{E}\widetilde{X}_n^2(xb_n, c_n) \ll \mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \widetilde{Y}_i^2(xb_n, c_n)\right\} \leqslant n\mathbb{E}\left\{\widetilde{Y}_1^2(xb_n, c_n)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2nc_n^2\mathbb{P}\{|X_1| > xb_n\} = c_n^2 o_n(1)$$

в силу (2)

$$|\widetilde{\sigma}_n(c_n) - \widetilde{\sigma}_n(xb_n)| \leqslant (1+\varepsilon)\|\widetilde{X}_n(xb_n, c_n)\|_2 + N = c_n o_n(1),\ n \to \infty. \qquad (14)$$

Так как $\widetilde{\sigma}_n(x) = \sqrt{2}\sigma_n(x)$, то из (14) при $\varepsilon > 0$ следует $\sigma_n((1 \pm \varepsilon)b_n) = \sigma_n(b_n) + o(b_n)$, значит,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(b_n)}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_n((1+\varepsilon)b_n)}{b_n} \leqslant 1,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(b_n)}{b_n} \geqslant 1$$

и $b_n \sim \sigma_n(b_n) \sim \sigma_n(xb_n),\ x > 0$.

В силу (2) $|\widetilde{X}_{n+m}(b_{n+m}) - \widetilde{X}_n(b_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+1,n+m}(b_{n+m})| \leqslant \varepsilon|\widetilde{X}_{n+m}(b_{n+m})| + N$, так что

$$\left|\widetilde{\sigma}_{n+m}(b_{n+m}) - \|\widetilde{X}_n(b_{n+m}) + \widetilde{X}_{n+1,n+m}(b_{n+m})\|_2\right| \leqslant \varepsilon\widetilde{\sigma}_{n+m}(b_{n+m}) + N. \tag{15}$$

Аналогично показывается

$$\|\widetilde{X}_{n+1,n+m}(b_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+r+1,n+r+m}(b_{n+m})\|_2 \leqslant 2\widetilde{\sigma}_r(b_{n+m}) + 2N,$$

откуда

$$\left|\|\widetilde{X}_n(b_{n+m}) + \widetilde{X}_{n+1,n+m}(b_{n+m})\|_2 - \|\widetilde{X}_n(b_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+r+1,n+r+m}(b_{n+m})\|_2\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\widetilde{\sigma}_r(b_{n+m}) + 2N. \tag{16}$$

Далее $\widetilde{\sigma}_n(b_n) \sim \sqrt{2}b_n \to \infty,\ n \to \infty$, и если $r = r(n) \to \infty$ достаточно медленно, то из (14) следует $\widetilde{\sigma}_r(b_{n+m}) = \widetilde{\sigma}_r(b_r) + o(b_{n+m}) = o(b_{n+m})$, и из (15) и (17) получаем теперь

$$2b_{n+m}^2 \sim \|\widetilde{X}_n(b_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+r+1,n+r+m}(b_{n+m})\|_2^2. \tag{17}$$

С помощью (1) получаем

$$\left|\mathbb{E}(\widetilde{X}_n(b_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+r+1,n+r+m}(b_{n+m}))^2 - \widetilde{\sigma}_n^2(b_{n+m}) - \widetilde{\sigma}_m^2(b_{n+m})\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2|\mathbb{E}\widetilde{X}_n(b_{n+m})\widetilde{X}_{n+r+1,n+r+m}(b_{n+m})| \leqslant 8\varphi^{\frac{1}{2}}(r)\widetilde{\sigma}_n(b_{n+m})\widetilde{\sigma}_m(b_{n+m}) \leqslant$$
$$\leqslant (\widetilde{\sigma}_n^2(b_{n+m}) + \widetilde{\sigma}_m^2(b_{n+m}))o_r(1). \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует

$$2b_{n+m}^2 \sim \widetilde{\sigma}_n^2(b_{n+m}) + \widetilde{\sigma}_m^2(b_{n+m}),\ n \to \infty. \tag{19}$$

С помощью (14) получаем

$$|\widetilde{\sigma}_m(b_{n+m}) - \widetilde{\sigma}_m(b_m)| \leqslant (1+\varepsilon)\|\widetilde{X}_m(b_m, b_{n+m})\|_2 + N,$$

$$\mathbb{E}\widetilde{X}_m^2(b_m, b_{n+m}) \ll \mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m} \widetilde{Y}_i^2(b_m, b_{n+m})\right\} \leqslant 2\varepsilon^2 b_{n+m}^2 + 2mb_{n+m}^2\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant \varepsilon b_{n+m}\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^2 b_{n+m}^2 + o(b_{n+m}^2),$$

откуда

$$|\widetilde{\sigma}_m^2(b_{n+m}) - 2b_m^2| = o(b_{n+m}^2), \quad |\widetilde{\sigma}_n^2(b_{n+m}) - 2b_n^2| = o(b_{n+m}^2). \tag{20}$$

Теперь из (19) и (20) следует $b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2,\ n + m \to \infty$, и в силу леммы 1 $\{b_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2. ■

Доказательство теоремы 2.

Утверждение $b) \Rightarrow a)$ при $1 \leqslant p < 2$ доказано в [4], а при $p = 2$ — в [10].

$a) \Rightarrow b)$. Пусть имеет место а), то есть при некотором выборе нормирующих констант A_n и B_n

$$B_n^{-1}(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty.$$

Тогда $(\sqrt{2}B_n)^{-1}\widetilde{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty$. В силу леммы 3.3 при $1 \leqslant p < 2$ и любом $\varepsilon > 0$

$$nB_n^{-p}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |Y_1| > \varepsilon B_n\} \to 0,\ n \to \infty, \tag{21}$$

то есть выполнены условия леммы 4 в [4], из которой следует равномерная интегрируемость последовательности $\{B_n^{-p}|\widetilde{X}_n|^p\}$. Пусть μ_n — медиана X_n. Так как

$$\mathbb{P}\{|X_n - A_n| \geqslant B_n\} \sim \mathbb{P}\{|\mathcal{N}(0,1)| \geqslant 1\} \leqslant \frac{1}{2},$$

то при достаточно больших n $|\mu_n - A_n| \leqslant B_n$. Отсюда с помощью (5) выводим

$$\mathbb{E}\{|X_n - A_n|^p, |X_n - A_n| > NB_n\} \leqslant 2^{p-1}\mathbb{E}\{|X_n - \mu_n|^p + B_n^p, |X_n - \mu_n| > (N-1)B_n\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^p\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_n|^p + B_n^p, |\widetilde{X}_n| \geqslant (N-1)B_n\},$$

так что из равномерной интегрируемости последовательности $\{B_n^{-p}|\widetilde{X}_n|^p\}$ следует равномерная интегрируемость $\{B_n^{-p}|X_n - A_n|^p\}$, $1 \leqslant p < 2$. Тогда

$$\frac{\mathbb{E}X_n - A_n}{B_n} \to 0,\ \frac{\mathbb{E}|X_n - \mathbb{E}X_n|^p}{B_n^p} \sim \frac{\mathbb{E}|X_n - A_n|^p}{B_n^p} \to \mathbb{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p,\ n \to \infty,$$

то есть $B_n \sim b_n(p)$. Пусть μ_1 — медиана X_1, а n таково, что $\varepsilon B_n > |\mu_1|$. Тогда если $|X_1 - \mu_1| > 2\varepsilon B_n - |\mu_1| > \varepsilon B_n$, то $|\mu_1|^p < |X_1 - \mu_1|^p$, и из (15) и (5) выводим

$$nb_n^{-p}(p)\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| > 2\varepsilon b_n(p)\} \leqslant 2nB_n^{-p}\mathbb{E}\{|X_1 - \mu_1|^p + |\mu_1|^p, |X_1 - \mu_1| > 2\varepsilon B_n - |\mu_1|\} \leqslant$$

$$\leqslant 4nB_n^{-p}\mathbb{E}\{|X_1 - \mu_1|^p, |X_1 - \mu_1| > \varepsilon B_n\} \leqslant 8nB_n^{-p}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant \varepsilon B_n\} \to 0,\ n \to \infty,$$

то есть выполняется условие $(\mathrm{L_p})$ и доказана импликация $a) \Rightarrow b)$.

$c) \Rightarrow a)$. В силу (2) $|\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m}) - \widetilde{X}_n(xb_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+1,n+m}(xb_{n+m})| \leqslant \varepsilon|\widetilde{X}_{n+m}(xb_n)| + N$, и, пользуясь леммой 5, получаем

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m}) - \widetilde{X}_n(xb_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+1,n+m}(xb_{n+m})|}{b_{n+m}} > \delta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon|\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m})| + N}{b_{n+m}} > \delta\right\} \leqslant \frac{2\varepsilon^2\widetilde{\sigma}^2_{n+m}(xb_{n+m}) + 2N^2}{b^2_{n+m}} = o_\varepsilon(1) + o_n(1),$$

так что $b_{n+m}^{-1}(\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m}) - \widetilde{X}_n(xb_{n+m}) - \widetilde{X}_{n+1,n+m}(xb_{n+m})) \to 0$ по вероятности и

$$\frac{\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_n(xb_{n+m}) + \widetilde{X}_{n+1,n+m}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}. \tag{22}$$

$r = r(n) \to \infty$ можно выбрать столь медленно растущей, что

$$b_{n+m+r} \sim b_{n+m}, \text{ и } b_{n+m}^{-1}\widetilde{X}_{n+1,n+r}(xb_{n+m}) \to 0, \ b_{n+m}^{-1}\widetilde{X}_{n+m+1,n+m+r}(xb_{n+m}) \to 0$$

по вероятности, и из (22) выводим

$$\frac{\widetilde{X}_{n+1,n+m}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}_{n+m+1,n+m+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_{n+1,n+m+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim}$$

$$\overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_{n+1,n+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}, \ n \to \infty, \tag{23}$$

и из (22) и (23) следует

$$\frac{\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_{n}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}. \tag{24}$$

В силу (1)

$$\left|\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{X}_{n}(xb_{n+m}) + \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}\right\} - \right.$$

$$\left. -\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{X}_{n}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}\right\}\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}\right\}\right| \leqslant 2\varphi^{\frac{1}{2}}(r) \to 0, \ n \to \infty,$$

и из (24) и того, что $\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}(xb_{n+m}) \overset{d}{=} \widetilde{X}_{m}(xb_{n+m})$, получаем теперь

$$\frac{\widetilde{X}_{n+m}(xb_{n+m})}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}'_{n}(xb_{n+m}) + \widetilde{X}'_{m}(xb_{n+m})}{b_{n+m}}. \tag{25}$$

Обозначим

$$\eta_j(n) = (\sqrt{2}b_n)^{-1}\widetilde{X}_{(j-1)n+1,jn}(b_{nk}), \ j = 1, ..., k.$$

Если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то из (25) и леммы 6а) получаем

$$(\sqrt{2}b_{nk})^{-1}\widetilde{X}_{kn}(b_{nk}) \overset{d}{\sim} \frac{\eta'_1(n) + ... + \eta'_k(n)}{\sqrt{k}}, \quad n \to \infty,$$

где $\eta'_1(n), ..., \eta'_k(n)$ независимы и $\eta'_j(n) \overset{d}{=} \eta_j(n), \ j = 1, ..., k,$

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbb{D}\left(\frac{\eta'_j(n)}{\sqrt{k}}\right) = \frac{\widetilde{\sigma}_n(b_n)}{2b_n^2} \to 1, \ n \to \infty.$$

В силу леммы 6, если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то $b_{nk} \sim \sqrt{k}b_n$, и последовательность $\{\eta_1(n)\} = \left\{(\sqrt{2}b_n)^{-2}\widetilde{X}_n^2(b_{nk})\right\}$ равномерно интегрируема. Отсюда следует, что для последовательности серий $\left\{\frac{\eta'_j(n)}{\sqrt{k}}, j = 1, ..., k, \ n = 1, 2, ...\right\}$ выполняется условие Линдеберга

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\eta'_j(n)}{\sqrt{k}}\right)^2, \left|\frac{\eta'_j(n)}{\sqrt{k}}\right| \geqslant \varepsilon\right\} = \mathbb{E}\left\{\eta_1^2(n), |\eta_1(n)| \geqslant \varepsilon\sqrt{k}\right\} \to 0,$$

так что

$$\frac{\widetilde{X}_{kn}(b_{nk})}{\sqrt{2}b_{nk}} \overset{d}{\sim} \frac{\eta_1'(n)+...+\eta_k'(n)}{\sqrt{k}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Пусть теперь $nk \leqslant m \leqslant (n+1)k$. Из правильного изменения $\{b_n\}$ легко выводится, что $b_m \sim b_{nk}$, а из (25) —

$$\frac{\widetilde{X}_m(b_m)}{\sqrt{2}b_m} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}'_{nk}(b_m)+\widetilde{X}'_{m-nk}(b_m)}{\sqrt{2}b_{nk}}.$$

Аналогично (20) легко показывается, что $\widetilde{\sigma}^2_{m-nk}(b_m) \leqslant 2b^2_{m-nk}+o(b^2_m)$, а $\{b_n\}$, как правильно меняющуюся функцию положительного порядка, без ограничения общности, можно считать неубывающей [2, с.26], так что

$$\mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_{m-nk}(b_m)| \geqslant \varepsilon b_{nk}\right\} \leqslant \frac{\widetilde{\sigma}_{m-nk}(b_m)}{b^2_{nk}} \leqslant \frac{2b_n^2+o(b^2_{nk})}{kb_n^2} \to 0,\ m\to\infty.$$

следовательно,

$$\frac{\widetilde{X}_m(b_m)}{\sqrt{2}b_m} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_{kn}(b_{nk})}{\sqrt{2}b_{nk}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad m\to\infty.$$

Далее

$$\mathbb{P}\{\widetilde{X}_m(b_m) \neq \widetilde{X}_m\} \leqslant 2m\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant b_m\} \to 0,\ m\to\infty,$$

поэтому

$$\frac{\widetilde{X}_m}{\sqrt{2}b_m} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_m(b_m)}{\sqrt{2}b_{nk}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad m\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{X_m-\mathbb{E}X_m}{b_m} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),\ m\to\infty.$$

[10, лемма 1].

a) $\Rightarrow$ *c*). Пусть $\dfrac{X_n-A_n}{B_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Из леммы 5 и доказательства *a*) $\Rightarrow$ *b*) следует, что $B_n \sim b_n(p),\ 1\leqslant p<2,\ (\sqrt{2}b_n(p))^{-1}\widetilde{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ и выполняется условие ($\mathrm{L_p}$). Тогда

$$n\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant \varepsilon b_n(p)\} \leqslant n(\varepsilon b_n(p))^{-p}\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1|>\varepsilon b_n(p)\} \to 0,\ n\to\infty \tag{26}$$

Далее $\mathbb{P}\{\widetilde{X}_n \neq \widetilde{X}_n(b_n(p))\} \leqslant n\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant \varepsilon b_n(p)\}$, так что

$$(\sqrt{2}b_n(p))^{-1}\widetilde{X}_n(b_n(p)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1). \tag{27}$$

В доказательстве *a*) $\Rightarrow$ *b*) показана равномерная интегрируемость последовательности $\{b_n^{-p}(p)|\widetilde{X}_n|^p\}$, следовательно, таковой же является последовательность $\{b_n^{-p}(p)|\widetilde{X}_n(p)|^p\}$, и из (27) следует $\sqrt{2}b_n(p) \sim \|\widetilde{X}_n\|_p \leqslant \|\widetilde{X}_n\|_2 = \sqrt{2}\sigma_n(b_n(p)$. Из определения b_n выводим $b_n \geqslant b_n(p)$, и из (26) вытекает теперь (3). В силу *c*) $\Rightarrow$ *a*) $\dfrac{X_n-\mathbb{E}X_n}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ и из теоремы о сходимости типов [1, с. 216] следует, что $b_n \sim B_n \sim b_n(p),\ n\to\infty$. Теорема доказана.

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962, 719 с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука. 1985.
3. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965, 524 с.
4. Гринь А.Г. О притяжении к нормальному закону функций от слабо зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2020. № 2(54). С. 24–39.
5. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и её применения, 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
6. Гринь А.Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин // Теория вероятностей и её применения, 1990. Т. 35, № 2. С. 255–270.
7. Bradley R. On the φ-mixind condition for stationary random sequences // Duke Math. J. 1980. V. 47. P. 421–433.
8. Peligrad M. On Ibragimov–Iosifescu conjecture for φ-mixing sequences // Stochastic Processes and their Applications. 1990. V .35. P. 293–308.
9. Гринь А.Г. О строгом притяжении функций от зависимых величин к нормальному закону // Математические структуры и моделирование. 2020. № 4(56). С. 5–19.
10. Гринь А.Г. Об асимптотически нормальных функциях от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 5–16.

NORMING SEQUENCES IN LIMIT THEOREMS FOR FUNCTIONS OF DEPENDENT VARIABLES

A.G. Grin

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. For symmetric functions of variables from stationary sequences satisfying the uniformly strong mixing condition, criteria of attraction to the normal law are obtained in terms of sequences by which scale normalization is carried out in limit theorems. The main results of the work generalize all known results of this type.

Keywords: Symmetric functions, uniformly strong mixing condition, norming sequences, attraction to normal law.

References

1. Loev M. Teoriya veroyatnostei. Moscow, IL Publ., 1962, 719 p. (in Russian)
2. Seneta E. Pravil'no menyayushchiesya funktsii. Moscow, Nauka Publ., 1985. (in Russian)
3. Ibragimov I.A. and Linnik Yu.V. Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p. (in Russian)

4. Grin' A.G. O prityazhenii k normal'nomu zakonu funktsii ot slabo zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 2(54), pp. 24–39. (in Russian)
5. Grin' A.G. Normiruyushchie posledovatel'nosti v predel'nykh teoremakh dlya slabo zavisimykh velichin. Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 285–300. (in Russian)
6. Grin' A.G. Ob oblastyakh prityazheniya dlya summ zavisimykh velichin. Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, 1990, vol. 35, no. 2, pp. 255–270. (in Russian)
7. Bradley R. On the φ-mixind condition for stationary random sequences. Duke Math. J., 1980, vol. 47, pp. 421–433.
8. Peligrad M. On Ibragimov–Iosifescu conjecture for φ-mixing sequences. Stochastic Processes and their Applications, 1990, vol .35, pp. 293–308.
9. Grin' A.G. O strogom prityazhenii funktsii ot zavisimykh velichin k normal'nomu zakonu. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 4(56), pp. 5–19. (in Russian)
10. Grin' A.G. Ob asimptoticheski normal'nykh funktsiyakh ot zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 4(52), pp. 5–16. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 03.03.2021