Математические структуры и моделирование
2021. № 3(59). С. 82–91

УДК 533.6
DOI 10.24147/2222-8772.2021.3.82-91

КОНТРПРИМЕР К ОДНОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЕ

С.П. Баутин
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: spbautin@mail.ru

Снежинский Физико-Технический Институт ональный Исследовательский Ядерный Университет МИФИ, Снежинск, Россия

Аннотация. Строится решение системы уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса. Для этого вводится формальный малый параметр ε и нужное решение представляется в виде бесконечного ряда по степеням этой новой переменной. При этом нулевой нулевое слагаемое ряда описывает однородный покоящийся газ. Следующее, первое слагаемое ряда удовлетворяет линейной однородной системе уравнений с частными производными. Решение этой линейной системы построено в виде бегущей со сверхзвуковой скоростью волны. Последующие коэффициенты ряда определяются рекуррентным образом при решении систем линейных неоднородных уравнений с частными производными в явном виде с помощью разделения переменных. Доказана локальная по времени сходимость приведённого бесконечного ряда по степеням малого параметра. Это математическое решение системы уравнений газовой динамики и даёт пример гладких возмущений, распространяющихся в газе в течении некоторого времени со сверхзвуковой скоростью. Обсуждаются математические и физические причины полученного факта.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, аналитические решения.

Система уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса

В газовой динамике из соотношений на сильном разрыве — на ударной волне — следует [1], что течение газа перед ударной волной дозвуковое, а за ударной волной сверхзвуковое. Исходя из этого многие предполагают и обратное, то есть полагают справедливой гипотезу: если течение сверхзвуковое, то оно обязательно имеет разрыв первого рода. В данной работе построен пример конкретного течения, опровергающий эту гипотезу.

Система уравнений газовой динамики в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$ при учёте действия силы Кориолиса имеет следующий вид [2, 3]:

$$
\begin{cases}
c_t + v_1 c_x + v_2 c_y + v_3 c_z + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c\left(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}\right) = 0, \\[2ex]
v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_x = a v_2 - b v_3, \\[2ex]
v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_y = -a v_1, \\[2ex]
v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_z = b v_1.
\end{cases}
\qquad (1)
$$

Здесь: $p = \rho^\gamma/\gamma$ — давление газа; ρ — плотность газа; $\gamma = \mathrm{const} > 1$ — показатель политропы идеального газа; $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox, Oy, Oz; $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$; $\mathbf{\Omega} = (0; \Omega\cos\psi; \Omega\sin\psi)$ — вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z), вращающейся вместе с Землёй; $a = 2\Omega\sin\psi$; $b = 2\Omega\cos\psi$.

В системе (1) с помощью масштабных значений скорости, скорости звука, времени и расстояния: u_{00}, c_{00}, t_{00}, x_{00} — стандартным образом введены безразмерные переменные и при этом положено, что $u_{00} = c_{00}$; $t_{00} = x_{00}/u_{00}$.

В системе (1), в отличии от [2, 3], не учитывается действие силы тяжести. Это возможно при исследовании течений, газодинамические параметры которых с изменением высоты меняются незначительно.

Постановка и вид решения характеристической задачи Коши

Предполагается, что решение системы (1) зависит от дополнительной независимой переменной ε. Задаются следующие условия:

$$
\begin{cases}
c|_{\varepsilon=0} = 1; \\
v_1|_{\varepsilon=0} = 0; \\
v_2|_{\varepsilon=0} = 0; \\
v_3|_{\varepsilon=0} = 0.
\end{cases}
\qquad (2)
$$

$$
\begin{cases}
c|_{t=0} = 1 + \varepsilon c^o_{10}\cos x; \\
v_1|_{t=0} = 0; \\
v_2|_{t=0} = \varepsilon v^o_{210}\sin x; \\
v_3|_{t=0} = \varepsilon v^o_{310}\sin x,
\end{cases}
\qquad (3)
$$

где c^o_{10}, v^o_{210}, v^o_{310} — константы.

Значение введённой переменной ε фактически определяет амплитуду начальных при $t = 0$ возмущений в однородном покоящемся газе.

Система (1) не содержит производных по переменной ε и поэтому координатная плоскость $\varepsilon = 0$ формально является для системы (1) характеристикой кратности четыре [4–6].

Ситуация, близкая, с точки зрения уравнений с частными производными, имеет место для трёхмерных нестационарных течений сплошной среды: свободная граница, через которую среда непрерывно примыкает к вакууму, является характеристикой кратности соответственно четыре и пять в случае изэнтропических и неизэнтропических течений [6–8].

Условия (2) являются начальными условиями при построении решения системы (1) в виде бесконечного степенного ряда

$$\mathbf{U}(\varepsilon, t, x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(t, x, y, z)\frac{\varepsilon^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(t, x, y, z) = \left.\frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Условия (3) являются краевыми условиями, задающими значения коэффициентов ряда (4) при $t = 0$:

$$\mathbf{U}_0|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}_1|_{t=0} = \begin{pmatrix} c^o_{10}\cos x \\ 0 \\ v^o_{210}\sin x \\ v^o_{310}\sin x \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}_k|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Для поставленной задачи выполняется следующее:

1) система уравнений газовой динамики имеет тип Ковалевской [6] и разрешена относительно производных по времени;

2) уравнения системы (1) и условия (2), (3) задаются аналитическими функциями;

3) условия (2), (3) согласованы при $\varepsilon = t = 0$;

4) при подстановке условий (2) в систему (1) при $\varepsilon = 0$ все уравнения системы (1) выполняются тождественно, что обеспечивает выполнение необходимых условий разрешимости характеристической задачи Коши (1)–(3) [4–6]. Это имеет место, поскольку функции (2) задают точное решение системы (1).

С учётом сказанного задача (1)–(3) является характеристической задачей Коши стандартного вида [6], и поэтому у неё имеется единственное аналитическое решение в некоторой окрестности заданной точки ($\varepsilon = 0$, $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) и ряд (4) сходится в окрестности этой точки; x_0, y_0, z_0 — константы. Эти факты обеспечивает соответствующий аналог теоремы Ковалевской [4–6].

Построение коэффициентов ряда (4)

Коэффициент $\mathbf{U}_0$ задаётся формулами (2).

Система (1) дифференцируется по переменной ε, полагается $\varepsilon = 0$ и учитывается вид $\mathbf{U}_0$. Получается следующая однородная линейная система уравнений с частными производными для компонент вектора $\mathbf{U}_1$:

$$\begin{cases} c_{1t} + \dfrac{(\gamma - 1)}{2}\Big(v_{1,1_x} + v_{2,1_y} + v_{3,1_z}\Big) = 0; \\[2ex] v_{1,1_t} + \dfrac{2}{(\gamma - 1)} c_{1x} = a v_{2,1} - b v_{3,1}; \\[2ex] v_{2,1_t} + \dfrac{2}{(\gamma - 1)} c_{1y} = -a v_{1,1}; \\[2ex] v_{3,1_t} + \dfrac{2}{(\gamma - 1)} c_{1z} = b v_{1,1}. \end{cases} \tag{5}$$

Частное решение системы (5) ищется в виде

$$\begin{aligned} & c_1(t,x) = c_{10}(t)\cos x; \quad v_{1,1}(t,x) = v_{110}(t)\sin x; \\ & v_{2,1}(t,x) = v_{210}(t)\sin x; \quad v_{3,1}(t,x) = v_{310}(t)\sin x; \end{aligned} \tag{6}$$

где коэффициенты $c_{10}(t)$, $v_{110}(t)$, $v_{210}(t)$, $v_{310}(t)$ — пока неизвестные функции от времени. Чтобы их найти, представление (6) подставляется в систему (5):

$$\begin{cases} c'_{10}(t)\cos x + \dfrac{(\gamma - 1)}{2} v_{110}(t)\cos x = 0; \\[2ex] v'_{110}(t)\sin x - \dfrac{2}{(\gamma - 1)} c_{10}(t)\sin x = a v_{210}(t)\sin x - b v_{310}(t)\sin x; \\[2ex] v'_{210}(t)\sin x = -a v_{110}(t)\sin x; \\[2ex] v'_{310}(t)\sin x = b v_{110}(t)\sin x; \end{cases}$$

в которой переменные разделяются. В результате для искомых коэффициентов, зависящих от времени, получилась следующая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
c'_{10}(t) + \dfrac{(\gamma-1)}{2} v_{110}(t) = 0; \\[2ex]
v'_{110}(t) - \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_{10}(t) = a v_{210}(t) - b v_{310}(t); \\[2ex]
v'_{210}(t) = -a v_{110}(t); \\[2ex]
v'_{310}(t) = b v_{110}(t).
\end{cases}
\tag{7}
$$

Решение этой системы ищется в стандартном виде:

$$
\begin{cases}
c_{10}(t) = c^o_{10} e^{\lambda t}; \\[2ex]
v_{110}(t) = v^o_{110} e^{\lambda t}; \\[2ex]
v_{210}(t) = v^o_{210} e^{\lambda t}; \\[2ex]
v_{310}(t) = v^o_{310} e^{\lambda t};
\end{cases}
$$

c^o_{10}, v^o_{110}, v^o_{210}, v^o_{310} — const.

Для показателя λ получается следующее характеристическое уравнение:

$$
\lambda^2 \left(\lambda^2 + 1 + a^2 + b^2\right) = 0 \tag{8}
$$

с корнями

$$
\lambda_{1,2} = 0; \quad \lambda_{3,4} = \pm v_* \cdot i; \quad v_* = \sqrt{1 + a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 4\Omega^2} > 1.
$$

Нулевые значения корней уравнения (8) приводят к стационарному решению системы (7).

Комплексные корни уравнения (8) приводят к следующему решению системы (5):

$$
\begin{cases}
c_1(t,x) = c^o_{10} \cos(v_* t) \cos(x); \\[2ex]
v_{1,1}(t,x) = v^o_{110} \sin(v_* t) \sin(x); \\[2ex]
v_{2,1}(t,x) = v^o_{210} \cos(v_* t) \sin(x); \\[2ex]
v_{3,1}(t,x) = v^o_{310} \cos(v_* t) \sin(x),
\end{cases}
\tag{9}
$$

где

$$c_{10}^o = \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{1}{v_*} v_{110}^o; \quad v_{210}^o = \frac{a}{v_*} v_{110}^o; \quad v_{310}^o = -\frac{b}{v_*} v_{110}^o;$$

v_{110}^o — произвольное число. И выбором конкретного значения константы v_{110}^o однозначно определятся значения констант c_{10}^o, v_{210}^o, v_{310}^o.

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что решение (9) системы (5) является бегущей волной:

$$\begin{cases} c_1(t,x) = \frac{1}{2} c_{10}^o \left[\cos(x + v_* t) + \cos(x - v_* t)\right]; \\ v_{1,1}(t,x) = \frac{1}{2} v_{110}^o \left[\cos(x - v_* t) - \cos(x + v_* t)\right]; \\ v_{2,1}(t,x) = \frac{1}{2} v_{210}^o \left[\cos(x - v_* t) + \cos(x + v_* t)\right]; \\ v_{3,1}(t,x) = \frac{1}{2} v_{310}^o \left[\cos(x - v_* t) - \cos(x + v_* t)\right]; \end{cases}$$

зависящей от двух таких комбинаций переменных

$$x \pm v_* t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью v_*, значение которой больше единицы, если $\Omega \neq 0$.

Следовательно, скорость распространения построенных бегущих волн больше, чем скорость звука в решении $\mathbf{U}_0$ системы уравнений газовой динамики.

Естественно, что для системы (5) можно строить и другие частные решения с использованием гармоник и по другим пространственным переменным, как в случае зависимости только от какой-то одной пространственной переменной, так и в случае одновременной зависимости решений от многих пространственных переменных. Для этого соответствующим образом надо задавать начальные условия (3).

Далее система (1) дифференцируется k раз ($k \geqslant 2$) по переменной ε, подставляются значение $\varepsilon = 0$ и уже найденные коэффициенты $\mathbf{U}_n$, $0 \leqslant n \leqslant k-1$. В итоге получается следующая линейная неоднородная система уравнений с частными производными для компонент вектора $\mathbf{U}_k$, $k = 2, 3, ...$:

$$\begin{cases} c_{kt} + \frac{\gamma - 1}{2}(v_{1,k_x} + v_{2,k_y} + v_{3,k_z}) = F_{1k}; \\ v_{1,k_t} + \frac{2}{\gamma - 1} c_{kx} = a v_{2,k} - b v_{3,k} + F_{2k}; \\ v_{2,k_t} + \frac{2}{\gamma - 1} c_{ky} = -a v_{1,k} + F_{3k}; \\ v_{3,k_t} + \frac{2}{\gamma - 1} c_{kz} = b v_{1,k} + F_{4k}. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь

$$F_{1k} = -\sum_{n=1}^{k-1} C_k^n \Bigg[v_{1,n} c_{k-n_x} + v_{2,n} c_{k-n_y} + v_{3,n} c_{k-n_z} +$$
$$+ \frac{\gamma-1}{2} c_n \left(v_{1,k-n_x} + v_{2,k-n_y} + v_{2,k-n_z} \right) \Bigg] ;$$

$$F_{2k} = -\sum_{n=1}^{k-1} C_k^n \left(v_{1,n} v_{1,k-n_x} + v_{2,n} v_{1,k-n_y} + v_{3,n} v_{1,k-n_z} + \frac{2}{\gamma-1} c_n c_{k-n_x} \right) ;$$

$$F_{3k} = -\sum_{n=1}^{k-1} C_k^n \left(v_{1,n} v_{2,k-n_x} + v_{2,n} v_{2,k-n_y} + v_{3,n} v_{2,k-n_z} + \frac{2}{\gamma-1} c_n c_{k-n_y} \right) ;$$

$$F_{4k} = -\sum_{n=1}^{k-1} C_k^n \left(v_{1,n} v_{3,k-n_x} + v_{2,n} v_{3,k-n_y} + v_{3,n} v_{3,k-n_z} + \frac{2}{\gamma-1} c_n c_{k-n_z} \right) .$$

Очевидно, что главная часть системы (10) для коэффициентов с номером k совпадает с главной частью системы (5) для коэффициентов с номером один, поскольку в слагаемые F_{jk}, $j = 1, .., 4$ входят коэффициенты ряда (4), имеющие номера, строго меньшие, чем k.

Для системы (10) начальные условия при $t = 0$ будут нулевыми, поскольку они получаются после дифференцирования k раз ($k \geqslant 2$) по ε условий (3). Получившаяся задача Коши для системы (10) имеет единственное аналитическое решение.

В силу линейности систем (10) и из-за только квадратичной зависимости F_{jk} от коэффициентов ряда (4) искомые $\mathbf{U}_k$ строятся в явном виде. Они являются многочленами от времени, пространственных и временны́х гармоник, степени которых линейно зависят от k — номера коэффициента ряда (4). Поэтому [6] область сходимости ряда (4) не зависит от переменной x и задаётся неравенством

$$M|\varepsilon||t| < 1; \quad M = \text{const} > 0.$$

Таким образом, получено, что вне зависимости от конкретного вида представления аналитических коэффициентов $\mathbf{U}_k(t, x, y, z)$, $k \geqslant 2$ решение задачи (1)–(3) обладает тем свойством, что заведомо некоторое время

$$0 \leqslant t_1 < \frac{1}{M|\varepsilon|}$$

гладкие возмущения, порождённые начальными условиями (3), будут распространяться со скоростью $v_* > 1$. Это определяется тем, что эти неоднородности в представлении по степеням переменной ε имеют следующий вид:

$$\mathbf{U}(\varepsilon, t, x, y, z) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1(t, x)\varepsilon + \mathbf{U}_\infty(\varepsilon, t, x, y, z)\varepsilon^2,$$

где аналитическая функция $\mathbf{U}_\infty$ есть «хвост» сходящегося ряда (4)

$$\mathbf{U}_\infty(\varepsilon, t, x, y, z) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{U}_k(t, x, y, z) \frac{\varepsilon^{k-2}}{k!}.$$

Из вида коэффициента $c_1(t,x)$ следует, что в тех точках пространства, где $\cos x < 0$, локальное значение скорости звука газа меньше единицы. Но тем не менее, в этих точках пространства возмущения распространяются со скоростью, большей единицы.

Тем самым построенное при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ в виде ряда (4) решение характеристической задачи Коши (1)–(3) опровергает гипотезу о том, что сверхзвуковые возмущения обязательно имеют сильный разрыв.

Естественно, что область сходимости ряда (4) является локальной по времени. И, конечно, имеется момент времени $t_* > 0$ больший, чем t_1, начиная с которого ряд (4) будет расходиться. И, следовательно, в течении газа при $t = t_*$ возникнет особенность, приводящая к появлению сильного разрыва — ударной волны.

Выводы

На конкретном примере для системы уравнений газовой динамики показано, что сумма

$$\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1\varepsilon$$

приближённо передаёт решение нелинейной системы уравнений с частными производными. А слагаемое $\mathbf{U}_1\varepsilon$ одновременно является решением линейной системы, получающейся из исходной нелинейной системы, известной процедурой линеаризации на заданном точном решении. Тем самым дано математическое обоснование процедуры линеаризации подобных задач для нелинейных уравнений с частными производными.

С точки зрения математики причина того, что гладкая неоднородность может распространяться быстрее, чем распространяется звуковая характеристика, обуславливается следующим. Для определения скорости распространения звуковых характеристик используется только главная часть исходной нелинейной системы уравнений с частными производными. То есть используются только матрицы A_i из квазилинейной системы

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = F(\mathbf{x}, \mathbf{U}),$$

а также значения искомых функций, заданных на характеристической поверхности. А на решение $\mathbf{U}_1$ оказывает влияние не только главная часть исходной системы, но и линейная по $\mathbf{U}$ часть функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{U})$. Именно из-за наличия в исходной системе (1) слагаемых

$$av_2; \quad bv_3; \quad av_1; \quad bv_1$$

у линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых функций $c_{10}(t)$, $v_{110}(t)$, $v_{210}(t)$, $v_{310}(t)$, стоящих в представлениях (6), среди корней характеристической системы имеются чисто мнимые корни, модуль которых есть константа v_*, большая единицы.

С точки зрения физики причиной того, что имеется пример гладкого течения, у которого в течение некоторого времени небольшие гладкие неоднородности распространяются со сверхзвуковой скоростью, является то, что течение газа рассматривается в условиях действия внешней силы, зависящей от искомого решения.

Особо отметим, что специальные начальные данные породили такое движение газа, которое, оставаясь некоторое время гладким, распространяется быстрее локальной скорости звука.

Заключение

В работе в виде бесконечного сходящегося ряда построено частное решение системы уравнений газовой динамики. Это решение описывает распространение в течение некоторого времени в газе гладких возмущений со сверхзвуковой скоростью. И тем самым опровергает газодинамическую гипотезу о том, что со сверхзвуковой скоростью могут распространяться только разрывные возмущения — течения с ударными волнами.

Предложенный подход к построению решений нелинейных систем уравнений с частными производными обосновывает известную процедуру линеаризации нелинейной системы на заданном точном решении. А именно: сумма заданного точного решения и решения линеаризованной задачи есть сумма двух первых слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего решение исходной нелинейной системы уравнений с частными производными.

Литература

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
2. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
3. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург : УрГУПС, 2020. 400 с.
4. Баутин С.П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Сборник «Численные методы механики сплошной среды». ВЦ СО АН СССР. 1973. Т. 4, № 1. С. 3–15.
5. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
7. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
8. Баутин С.П, Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев П.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск : Наука, Екатеринбург : УрГУПС, 2015. 191 с.

A COUNTEREXAMPLE TO A GAS-DYNAMIC HYPOTHESIS

S.P. Bautin
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: spbautin@mail.ru

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, Russia

Abstract. The solution of the system of equations of gas dynamics under the action of the Coriolis force is constructed. To do this, a formal small parameter ε is introduced and the desired solution is represented as an infinite series in powers of this new variable. In this case, the zero zero term of the series describes homogeneous stationary gas. The next, first term of the series satisfies a linear homogeneous system of partial differential equations. The solution of this linear system is constructed in the form of a wave traveling at supersonic speed. The subsequent coefficients of the series are determined recursively when solving systems of linear inhomogeneous partial differential equations explicitly using the separation of variables. The local time convergence of the reduced infinite series with respect to the powers of a small parameter is proved. This is a mathematical solution of the system of equations of gas dynamics and gives an example of smooth perturbations propagating in a gas for some time at supersonic speed. The mathematical and physical reasons for this fact are discussed.

Keywords: system of gas dynamics equations, Coriolis force, analytical solutions..

References

1. Ovsyannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki. Izhevsk, In-t komp'yuternykh issledovanii, 2003, 336 p. (in Russian)
2. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
3. Bautin S.P., Krutova I.Yu., and Obukhov A.G. Gazodinamicheskaya teoriya voskhodyashchikh zakruchennykh potokov. Ekaterinburg, UrGUPC Publ., 2020. 400 p. (in Russian)
4. Bautin S.P. Analiticheskie resheniya zadachi o dvizhenii porshnya. Sbornik "Chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy", VTs SO AN SSSR, 1973, vol. 4, no. 1, pp. 3–15. (in Russian)
5. Bautin S.P. Khapaktepisticheskaya zadacha Koshi dlya kvazilineinoi analiticheskoi sistemy. Diffepentsial'nye upavneniya, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 2052–2063. (in Russian)
6. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p. (in Russian)
7. Bautin S.P. and Deryabin S.L. Matematicheskoe modelirovanie istecheniya ideal'nogo gaza v vakuum. Novosibirsk, Nauka Publ., 2005, 390 p. (in Russian)
8. Bautin S.P, Deryabin S.L., Mezentsev A.V., and Chuev P.P. Nachal'no-kraevye zadachi dlya modelirovaniya dvizheniya sploshnoi sredy s osobennostyami na svobodnoi granitse. Novosibirsk, Nauka Publ., Ekaterinburg, UrGUPC Publ. 2015, 191 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 05.07.2021