Математические структуры и моделирование 2022. № 2(62). С. 123–129

УДК 51(092)
DOI 10.24147/2222-8772.2022.2.123-129

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ. ПРИЧИНЫ И ПОСЛЕДСТВИЯ

В.П. Голубятников
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

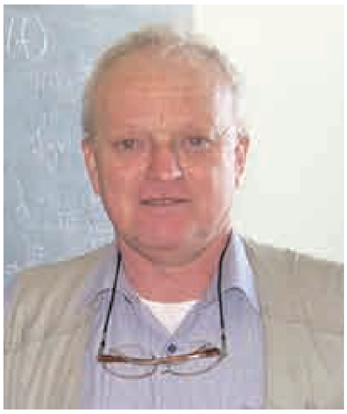
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Военный институт им. И.К. Яковлева войск национальной гвардии РФ, Новосибирск

Аннотация. Рассмотрен класс задач, связанных с восстановленем выпуклых тел по форме их проекций на двумерные плоскости. Описаны некоторые следствия из полученных результатов.

Ключевые слова: Выпуклые тела, лемма Зюсса, геометрическая томография, поверхность Сент-Экзюпери.

В 1977 году, когда меня приняли на работу в Отдел Условно-Корректных Задач Вычислительного Центра СО АН СССР, в нескольких его лабораториях большую популярность приобретали томографические проблемы, в основном связанные с сейсморазведкой. Задачи, которые мне предложили там для начала, состояли в вариациях на тему леммы Зюсса, с которой я уже был знаком по известной публикации Александра Даниловича Александрова [1]; позднее я раздобыл и менее доступную оригинальную статью Вильгельма Зюсса [2].



В.П. Голубятников

В конечном итоге основной предмет моих тогдашних занятий принял такую вот формулировку:

Если у двух выпуклых тел V, W в n-мерном евклидовом пространстве ортогональные проекции на любую k-мерную плоскость $(1 < k < n)$ совмещаются преобразованиями из некоторой группы G_k линейных преобразований k-мерного пространства, то насколько сильно могут при этом отличаться тела V и W?

В самой лемме Зюсса в качестве группы G_k фигурировала группа параллельных переносов.

От Ричарда Гарднера, автора замечательной книги [3], впоследствии я узнал, что даже при $k = 2$ в случае, когда группа G_2 является группой преобразования подобия, два аффинно неэквивалентных выпуклых тела вращения в R^3 могут иметь подобные проекции на любую двумерную плоскость. Та увлекательная монография была посвящена геометрии выпуклых тел, а также вопросам их реконструкции по проекциям и сечениям. Каждая из её девяти глав заканчивалась кратким описанием научной биографии выдающегося геометра — Я.Штейнера (стр. 59), А.Д.Александрова (стр. 139 – 140), Г.Минковского (стр. 192 – 193), В.Зюсса (229 – 231), В.Бляшке (стр. 267 – 268) и др. Познакомились мы с Ричардом в 1994 году, когда готовилось к печати первое издание этой книги, и я с большим удовольствием поделился с ним своими впечатлениями о многочисленных встречах с Александром Даниловичем.

Отмечу также исключительно удачное название этой монографии: мне доводилось держать в руках экземпляр её первого издания с библиотечным штампом какого-то американского медицинского колледжа. Видимо, приобрели его с налёту, не заглянув вонутрь, не разобравшись, насколько медикам такие геометрические сюжеты важны. Для меня тот штамп показался забавным курьёзом, но впоследствии выяснилось, что многие мои жизненные интересы причудливым образом переплелись и с геометрической томографией, и с её медицинскими приложениями.

Описанного выше круга задач мне хватило на много лет работы. Шаг за шагом, при $k = 2$ и $k = 3$, при несложных дополнительных предположениях об общем положении — об отсутствии SO-симметрий у проекций этих тел — мне удалось получить ряд обобщений леммы Зюсса на случай, когда группа G_k состояла из изометрических преобразований и из преобразований подобия. В упомянутом выше примере с аффинно неэквивалентными выпуклыми телами вращения условие отсутствия SO-симметрий у всех их проекций, разумеется, не выполнялось.

Полученные результаты я регулярно рассказывал Александру Даниловичу и на его геометрическом семинаре в НГУ, и во внеурочное время, при каждом удобном случае.

В конце 70-х годов прошлого века в новосибирском Академгородке очень знаменитым персонажем был «молоточник» — вооружённый молотком человек, подкарауливавший в тамошних лесах одиноко идущих женщин. Его фотороботами были увешаны все людные места, его искали и ловили всем миром, и многие мои знакомые, и незнакомые тоже, находили в тех фотороботах некоторое портретное сходство со мной. Но это был не я, см. ниже.

Однажды минут за 20 до семинара, я рассказывал Александру Даниловичу о своих свежих продвижениях в области геометрической томографии. Стоя у доски и излагая эти результаты, я замечал краешком глаза, что в аудиторию постоянно заглядывают какие-то люди, никогда на нашем геометрическом семинаре не появлявшиеся. Позднее диспетчер НГУ поведала мне, что к ней в кабинет забежала солидная дама и попросила срочно вызвать милицию: «Там в аудитории номер *** сидят двое — молоточник и какой-то старик». Диспетчер быстро выяснила по расписанию, какой это старик занимает в такое время ту аудиторию. Однако, группа энтузиастов не поленилась проверить, что за компания там заседает. Впоследствии молоточника, говорят, поймали.

В середине 80-х обобщения леммы Зюсса были перенесены и на довольно широкие классы невыпуклых тел, для которых мы с Дмитрием Александровичем Троценко придумали выразительный термин «Обозримые тела». Примеры:

гантеля, банан; есть примеры обозримых тел, гомеоморфных тору.

Когда Александр Данилович впервые услыхал этот термин «обозримые», что-то ему в нём не понравилось, он произнес его нараспев, и сказал: «Вы бы ещё и ощупываемые тела определили».

Рис. 1. Поверхность Сент-Экзюпери

Позднее всё это удалось обобщить и на в тела комплексных пространствах, и на другие типы проекционных данных томографического типа, в частности на так называемые *видимые контуры гладких поверхностей*. Для тех, кто помнит: такие геометрические объекты можно было наблюдать на экране overhead'а, если согнуть лист «прозрачки»; это проекция линии сгиба. Видимые контуры естественным образом появляются при изучении каустик волновых фронтов в сейсмической томографии, и потому очень интересовали некоторых наших коллег-геофизиков, например Сергея Васильевича Гольдина и его сотрудников.

Очень наглядно часть видимого контура выглядит на рисунке 1 слева, см. [4]. Правую часть рисунка можно увидеть во многих книгах по теории особенностей гладких отображений.

Александр Данилович обладал огромной магнетической силой, к нему постоянно тянулись и коллеги-математики, и люди, никак с науками не связанные. 9 мая 1979 года геометры Академгородка по старой традиции собрались у коттеджа Ю.Г. Решетняка. Готовился костёр для шашлыка, кипели и другие приготовления, Юрий Григорьевич потчевал всех желающих «Посольской». В разгар всего этого предвкушения мой трёхлетний сын подошёл к Александрову (не к маме или к папе!) и спросил: «Дедушка, а что тут можно поесть?» чем необычайно его растрогал.

Прежде, чем продолжить рассказ об обобщениях леммы Зюсса, упомяну опус, написанный в 1982 году к 70-летию Александра Даниловича:

https://stihi.ru/2015/08/10/2449

На торжественной части юбилейной конференции Юрий Фёдорович Борисов продекламировал этот текст, и через несколько минут Виктор Абрамович

Залгаллер от имени Оргкомитета столь же торжественно вручил мне бутылку водки. Эх, жаль, не взял я не её этикетку автографы основных участников этого мероприятия, а то она украшала бы мои книжные полки и поныне.

Через 20 лет я с большим удивлением увидел тот текст в книге [5].

На этой же конференции в своём пленарном докладе Александр Данилович сформулировал десять нерешённых геометрических проблем, последняя из них, кажется, до сих пор нерешённая, звучала так: «Написать хороший учебник по геометрии».

В том же году, чуть раньше, в нашем институте математики прошёл Советско-Венгерский «Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности». Прилетели из Будапешта симпатичные ребята, с удовольствием встречаю их имена в журналах при просмотре свежих поступлений в библиотеку. По-русски почти все они говорили вполне уверенно. Когда на открытии симпозиума перед нами предстали С.Л.Соболев и А.Д.Александров, кто-то из молодых венгров тихонько сказал мне: «Да, эта старая генерация — Явление замечательное», цитирую по памяти.

А для нас, напоминаю, это была как раз та среда, в которой мы вступали... кто куда. Такое наблюдение в последнее время в разных аналогичных формулировках я регулярно слышу от некоторых своих ровесников, математиков главным образом, не только российских.

Когда геометрические результаты мои стали приобретать «обозримый» вид, Александров довольно тонко польстил мне — отказался представлять подготовленную заметку в Доклады АН СССР, сказав примерно вто что: «В этом направлении не было продвижений лет 50. Значит это либо никому не интересно, либо очень сложно. В обоих случаях надо публиковать подробную журнальную статью, а не докладную заметку». Что я и сделал, см. в частности [6, 7], а также монографию [8]. В качестве утешительного приза другой мой текст, не геометрический: «Интегральные подмногообразия фазовых пространств и когомотопии», написанный примерно в то же время, Александр Данилович в Доклады Академии Наук представил — после подробного обсуждения его содержания.

Перечисленные в предыдущем абзаце публикации получили впоследствии не столь классические продолжения [9, 10], в частности и на некоторые «ощупываемые» тела, см. также очень интересную статью [11], название которой полностью отражает её содержание.

Параллельно со мной Александр Вениаминович Кузьминых, ученик Александра Даниловича, занимался подобными обобщениями леммы Зюсса с помощью других подходов и методов, [12]. Его результаты относились к другому случаю общего положения — когда у рассматриваемых выпуклых тел V и W функции ширины имеют конечное количество максимумов. Другая его задача, которой он потряс моё воображение, формулировалась так: *Восстановить выпуклое тело по пачке его фотографий* (ортогональных проекций). Как говорят специалисты по обратным задачам, восстановить причины по последствиям.

В те времена на кафедральном семинаре по геометрии А.В.Кузьминых в силу ряда естественных причин носил неофициальный титул «Александр III».

И о последстиях: В августе 2012 года пульманологи, кандидаты медицинских наук, после двух недель интенсивного обследования поместили мою грудную клетку в томограф. После расшифровки результатов стали они мне объяснять, какие у меня кривые бронхи, и что же мне теперь придётся делать.

Рис. 2.

А.Д. Александров, В.П. Голубятников, Ю.Г. Решетняк

Почему-то вспоминается Г.-Х. Андерсен: «Мы умеем производить материю, которая ... обладает удивительным свойством — она делается невидимой для каждого, кто сидит не на своем месте, либо непроходимо глуп».

Я вспомнил всё, что к тому моменту усвоил в приложениях геометрической томографии, жалобно попросил просветить мне и брюшную полость тоже, и мне пошли навстречу. Через час после расшифровки новых результатов я был переведён от пульманологов к хирургам, и ещё через час лежал у них на столе, благодаря чему имею ныне, 10 лет спустя, возможность делиться приятными воспоминаниями о геометрии, чистой и прикладной. Правда, на конференцию, которую проводили тогда в Санкт-Петербурге в честь 100-летия со дня рождения Александра Даниловича, я накануне двух дней реанимации попасть не смог. Пришлось сдавать билеты и отправлять в Оргкомитет Юрию Дмитриевичу Бураго объяснительную записку.

И ещё о подобных приложениях: во время одной томографической конференции услышал я на докладе, посвященном медицинским исследованиям, о том, что томографические эксперименты на крысах показывают, что на сытый желудок стрессы переносятся гораздо легче, чем на голодный. Мысль эта мне очень понравилась, и вечером, вернувшись с конференции домой, когда жена стала вываливать на меня накопившиеся за день отрицательные эмоции, я рассказал ей об этих результатах и попросил дать сначала поесть, а отрицательные эмоции генерировать уже не натощак. Очень рекомендую.

Впрочем, в некоторых русских народных сказках эта идея давно уже сформулирована: «Сначала накорми, напои, баньку истопи, а потом уже и о делах».

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (Тема FWNF-2022-0009).

Литература

1. Александров А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел // Математический сборник. 1937. Т. 2, N 6. С. 1205–1238.
2. Süss W. Zusammensetzung von Eikörpern und Homothetische Eiflächen // Tôhoku Math. Journal. 1932. V. 35, P. 47–50.
3. Gardner R.J. Geometric tomography (2d ed.) Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
4. Saint-Exupéry A. Le Petit Prince. Gallimard, Paris, 1945.
5. Академик Александр Данилович Александров. М. Наука, 2002.
6. Golubyatnikov V.P. Unique determination of visible bodies from their projections // Siberian Mathematical Journal. 1988. V. 29, No. 5. P. 761–764.
7. Golubyatnikov V.P. On unique recoverability of convex and visible compacta from their projections // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1992. V. 73(1), No. 1. P. 1–10.
8. Golubyatnikov V.P. Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data. Inverse and ill-posed problems series. VSP, Utrecht, Netherlands, 2000. 120 p.
9. Golubyatnikov V.P., Rovenskii V.Yu. Some extensions of the class of k-convex bodies // Siberian Mathematical Journal. 2009. V. 50, No. 5. P. 820–829.
10. Batenkov D., Golubyatnikov V., Yomdin Y. Reconstruction of planar domains from partial integral measurements // Contemporary mathematics, 2013, V. 591. P. 51–66.
11. Ryabogin D. On the continual Rubick's cube // Advances in Mathematics. 2012. V. 231. P. 3429–3444.
12. Kuz'minykh A.V. Reconstructibility of a convex body from the set of its projections // Siberian Mathematical Journal. 1984. V. 25, No. 2. P. 284–288.

GEOMETRIC TOMOGRAPHY. GROUND AND BY-PRODUCTS

V.P. Golubyatnikov
D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Sobolev insitute of mathematics, SB RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. One class of problems related to reconstruction of convex bodies from the shapes of their projections onto 2-dimensional planes is considered. Some corollaries from the results obtained there are described.

Keywords: Convex bodies, Süss's lemma, geometric tomography, Saint-Exupéry's surface .

Дата поступления в редакцию: 05.02.2022