Математические структуры и моделирование
2022. № 2(62). С. 66–75

УДК 539.1
DOI 10.24147/2222-8772.2022.2.66-75

К 110-ЛЕТИЮ А.Д. АЛЕКСАНДРОВА И ВКЛАД В ХРОНОМЕТРИЮ

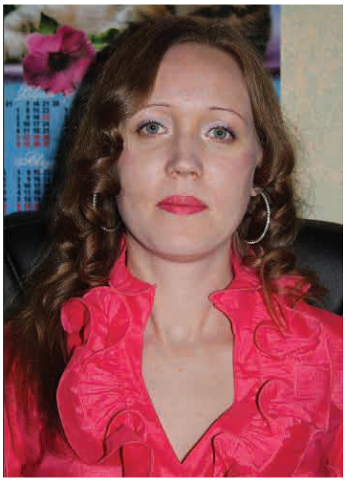
А.В. Левичев[1,2]
профессор, д.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: alevichev@gmail.com
Ю.Ю. Клевцова[3,4]
к.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: yy_klevtsova@ngs.ru
А.Ю. Пальянов[2]
д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: palyanov@iis.nsk.su

[1]Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева
[2]Институт систем информатики СО РАН им. А.П. Ершова
[3]Сибирский региональный научно-исследовательский гидрометеорологический институт, Новосибирск, Россия
[4]Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск, Россия

Аннотация. Приведены воспоминания А.В. Левичева о своём Учителе – А.Д.Александрове. Элементы теории Сигала применены для исследования некоторых свойств хронометрического протона.

Ключевые слова: А.Д. Александров, Хронометрия Сигала, волновая функция протона, радиусе протона.

1. Введение



Ю.Ю. Клевцова

Наша статья посвящена 110 –й годовщине со дня рождения академика А.Д. Александрова (1912–1999), который (помимо других своих научных свершений) инициировал хроногеометрические исследования в СССР. На протяжении нескольких десятилетий он был заслуженным лидером (не только в СССР, но и во всём мире) этого научного направления. Первый автор был (в 70-х годах прошлого века) аспирантом А.Д. Александрова. В [1, с.246–248] и в [2] уже были опубликованы воспоминания Левичева о своём Учителе. В Секции 2 (ниже) приведены другие, связанные с А.Д. Александровым, жизненные эпизоды.

Наличие оригинальной (с научной точки зрения) части нашей статьи – Секции 3, мы мотивируем следующим высказыванием А.Д. Александрова: «Наилучшим признанием роли Учителя является вклад Ученика: отыскание (или хотя бы попытка такового) им нового научного знания».

Так случилось, что значительная часть академической карьеры А.В. Левичева переплелась с научной деятельностью другого известного хроногеометра – Ирвинга Сигала (США, 1918-1998). Мало в каких российских библиотеках имеется его книга [3]. В [2] была приведена глава из [3], в которой Сигал изложил свои взгляды на Хроногеометрию.

«Свою науку» Сигал назвал так: Хронометрия. В Секции 3 (ниже) совместными усилиями всех трёх соавторов Хронометрия применяется к физике элементарных частиц. Получившиеся (математически) результаты интерпретированы в терминах физических свойств хронометрического протона.

2. В «силовом поле» Александрова: воспоминания о нескольких жизненных эпизодах и об их последствиях

В [1, с.271] мне (в этой секции изложение идёт «от первого лица») было приятно прочесть про себя: «Так формировался контингент учеников А.Д. Александрова. Особенно ценил он тех, кто сам находил серьёзную задачу или тему исследований (так было с темой дипломной работы А.В. Левичева)». Так оно и было: я сам поставил себе задачу, но, конечно же, в духе тех исследований, которые неоднократно докладывались, разными авторами, на семинаре Хроногеометрия. Где-то в мае 1974 года я рассказал то, что у меня получилось: это был одномерный случай, но, тем не менее, доклад мой был высоко оценён Руководителем.

А.В. Левичев

Вскоре, А.Д. улетел в Ленинград, а я в следующие 2-3 недели усилил (так мне казалось) свой текст. Как же мне его А.Д. показать? Оказалось – просто! В начале июля 1974 года (но ещё до дня защиты диплома) в Калининграде («Западном», т. е. в бывшем Кенигсберге), на прекрасных грунтовых кортах, было запланировано проведение финальной части Спартакиады народов РСФСР по теннису. Участвовало 24 сборных, я — первый номер Новосибирской области. Лечу из Нск-а (отдельно от всех) туда через Ленинград.

Встречаюсь с А.Д. в Ленинградском Отделении Математического Института (на Фонтанке), в надежде получить его одобрение. Показываю ему текст. А.Д., вчитавшись в добавленную часть, «выпалил»: «Что за чушь?!» Хорошо, что я сидел (на стуле)... Вот так «усилил»... Он сказал, чтобы я просто оставил тот текст, с которым он уже знаком. Я послушался, конечно, а с тех пор даже ни разу не задумывался: то ли он увидел, что там ерунда (я считал, что усилил работу, так как теперь её оригинальная часть была сформулирована не только в размерности один). А может он подумал (вполне резонно, как я сейчас понимаю), что нет времени с этой новой частью разбираться (ведь он – в Ленинграде, а мне – на турнир лететь) и что первоначальный текст – уже на «отлично». Так, в итоге, и вышло.

Следующий эпизод относится ко времени моей работы над кандидатской диссертацией, т. е. речь идёт о годах (примерно) с 1975 по 1977. Мне потребовалось немало времени, а главное – **интенсивных** (для моих средних математических способностей даже **предельных** – я не на комплименты здесь напрашиваюсь, просто считаю, что моя (или даже не совсем «моя»?) сила как математика **не в этом** состоит; чем-то похожим объясняются и мои теннисные достижения); повторяю: от меня потребовались интенсивные умственные усилия, чтобы детально разобраться в двух статьях А.Д., вышедших в 1974 году в ДАН СССР. В них сформулировано много результатов, «научная плотность» текста – раз в 10 выше, чем в моих статьях... Нечто подобное я испытывал и позднее – разбирая и пытаясь «переварить» статьи Сигала (а там ещё добавлялся его весьма своеобразный английский – намного более витиеватый, чем у большинства других «носителей языка»). И что Вы думаете? – Посчастливилось найти у А.Д. недочёт! О чём я ему сразу сообщил. Над моим замечанием он, конечно, поразмышлял – ведь мало приятного, когда у тебя в опубликованной статье неверное утверждение находят, пусть даже и вспомогательное. Так что уже в моей статье 1977 года (тоже в ДАН СССР, он же её туда и представил!) была (как бы мимоходом) такая фраза: «Этот пример показывает, что частная теорема 4 в * (идёт ссылка на ту статью А.Д.) неверна». Мне вот что **сейчас** думается в связи с этим. Получается, что не только **достижения** такого мэтра как А.Д. имеют значение (воодушевляют его учеников), но и его **промахи** (оставляющие ученикам «место» для их исправления). Вспоминается эпизод (в исполнении Глузского) в фильме «Монолог» об учёных, которые «пробивают стены», и об их коллегах, которые после это «место действия подчищают».

У меня сейчас есть и версия, объясняющая, как это могло случиться. Версия основана на рассказе А.Д. (мне и ещё 2-3 гостям – он нас провожал после приёма у себя в коттедже, на Золотодолинской). Рассказал, стоя на крыльце. Завершал, говорит, статью для «Докладов», а тут уже вот-вот должна подъехать машина, чтобы в аэропорт Толмачёво его везти. В этот час он и завершил написание текста статьи, остался доволен, как всё получилось, распорядился, чтобы отправили, а сам – в аэропорт – и улетел. Короче говоря, А.Д. поторопился. Может отсюда и замеченная мной «ошибочка» в том тексте. Мне же, как молодому учёному, это сослужило добрую службу: ещё «один параграф» для кандидатской диссертации. В 1978 году её текст был готов (руководитель – А.Д.), а в 1979 году я её защитил.

Примерно с середины 1984 года у меня начали складываться соображения по структуре докторской диссертации. С 1977 года я работал преподавателем в Куйбышевском университете и для подготовки докторской мне предоставили двухгодичный отпуск. Поэтому с осени 1984 года я в основном обитал в

Новосибирске. Научная работа шла хорошо, я выступил на нескольких конференциях, налаживались интересные для меня связи со специалистами (в том числе, и с весьма известными).

В частности, мне был интересен С.П. Новиков. Он тогда уже был академиком, а книга «Современная Геометрия» (Дубровин–Новиков–Фоменко) была моей «настольной». И там я тоже нашёл неточность (неверное утверждение). Чтобы ему об этом рассказать, пришёл в главный корпус МГУ и, что Вы думаете? Поговорил с ним (у него на кафедре)! Я был польщён этим «разговором на равных».

А через неделю, вернувшись в Новосибирск, был «холодно встречен» как самим А.Д., так и его ближайшим учеником, профессором Ю.Ф.Борисовым. Хотя мне не было сказано ни слова (а эта атмосфера, тягостная для меня, довольно быстро рассосалась), я сразу догадался, что произошло. Ведь в разговоре с С.П. (а он с интересом меня расспрашивал) я упомянул, что Александру Даниловичу (с его-то выдающимися способностями!) надо бы больше внимания на математическую физику обратить. Дело в том, что в это время я уже начал присматриваться к работам Сигала по элементарным частицам и взаимодействиям. Кстати, я и до сих пор (про А.Д.) так считаю. Тогда же, в 1980-х, мои откровения в МГУ оказались на руку как самому С.П., так и другим недоброжелателям А.Д.

3. О возможных применениях волновой функции хронометрического протона

А.Ю. Пальянов

Как было отмечено во Введении, мы сейчас переходим к научной части статьи. В [4] (p. 347, Theorem 3.1) дано описание хронометрического протона, задаваемого гильбертовым пространством F_p своих (теоретически возможных) состояний; здесь p – обозначение для протона. Само же утверждение этой Теоремы 3.1 следует из свойств, доказанных в [5, Section 5].

В [6, Section 2] обсуждалась взаимосвязь хронометрических и релятивистских понятий. В связи с понятием массы (элементарной частицы), было предложено использовать инструментарий, введённый Сигалом (см. [7] и приводимые там ссылки). В частности, в [7] (p. 996) дано выражение для оператора релятивистской массы. В [6](Section 6.3) было предложено рассмотреть случай (хронометрического) протона. Именно, ставилась задача отыскания *самых подходящих* состояний (согласно сказанному Сигалом в [7] на с. 996) протона p. Сейчас мы начинаем конкретные подсчёты, в процессе которых, в частности, станет математически понятно, что это такое – *подходящие состояния* протона.

Напомним ([6, Section 2]), что эти состояния (т. е., возможные волновые функции протона) заданы на пространстве-времени Минковского M. В [5] M было представлено как некоторая совокупность 2 на 2 матриц, обозначим через h общий элемент этой совокупности (см. нашу формулу (4), ниже). Согласно [5] (см. уравнение (20)), каждое значение (в событии h) волновой функции L – это вектор в $\mathbf{C}^2$. Здесь через $\mathbf{C}^2$ обозначено комплексное двумерное линейное пространство. Из [5] (уравнение (15)) следует, что

$$\mathrm{L(h) = SAv}. \tag{1}$$

Здесь функция

$$\mathrm{S} = \{\det[(\mathrm{h} - \mathrm{w}^*)/2\mathrm{i}]\}^{-2}. \tag{2}$$

а 2 на 2 матрица w и вектор v (из $\mathbf{C}^2$) являются параметрами. Другими словами, для выбора конкретной волновой функции L, надо задать как w, так и v. При этом, матрица (h-w*) в (2) всегда невырожденная. Формула для подсчёта матрицы A такова:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = 2\mathrm{i}(\mathrm{h} - \mathrm{w}^*)^{-1} \tag{3}$$

Здесь матрица w* получена из w транспонированием и комплексным сопряжением.

Чтобы задать параметры w и v, используем формулу (20) (см. [5]) для волновой функции хронометрического протона. В этой формуле (20) опускаем нижний индекс 1 и (игнорируя нулевую верхнюю компоненту) считаем, что значения нашей волновой функции принадлежат пространству $\mathbf{C}^2$. Напомним [5] (Section 2), что

$$\mathrm{h} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - x_1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где x_0, x_1,x_2,x_3 – стандартные координаты (по отношению к некоторому ортонормированному базису) в мире Минковского M.

Чуть ниже мы будем работать с (вещественно-значной!) функцией

$$\mathrm{f(h)} = LL^*, \tag{5}$$

здесь (для краткости) справа не приведён аргумент h. Другими словами, значение функции f в h равно эрмитову скалярному квадрату вектора, являющегося правой частью равенства (1).

В (4) берём $x_0 = x_1 = 0$, т.е. будет исследована «срезка» графика функции f соответствующим двумерным пространством. Тем самым, пока мы ведём речь лишь об упрощённой («игрушечной» – 'toy model') ситуации. Более важный (применимый для сравнения с экспериментом) случай обсуждается ниже – в Замечании 1.

Фигурирующую в (2), (3) матрицу w задаём так:

$$\mathrm{w} = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Тем самым, матрица w принадлежит области, задаваемой условием (13) из [5] (Section 4).

Обозначив x_2, x_3 через x, y, и вводя $z = x + iy$, записываем матрицу (4) так:

$$\mathrm{h} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ \bar{z} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Теперь записываем матрицу $\mathrm{M} = \mathrm{h} - \mathrm{w}^*$:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} i-1 & z+1 \\ \bar{z}+1 & i-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Подставляя первую часть соотношения (8) в (2), получаем: $\mathrm{S} = 16(\mathrm{det M})^{-2}$. Ясно, что $\det \mathrm{M}$ равен $-2i - ((x+1)^2 + y^2)$. Квадрат модуля этого комплексного числа равен $((x+1)^2 + y^2)^2 + 4$, обозначим его λ. Найдём присутствующий в правой части соотношения (5) сомножитель:

$$|\mathrm{S}|^2 = (16)^2 \lambda^{-2}. \tag{9}$$

Из (3) и второй части равенства (8) следует, что компоненты матрицы A таковы:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 &= 2i\mathrm{M}_4/(\mathrm{det M}), \mathrm{A}_2 = -2i\mathrm{M}_2/(\mathrm{det M}), \\ \mathrm{A}_3 &= -2i\mathrm{M}_3/(\mathrm{det M}), \mathrm{A}_4 = 2i\mathrm{M}_1/(\mathrm{det M}). \end{aligned} \tag{10}$$

Осталось задать фигурирующий в (1) вектор v. Вот этот выбор: $\mathrm{v}_1 = 0$, $\mathrm{v}_2 = 1$. Тогда правая часть (1) – это вектор с компонентами SA_2, A_4. И, наконец, правая часть равенства (5) такова:

$$\mathrm{LL}^* = 4|\mathrm{S}|^2(|\mathrm{A}_2|^2 + |\mathrm{A}_4|^2) = 4|\mathrm{S}|^2(|\mathrm{M}_2|^2 + |\mathrm{M}_1|^2)\lambda^{-1} = 2^{10}(|\mathrm{M}_2|^2 + |\mathrm{M}_1|^2)\lambda^{-3}. \tag{11}$$

Так как сейчас аргумент h зависит от двух вещественных переменных, а в рамках исследуемых нами вопросов постоянный множитель 2^{10} в (11) можно опустить, то (5) сводится к

$$\mathrm{f}(x, y) = ((x+1)^2 + y^2 + 2)^2 \lambda^{-3}. \tag{12}$$

В Приложении (см. рис. A1, A2, A3) мы приводим (и комментируем) график функции (12). Там (а также – сейчас) под z понимается третья координата в обычном (т.е., евклидовом) трёхмерном пространстве. Продолжим аналитическое исследование этого графика. Вводя (всюду неотрицательную!) переменную $u = (x+1)^2 + y^2$, запишем (12) как

$$\mathrm{F}(x, y) = (u+2)(u^2+4)^{-3}. \tag{13}$$

Очевидно, что поверхность (12) является поверхностью вращения с осью T, проходящей через точку (-1,0); эта точка интерпретируется как **центр протона**. Прямая T параллельна оси z. Поверхность (12) расположена выше плоскости $z = 0$. Критические точки функции (12) отыскиваем из системы уравнений

$$\begin{Bmatrix} f_x = \mathrm{F}'u_x = 0, \\ f_y = \mathrm{F}'u_y = 0. \end{Bmatrix} \tag{14}$$

Из (14) следует, что у функции $\mathrm{f}(x, y)$ имеется один локальный минимум (в точке (-1,0), см. рис. A1). Совокупность же тех точек, в которых $f(x, y)$ достигает максимума L, представляет собой окружность $(x + 1)^2 + y^2 = r^2$. Радиус r этой окружности однозначно определяется из уравнения $\mathrm{F}'(\mathrm{u}) = 0$ в (14). Совокупность же соответствующих точек графика (12) – это окружность в плоскости $z = L$; на этой плоскости (и выше неё) нет других точек поверхности (12) – см. Рис. A2, A3.

Замечание 1. Мы только что привели результаты нашей первой (но пока ещё упрощённой, «прикидочной») попытки ответа на вопрос: «Какие функции из гильбертова пространства волновых функций протона могут представлять особый интерес?» Понятно, что надо будет перейти от нашего упрощённого примера к более реалистическому случаю – когда функция (1) зависит от всех четырёх пространственно-временых переменных (обозначаемых сейчас как x, y, z, t). В частности, надо попытаться отыскать такие волновые функции L(h), что для соответствующих им функций f(x,y,z,t) выполняются следующие свойства:

A) горизонтальные сечения графика функции f(x,y,z,t)=const) сферически-симметричны (или, по крайней мере, близки к сферически-симметричным);

B) при изменении переменной t эти сечения изменяются медленно;

C) числа f(x,y,z,t)=const) очень близки к нулю, если точка (x,y,z) достаточно далека от центра протона (тогда можно будет вполне строго говорить о *радиусе протона*). Кроме того, если значения (в их зависимости от времени) *оператора массы* (см. [7]) на этих (разных) состояниях протона почти одинаковы, то такое (среднее) значение можно (по определению) считать *массой протона*.

Предположив, что подобные волновые функции найдутся, продолжим обсуждение (иллюстрируя его нашим примером). Отметим, что некоторые недавние публикации (например, [8 – 10]) посвящены такому понятию как радиус протона (или, более общо, форме нуклонов). Ясно, см. Рис. A1, что (-1,0) – это центр протона. Выше (в нашем примере) фигурировала окружность (а в реалистической ситуации это будет сфера), состоящая из максимально высоких точек графика функции f. Её-то (сферу) и предполагается интерпретировать как «границу между (содержащей центр протона) областью сильного отталкивающего давления и (находящейся на периферии протона) области притягивающего давления». Только что приведённая нами фраза взята из [8]: «where a strong repulsive pressure near the centre of the proton (up to 0.6 fm) switches to a binding pressure at greater distances». Напомним, что выводы статьи [8] основаны на экспериментах электрон-протонного рассеяния.

Что касается фигурирующего в Замечании 1 условия C), то в нашем примере (см. рис. A3) оно представляется вполне выполненным.

4. Финансовая поддержка

Работа А.В. Левичева была частично профинансирована в рамках Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2019-0006.

Работа Ю. Ю. Клевцовой выполнена в рамках Плана НИТР Росгидромета на 2021-2024 год по теме 1.1.3.

Литература

1. Гуц А.К. Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности. - Омск: ООО <УниПак>, 2008. - 334 с.
2. Levichev A.V.; Akopyan A.A. The Sviderskiy formula and a contribution to Segal's chronometry // Mathematical Structures and Modeling. 2012, № 25. P. 44–51.
3. Segal I.E. Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy. New York: <Academic Press>, 1976.
4. Jakobsen H.P., Levichev A.V., Palyanov A.Yu. The Wigner-Segal method as applied to the problem of quarks' and leptons' generations // Материалы VIII Международной конференции <Знания-Онтологии-Теории> (ЗОНТ-21), 8-12 ноября 2021г., Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2021. С. 344–352.
5. Jakobsen H. P. and Levichev, A. V. The representation of SU(2,2) which is interpreted as describing chronometric fermions (proton, neutrino, and electron) in terms of a single composition series // Rep. Math. Phys. 2022. V. 90, no. 1.
6. Levichev A.V., Palyanov A.Yu. The Multi-Level Model for quarks and leptons as the symbiosis of Segal's Chronometry with the Standard Model. Preprints. 2022, 2022020280 (doi: 10.20944/preprints202202.0280.v2).
7. Segal I.E. Is the Cygnet the quintessential baryon? // Proc. Natl. Acad. Sci. 1991. V. 88. P. 994–998.
8. Burkert V.D., Elouadrhiri L., Girod F.X. The pressure distribution inside the proton // Nature. 2018, V. 557. P. 396–399. https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z
9. Khabarova K.Yu., Kolachevsky N.N. Proton charge radius // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 2021. V. 191 (10). P. 1095–1106, in Russuan, https://ufn.ru/ru/articles/2021/10/d/
10. Nekrasov M.L. On the Shape of Nucleons at High Energies // Particles. 2021. V. 4(3). P. 381–390,

Приложение А.

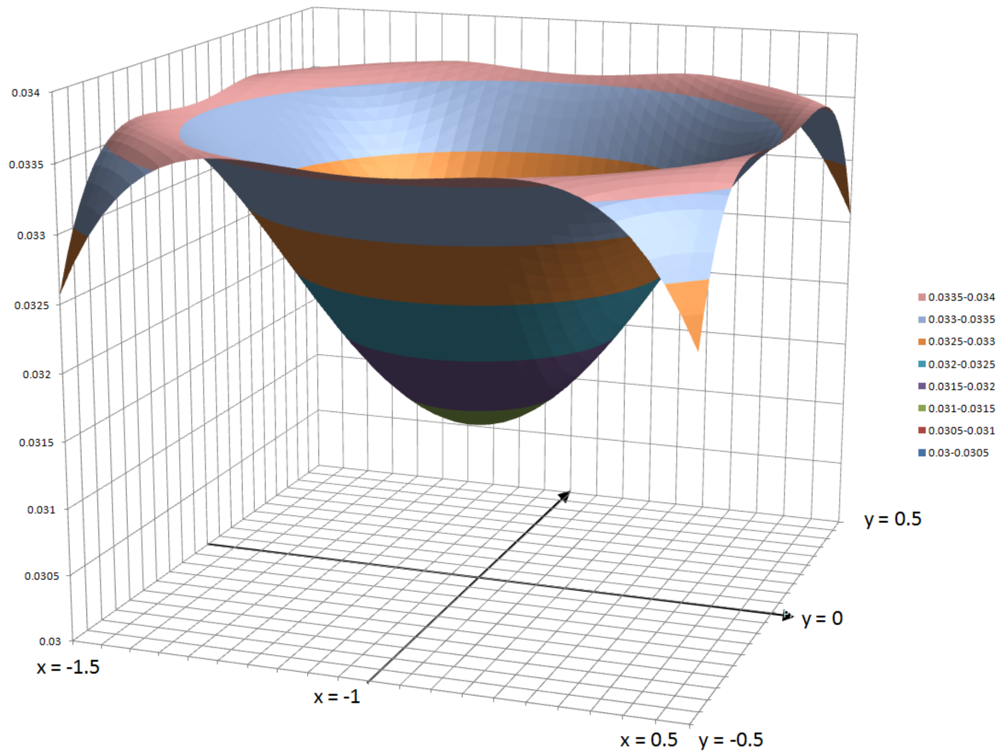


Рис. А1.

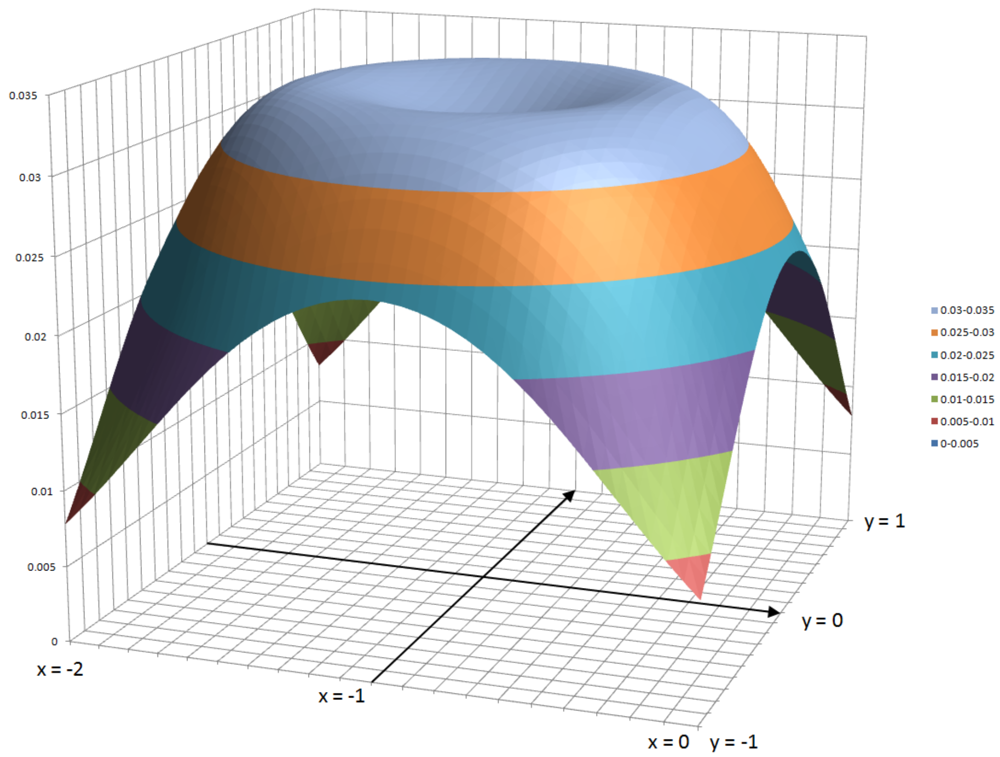


Рис. А2.

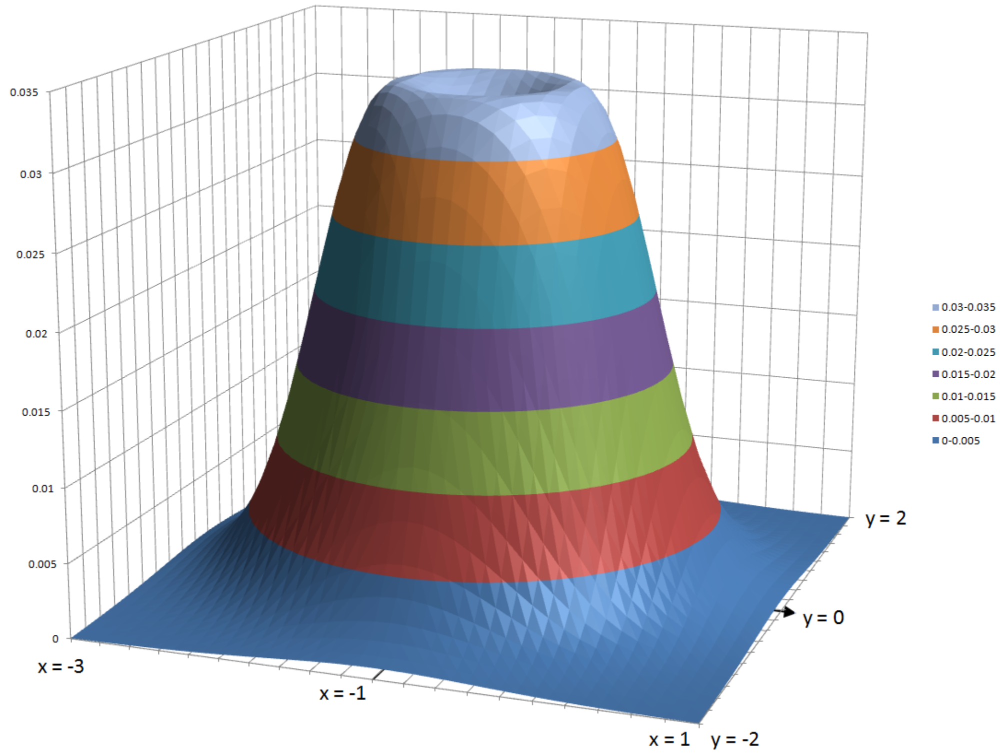


Рис. А3.

A.D.ALEXANDROV WOULD HAVE BEEN 110, AND A CONTRIBUTION TO CHRONOMETRY

A.V. Levichev[1,2]
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Senior researcher, e-mail: alevichev@gmail.com
Yu.Yu. Klevtsova[3,4]
Ph.D. (Phys.-Math.), Leading researcher, e-mail: yy_klevtsova@ngs.ru
A.Yu. Palyanov[2]
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Leading researcher, e-mail: palyanov@iis.nsk.su

[1]Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[2]Ershov Institute of Informatics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[3]Siberian Regional Hydrometeorological Research Institute, Novosibirsk, Russia
[4]Siberian State University of Telecommunications and Information Science, Novosibirsk, Russia

Abstract. Levichev recalls a few episodes related to his Teacher - A.D.Alexandrov. Elements of Segal's Theory are applied to conclude on certain properties of the chronometric proton.

Keywords: A.D. Alexandrov, Segal's Chronometry, proton's wave function, proton radius .

Дата поступления в редакцию: 27.02.2022