Математические структуры и моделирование 2021. № 3(59). С. 25–27

УДК 517.954
DOI 10.24147/2222-8772.2021.3.25-27

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИСТА МЁБИУСА

В.П. Голубятников
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Военный институт им. И.К. Яковлева войск национальной гвардии РФ

Аннотация. Доказано существование и единственность решения задачи Дирихле для листа Мёбиуса с локально евклидовой метрикой.

Ключевые слова: лист Мёбиуса, задача Дирихле, ряды Фурье.

Введение

Рассматривается лист Мёбиуса M со стандартной локально евклидовой метрикой

$$M = [0, \pi] \times [-1, +1], \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad -1 \leqslant p \leqslant +1$$

и со склейкой по изометрии $(0, p) \equiv (\pi, -p)$. Границу ∂M будем отождествлять с окружностью, параметризованной углом $\psi \in [0, 2\pi]$. Ввиду того, что при замене направления координатной оси на противоположное производные чётных порядков по соответствующей переменной не изменяются, и в силу локальной евклидовости метрики на таком листе Мёбиуса дифференциальный оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 \varphi} + \dfrac{\partial^2}{\partial^2 p}$ корректно на нём определён.

Будем решать на многообразии M задачу Дирихле: найти функцию $u = u(\varphi, p)$ такую, что

$$\Delta u = 0, \quad u(\varphi, +1) = f(\varphi), \quad u(\varphi, -1) = f(\varphi + \pi), \tag{1}$$

где $f(\psi)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, заданная на ∂M.

Подобным же образом для M формулируются задача Неймана и другие краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. В работе [1] с помощью разложений в ряды Фурье рассматривалась задача для волнового уравнения на листе Мёбиуса с граничными условиями Неймана. В работе [2] изучались собственные функции оператора Лапласа на бесконечном листе Мёбиуса, см. также [3].

Рассмотрим разложения в ряды Фурье чётной и нечётной частей краевых условий в (1)

$$f^+(\psi) = \frac{f(\psi) + f(\psi + \pi)}{2} = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2m} \cos 2m\psi + b_{2m} \sin 2m\psi) \tag{2}$$

и

$$f^-(\psi) = \frac{f(\psi) - f(\psi+\pi)}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_{2m+1}\cos(2m+1)\psi + b_{2m+1}\sin(2m+1)\psi\right). \quad (3)$$

Лемма 1. *Существует по крайней мере одна такая точка* $\varphi_0 \in [0,\pi]$*, что* $f(\varphi_0) = f(\varphi_0+\pi)$.

Доказательство. Если $f(0) - f(\pi) > 0$, то $f(\pi) - f(2\pi) < 0$, и лемма следует из непрерывности функции $f(\varphi) - f(\varphi+\pi)$. ■

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_0 = 0$. Это облегчает дальнейшие вычисления, поскольку $f^-(\varphi_0) = f^-(\varphi_0+\pi) = 0$.

Решение $u = u(\varphi, p)$ задачи Дирихле (1) представим в виде суммы $u = u^+ + u^-$ двух гармонических функций, где $u^+ = u^+(\varphi, p)$ является решением задачи Дирихле с краевыми условиями f^+, а $u^-(\varphi, p)$ — решением задачи Дирихле с нечётными краевыми условиями f^-.

Так же, как и в [4], решение задачи Дирихле u^+ с чётными граничными условиями $u^+(\varphi,p)|_{\partial M} = f^+$ будем искать в виде сумм произведений $A^+(\varphi)\cdot B^+(p)$, поскольку в уравнении $\Delta u = 0$ на листе Мёбиуса M переменные разделяются:

$$\frac{\partial^2 A^+}{\partial\varphi^2} + \lambda^2 A^+ = 0; \quad \frac{\partial^2 B^+}{\partial p^2} = \lambda^2 B^+.$$

Из π-периодичности функции $f^+(\varphi)$ следует, что $\lambda = \pm 2m$ — чётное целое число, поэтому $u^+(\varphi,p)$ представимо в виде $\sum_m A_{2m}(\varphi)\cdot B_{2m}(p)$, где

$$A_{2m}(\varphi) = C_{2m}\cos 2m\varphi + D_{2m}\sin 2m\varphi \quad \text{и} \quad B_{2m}(p) = \exp(2mp) + \exp(-2mp). \quad (4)$$

С точностью до множителей $[\exp(2m) + \exp(-2m)]$ постоянные C_{2m} и D_{2m} совпадают с коэффициентами Фурье в (2).

Аналогично, решение задачи Дирихле (1) с нечётными граничными условиями f^- можно найти в виде ряда произведений $A_{2m+1}(\varphi)\cdot B_{2m+1}(p)$, где

$$A_{2m+1}(\varphi) = C_{2m+1}\cos(2m+1)\varphi + D_{2m+1}\sin(2m+1)\varphi$$
$$\text{и} \quad B_{2m+1}(p) = \exp((2m+1)p) - \exp(-(2m+1)p), \quad (5)$$

так как по построению M имеем $A_{2m+1}(\varphi+\pi)\cdot B_{2m+1}(p) = A_{2m+1}(\varphi)\cdot B_{2m+1}(-p)$. Здесь постоянные C_{2m+1}, D_{2m+1} с точностью до множителей $[\exp(2m+1) - \exp(-2m-1)]$ совпадают с коэффициентами Фурье в (3).

Поскольку метрика на M локально евклидова, для гармонических функций на таком листе Мёбиуса выполняются теорема о среднем и вытекающий из неё принцип максимума, см. [5]. Следовательно, построенное в (4) и (5) решение $u = u^+ + u^-$ задачи Дирихле (1) единственно, как и в классическом случае для круга и для других плоских областей, см. [4].

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Для всякой непрерывной* 2π*-периодической функции* $f(\psi)$ *существует единственное решение задачи Дирихле* (1).

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность В.А.Селезнёву за полезные обсуждения.

Литература

1. Шалагинов М.Ю., Иванов М.Г., Долгополов М.В. Задачи с оператором Лапласа на топологических поверхностях // Вестник Самарского государственного технического университета. 2011, № 2(23), С. 243–250.
2. Bérard P., Helffer B., Kiwan R. Courant-sharp property for Dirichlet eigenfunctions on the Möbius strip. 2020. arXiv: 2005.01175v3.
3. Helffer B., Sundqvist M.P. Nodal domains in the square — the Neumann case // Moscow Mathematical Journal. 2015. V. 15, no. 3. P. 455–495.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : МГУ, 1999. 735 с.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.–Л. : Государственное издание технико-теоретической литературы, 1951. 525 с.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE MÖBIUS STRIP

V.P. Golubyatnikov
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk, Russia

Yakovlev military institute, Novosibirsk, Russia

Abstract. We show existence and uniqueness of solution to the Dirichlet Problem for the Möbius strip with locally Euclidean metric.

Keywords: Möbius strip, Dirichlet problem, Fourier series.

References

1. Shalaginov M.Yu., Ivanov M.G., and Dolgopolov M.V. Zadachi s operatorom Laplasa na topologicheskikh poverkhnostyakh. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2011, no. 2(23), pp. 243–250. (in Russian)
2. Bérard P., Helffer B., and Kiwan R. Courant-sharp property for Dirichlet eigenfunctions on the Möbius strip. 2020. arXiv: 2005.01175v3.
3. Helffer B. and Sundqvist M.P. Nodal domains in the square — the Neumann case. Moscow Mathematical Journal, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 455–495.
4. Tikhonov A.N. and Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. Moscow, MGU Publ., 1999, 735 p. (in Russian)
5. Kurant R. and Gil'bert D. Metody matematicheskoi fiziki. vol. 2. Moscow – Leningrad, Gosudarstvennoe izdanie tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1951, 525 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 05.07.2021