Математические структуры и моделирование
2022. № 2(62). С. 112–122

УДК 514.113.5
DOI 10.24147/2222-8772.2022.2.112-122

ЗАДАЧА АЛЕКСАНДРОВА И МЕТОД ПОГОРЕЛОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А.Л. Вернер
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: werner1934@gmail.com
Л.А. Антипова
старший преподаватель, e-mail: pridoroga31@yandex.ru

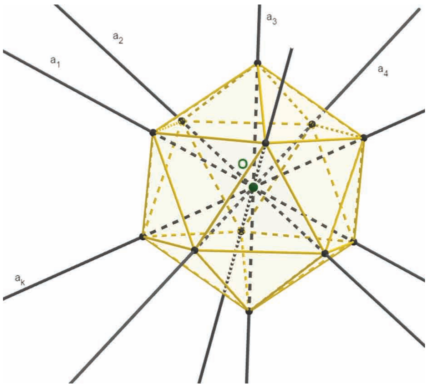
Санкт-Петербургский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия

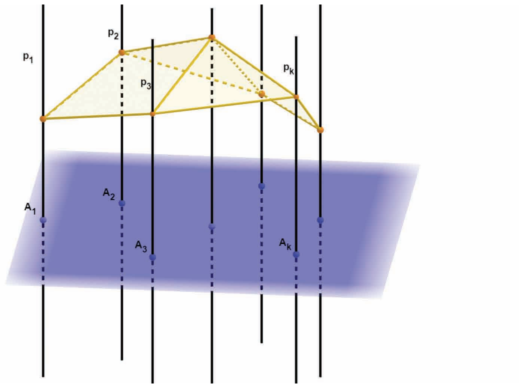
Аннотация. Для гиперболических многооюразий доказывается единственность ломаной с вершинами на данных лучах и заданным поворотом, существование ломаной с вершинами на данных лучах и заданными поворотами и др. Утверждается, что если в трехмерном пространстве Лобачевского задана ориентируемая многогранная поверхность F с гладкой метрикой и краем, который состоит из геодезических циклов $h_1, h_2, ..., h_k$, то эту поверхность можно гладко продлить лентами $v_1, v_2, ..., v_k$, у которых заданы кривизны вершин внешних краев.

Ключевые слова: А.Д. Александров, ломаная, метод Погорелова, гиперболические многообразия..

Девятая глава в монографии А.Д. Александрова «Выпуклые многогранники», вышедшей в 1950 году, называется «Многогранники с вершинами на данных лучах».

В ней три параграфа: § 1. Замкнутые многогранники; § 2. Бесконечные многогранники; § 3. Обобщения.





• Теоремы существования А.Д. Александров доказывает с помощью своей леммы об отображении многообразий, для применения которой должны быть доказаны теоремы единственности.

• В начале § 3 сказано, что таким же методом можно доказать аналогичную теорему для замкнутых многогранников в пространстве Лобачевского. А в конце параграфа 3 А.Д.Александров намечает план применений этих теорем к уравнениям Монжа – Ампера.

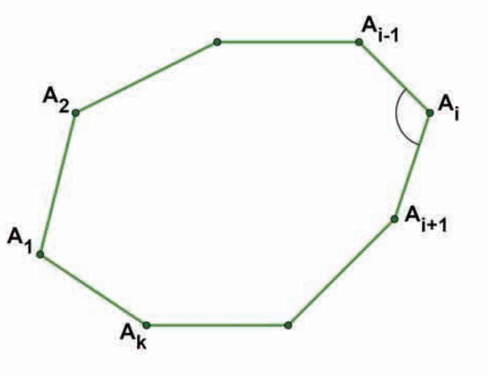
• Позднее А.В.Погорелов и И.Я.Бакельман, а также и сам А.Д. Александров, реализовали этот план в большом цикле работ. При этом теоремы существования А.В.Погорелов доказывал экстремальным методом, не требующим теорем единственности. Для простейшего двумерного случая он состоит в следующем.

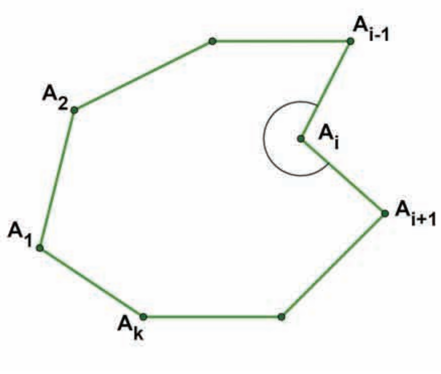
1. Поворот замкнутой выпуклой ломаной и площадь

Пусть L замкнутая простая ломаная с вершинами $A_1, ..., A_k$ на рлоскости Лобачевского.

Замкнутая ломаная L называется **выпуклой**, если каждый ее угол меньше развернутого.

Поворотом ломаной L в вершине A_i называется число ω_i равное $(\pi - \alpha_i)$, где α_i – угол с вершиной A_i.





Согласно теореме Гаусса-Бонне для ломаной L и области Q ограниченной этой ломаной верно равенство:

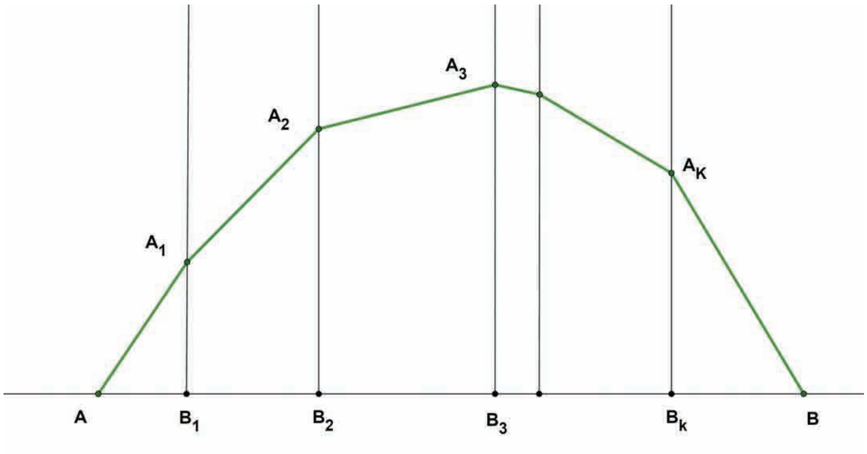
$$\iint\limits_{Q} K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \omega_i.$$

В случае плоскости Лобачевского постоянной отрицательной кривизны K имеем

$$-K \cdot S_Q = \sum_{i=1}^{k} \omega_i - 2\pi.$$

2. Ломаная с вершинами на данных лучах

На плоскости Лобачевского в одной из полуплоскостей относительно прямой AB построены ортогональные прямой AB лучи γ_1, γ_2,..., γ_k, начала которых в точках B_1, B_2,..., B_k на отрезке AB соответственно.



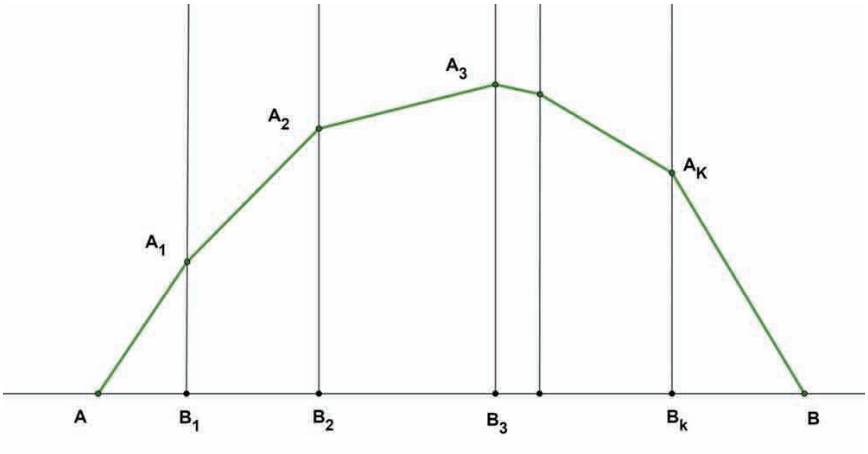
Пусть простая ломаная L имеет концами точки A и B и остальными вершинами точки A_1, A_2,..., A_k, которые ортогонально проектируются на отрезок AB в точки B_1, B_2,..., B_k. Такая ломаная называется ломаной с вершинами на данных лучах.

Ломаная с вершинами на данных лучах называется **выпуклой**, если замкнутая ломаная, полученная объединением L и отрезка AB – выпуклая ломаная.

3. Единственность ломаной с вершинами на данных лучах и заданным поворотом

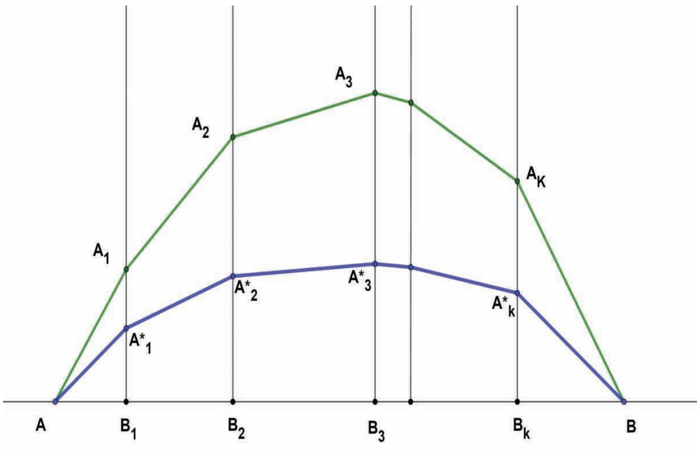
Теорема 1. *Пусть на плоскости Лобачевского выпуклая ломаная L имеет концами точки A и A и остальными вершинами точки A_1, A_2,..., A_k, которые ортогонально проектируются на отрезок в точки B_1, B_2,..., B_k.*

Числа ω_1, ω_2,..., ω_k – повороты вершин A_1, A_2,..., A_k соответственно. Лучи γ_1, γ_2,..., γ_k идут из точек B_1, B_2, ..., B_k через точки A_1, A_2,..., A_k ортогонально прямой AB.



Тогда если ломаная L^* имеет концами точки и и остальными вершинами точки A_1^*, A_2^*,..., A_k^* на лучах γ_1, γ_2,..., γ_k с теми же поворотами ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно, то ломаные L и L^* совпадают.

Доказательство. Предположим, что ломаные L и L^* не совпадают и не имеют общих точек отличных от их концов. Рассмотрим замкнутые ломаные L_1 и L_1^*, полученные соответственно дополнением ломаных L и L^* отрезком . Повороты в вершинах A_1, A_2,..., A_k и A_1^*, A_2^*,..., A_k^* ломаных L_1 и L_1^* соответственно равны. Пусть углы A_1AB_1 и A_kBB_k больше углов $A_1^*AB_1$ и $A_k^*BB_k$ соответственно. Тогда площадь многоугольника $AA_1A_2...A_k$ больше площади многоугольника $AA_1^*A_2^*...A_k^*B$.

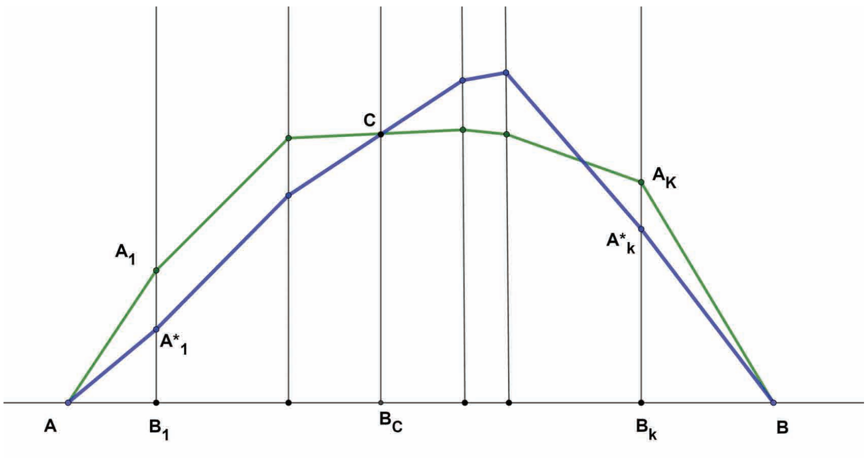


Что противоречит теореме Гаусса-Бонне, поскольку повороты в вершинах и ломаной L^* больше соответствующих поворотов ломаной L.

Таким образом, ни одна из ломаных L и L^* не может лежать внутри другой.

Если ломаные L и L^* не совпадают, то они имеют по крайней мере одну общую точку отличную от их концов. Пусть их общая точка такая, что части ломаных L и L^* заключенные между точками и не имеют других общих точек. Тогда одна из этих частей (допустим, часть ломаной L) лежит выше части ломаной L^* с концами и относительно прямой AB. Эти части обозначим λ и λ^*.

Пусть точка B_C – проекция точки C на прямую .



Дополним двузвенной ломаной части λ и λ^* до замкнутых выпуклых ломаных L_1 и L_1^*. Аналогично рассмотренному ранее случаю, получаем противоречие, поскольку полный поворот замкнутой ломаной L_1 меньше полного повороты ломаной L_1^*, которую ломаная L_1 охватывает.

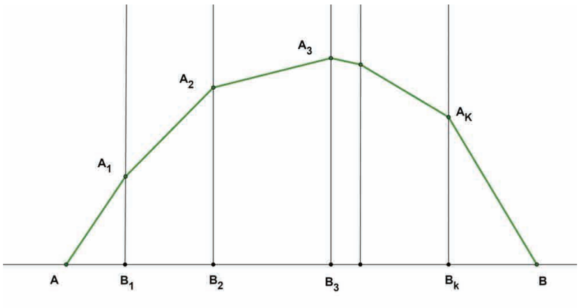
Следовательно, L_1 и L_1^* совпадают. А значит совпадают исходные ломаные L и L^*.

Единственность доказана.

■

4. Существование ломаной с вершинами на данных лучах и заданными поворотами (метод Погорелова)

Теорема 2. *Если задана система лучей γ_1, γ_2,..., γ_k, идущих из точек B_1, B_2,..., B_k отрезка в одну сторону от прямой на плоскости Лобачевского $Л^2$, и заданы неотрицательные числа ω_1, ω_2,..., ω_k меньшие π, то существует и притом единственная выпуклая ломаная L с концами и , в вершинах A_1, A_2,..., A_k которой, лежащих на лучах γ_1, γ_2,..., γ_k, повороты равны числам ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно.*



Доказательство. Рассмотрим класс Ω всех выпуклых ломаных с вершинами на лучах γ_1, γ_2,..., γ_k, у которых повороты в этих вершинах не больше чисел ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно. Класс Ω не пуст, так как сам отрезок с точками B_1, B_2,...,B_k является ломаной из этого класса (кривизны во всех точках B_i равны нулю).

Пусть ломаная $L = AA_1A_2...A_kB$ принадлежит классу Ω. Зададим для ломаной L функцию $f(L) = A_1B_1 + A_2B_2 + ... + A_kB_k$, где A_1B_1, ..., A_kB_k длины соответствующих отрезков. Функция $f(L)$ является непрерывной функцией переменных $x_1 = A_1B_1, ..., x_k = A_kB_k$. Множество M точек $(x_1, ..., x_k)$ пространства $\mathbb{R}^k$, соответствующих классу Ω, компактно, так как оно замкнуто и ограничено в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Замкнутость следует из того, что множество M содержит все свои предельные точки.

Ограниченность получаем из того что все расстояния $A_1B_1, ..., A_kB_k$ равномерно ограничены, так как в противном случае хотя бы один из поворотов ω_1, ω_2,..., ω_k стремился к π, что невозможно.

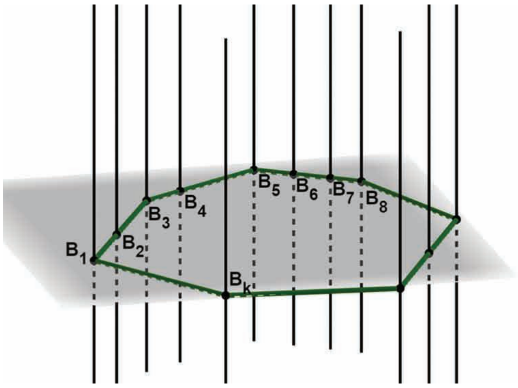
Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная функция $f(L)$ достигает на M своего максимума H для некоторой ломаной L^*. Тогда в вершинах этой ломаной L^* все повороты равны значениям ω_1, ω_2,..., ω_k. Если допустить противное, то в некоторой вершине A_i поворот будет меньше ω_i. Тогда эту вершину можно поднять на такое ϵ, что в вершине A_i поворот останется меньше ω_i, а в соседних вершинах повороты не возрастут. Поэтому ломаная останется в классе Ω, а значение функции $f(L)$ у неё станет $H + \epsilon$, что невозможно. Поэтому наше допущение приводит к противоречию, а это значит, что во всех вершинах ломаной L^* повороты равны числам ω_1, ω_2,..., ω_k.

Теорема доказана. ■

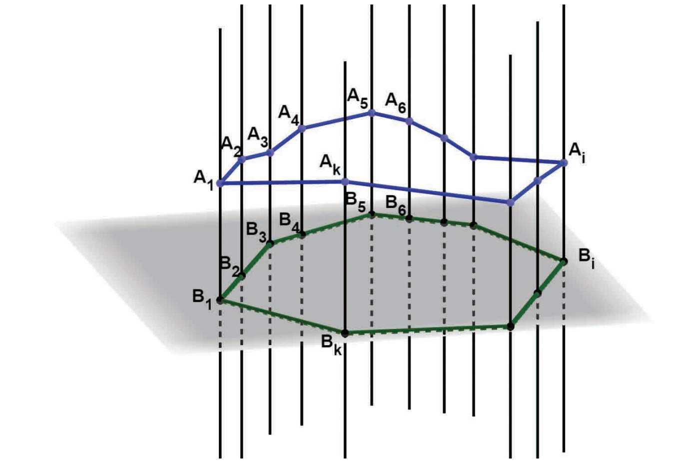
5. Кривые на неодносвязной поверхности

Пусть L – замкнутая простая ломаная в горизонтальной плоскости Лобачевского Л^2. Построим над ломаной L призматическую поверхность П, рёбра которой ортогональны плоскости Л^2 в трёхмерном пространстве Лобачевского Л^3. Зададим на ломаной L точки B_1, B_2, ..., B_k, среди которых есть все вершины ломаной L.

Каждой этой точке сопоставим положительное число ω_1, ω_2,..., ω_k меньшее π. Проведём через точки B_1, B_2,..., B_k в одно полупространство относительно плоскости ломаной L ортогональные этой плоскости лучи γ_1, γ_2,...,γ_k.

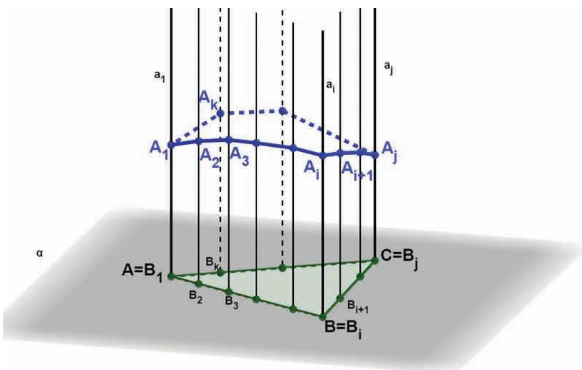


Теорема 3. *Существует и притом единственная выпуклая ломаная L, лежащая на поверхности Π с вершинами в точках A_1, A_2,..., A_k, которые проектируются в точки B_1, B_2,..., B_k и имеют повороты ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно.*



Доказательство. Доказательство единственности.

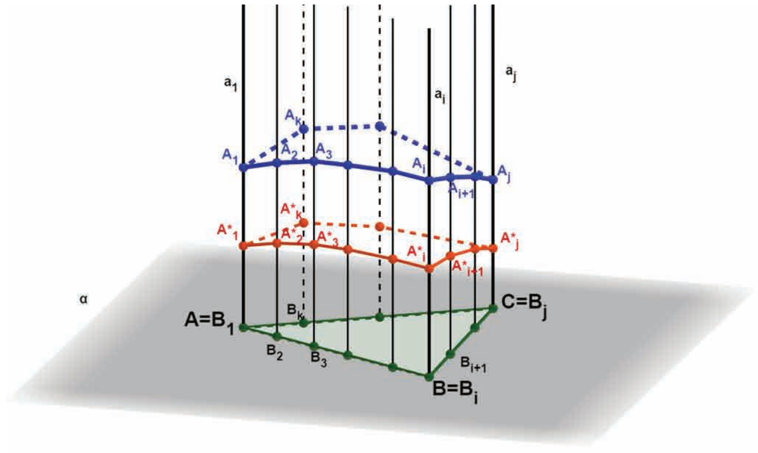
Проведем доказательство единственности для трехзвенной замкнутой ломаной ABC, лежащей в плоскости Лобачевского.

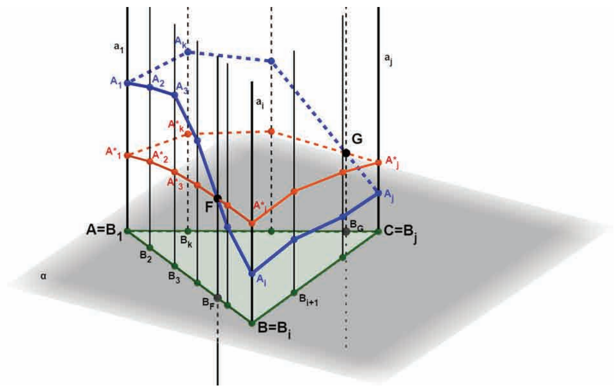


Предположим существуют дае замкнутые ломаные L и L^*, вершины которых $A_1, A_2, ..., A_k$ и $A_1^*, A_2^*, ..., A_k^*$ лежат на лучах $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ и имеют кривизны $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$ соответственно.

Пусть для всех вершин ломаных L и L^* выполняются неравенства $|A_i^* B_i^*| \leqslant |A_i B_i|$.

Тогда множество M_L содержит множество M_{L^*}.





Обозначим часть плоскости, ограниченную треугольником ABC, вместе с ее границей через Δ.

Рассмотрим две области $Q = M_L \cup \Delta$ и $Q = M_{L^*} \cup \Delta$. Границами этих жордановых областей являются ломаные L и L^* соответственно, и $Q \supset Q^*$.

По теореме Гаусса-Бонне получаем

$$\int\int\limits_{Q} K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \omega_i = \ int \int\limits_{Q^*} K d\sigma,$$

а, следовательно, в силу постоянства кривизны пространства получаем равенство площадей множеств Q и Q^*.

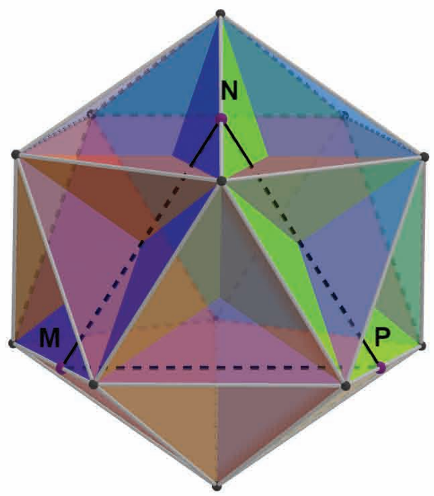
Получили противоречие. Значит, ломаные L и L^* либо пересекаются, либо совпадают.

Предположим ломаные L и L^* пересекаются, а значит имеют по крайней мере две общие точки. Пусть точки F и G общие точки ломаных L и L^*, причем части λ и λ^* ломаных L и L^*, ограниченных этими точками не имеют других общих точек. Тогда одна из этих частей, допустим λ^*, лежит выше части λ ломаной L относительно плоскости Л^2. Проекцию этих ломаных на плоскость α обозначим μ.

Доказательство существования, т. е. доказательство того, что существует выпуклая ломаная L, лежащая на поверхности П с вершинами в точках A_1, A_2,..., A_k, которые проектируются в точки B_1, B_2,..., B_k соответственно и имеет повороты ω_1, ω_2,..., ω_k в вершинах A_1, A_2,...,A_k соответственно, повторяет доказательство для двумерного случая. ■

6. Выпуклые области на расширяющихся гиперболических многообразиях с выпуклыми компонентами края

Возьмём замкнутую гиперболическую поверхность M ненулевого рода g, например, КБД, род которого 4. Возьмём на M геодезический цикл Г, разрежем M по Г на два цикла Г и Г*, и приклеим к обоим краям разреза две трубки – гиперболические чаши T и T^*. Получим расширяющееся гиперболическое многообразие M^*. Зададим на T и T^* две системы лучей, идущих от Г и Г* внутрь этих трубок, и зададим на этих лучах положительные числа, меньшие π. Тогда на T и T^* существуют ломаные L и L^* с вершинами на этих лучах и заданными поворотами. Они ограничат на M^* выпуклую многоугольную область с краями L и L^*.

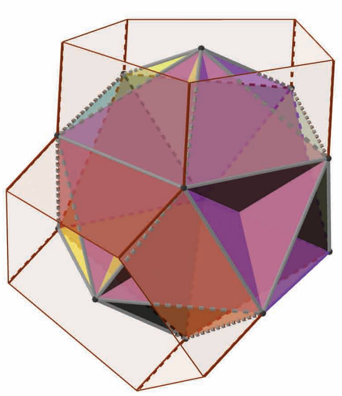


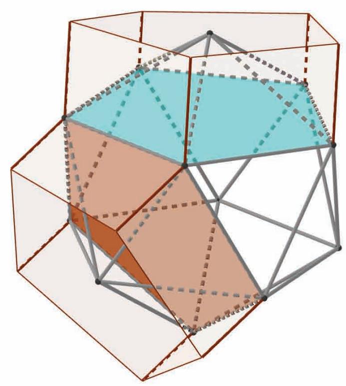
Теорема 4. *Пусть в трёхмерном пространстве Лобачевского задана ориентируемая многогранная поверхность F с гладкой метрикой и краем,который состоит из геодезических циклов h_1, h_2,..., h_k. Тогда эту поверхность можно гладко продлить лентами v_1, v_2,...,v_k, у которых заданы кривизны вершин внешних краёв.*

7. Трёхмерный случай

Я последние годы со своими соавторами занимаюсь невыпуклыми однородными многогранниками. Большинство из них имеет сложную топологию. В то время, как полные выпуклые поверхности в пространствах Евклида и Лобачевского имеют простейшую топологию – они (не считая выпуклых цилиндров) либо сфера, либо плоскость. Среди однородных многогранников в трёхмерном пространстве Лобачевского (моделью которого является шар Клейна K) есть такие, у которых внутренняя метрика – гладкая. Например, таким будет один из больших додекаэдров БД. По своей внутренней геометрии этот большой додекаэдр является замкнутой ориентируемой гладкой гиперболической поверхностью рода 4. Она покрыта сетью Σ из 12-ти вершин $A_1,\ldots,A_{12}$, 30-ти рёбер, и состоит из 12-ти правильных пятиугольников $\Pi_1,\ldots,\Pi_{12}$ плоскости Лобачевского.

Над каждым из этих пятиугольников $\Pi_1,\ldots,\Pi_{12}$ построим в K ортогональную ему телесную гиперболическую призму $P_1,\ldots,P_{12}$, рёбрами которых являются лучи, ортогональные плоскостям пятиугольников $\Pi_1,\ldots,\Pi_{12}$. Из каждой точки $A_1,\ldots,A_{12}$ исходит по 5 таких лучей, а над каждым ребром сети Σ идёт по две боковые грани призм $P_1,\ldots,P_{12}$. Склеим в один луч пять лучей, идущих





Дополним в многообразии W^3 систему лучей a_1,...,a_{12} лучами a_{13},...,a_n, ортогональными краю этого многообразия, с вершинами A_{13},...,A_n. Каждой точке A_1,...,A_n сопоставим положительное число ψ_1,..., ψ_n меньшее 2π. Тогда в многообразии W^3 существует выпуклый многогранник M с вершинами на лучах a_1,...,a_n и кривизнами ψ_1,..., ψ_n.

Доказательство этой теоремы методом Погорелова.

Этот же сюжет можно изложить и так. Рассмотрим в трёхмерном пространстве Лобачевского H^3 замкнутый ориентируемый многогранник P рода g с гладкой метрикой, вершинами A_1,...,A_k, выпуклыми гранями Γ_1,...,Γ_m и сетью рёбер Σ. Построим над каждой гранью Γ_1,...,Γ_m телесную призму P_1,...,P_m и склеим боковые грани этих призм, идущие от одного ребра сети Σ. Получим трёхмерное гиперболическое многообразии W^3 с вполне геодезическим краем P.

Дополним в многообразии W^3 систему лучей a_1,...,a_k лучами a_{k+1},...,a_n, ортогональными краю этого многообразия, с вершинами A_{k+1},...,A_n. Каждой точке A_1,...,A_n сопоставим положительное число ψ_1,..., ψ_n меньшее 2π. Тогда в многообразии W^3 существует выпуклый многогранник M с вершинами на лучах a_1,...,a_n и кривизнами ψ_1,..., ψ_n.

ALEKSANDROV'S PROBLEM AND POGORELOV'S METHOD FOR HYPERBOLIC MANIFOLDS

A.L. Verner
Dci. Sci. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: werner1934@gmail.com
L.A. Antipova
Assistant Professor, e-mail: pridoroga31@yandex.ru

Herzen St.-Petersburg State Pedagogical university, St.-Petersburg, Russia

Abstract. For hyperbolic manifolds a single the relation of a broken line with vertices on the given rays and a given rotation volume, the existence of a broken line with vertices on the given rays and given turns, etc. are proving. One affirms that if in the three-dimensional Lobachevsky space an orientable polyhedral surface F with smooth metric and edge, which consists of the geodesic cycles $h_1, h_2, ..., h_k$, then this surface can be smoothly extended by tapes $v_1, v_2, ..., v_k$, for which vertex curvaturesof of the outer edges are given.

Keywords: A.D.Aleksandrov, broken line, Pogorelov's method, hyperbolic manifolds..

Дата поступления в редакцию: 29.03.2022