Математические структуры и моделирование
2022. № 2(62). С. 108–111

УДК 514.113.5
DOI 10.24147/2222-8772.2022.2.108-111

ОДНА ЗАДАЧА АЛЕКСАНДРОВА И МЕТОД ПОГОРЕЛОВА

А.Л. Featured Вернер
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: werner1934@gmail.com
Л.А. Антипова
старший преподаватель, e-mail: pridoroga31@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Кратко рассказывается одна задача А.Д. Александрова и представлен метод А.В. Погорелова её решения.

Ключевые слова: А.Д. Александров, А.В. Погорелов, многогранники, экстремальным метод.

1. История

Девятая глава в монографии А.Д. Александрова «Выпуклые многогранники», вышедшей в 1950 году, называется «Многогранники с вершинами на данных лучах». В ней три параграфа: § 1. Замкнутые многогранники; § 2. Бесконечные многогранники; § 3. Обобщения.

А.Л. Вернер

В § 1 доказывается теорема о существовании и единственности (с точностью до подобия) замкнутого выпуклого многогранника M, вершины которого лежат на лучах a_1, a_2,...,a_k с началами в некоторой точке O и заданными на них положительными кривизнами ω_1, ω_2,...,ω_k, соответственно. Их сумма равна 4π и выполнены некоторые необходимые неравенства.

В § 2 на некоторой плоскости α заданы точки A_1, A_2,...,A_k, через них проведены прямые p_1, p_2,...,p_k, перпендикулярные плоскости α и заданы положительные числа ω_1, ω_2,..., ω_k, в сумме меньшие 2π. Доказана теорема о существовании и единственности (с точностью до параллельного переноса) бесконечного выпуклого многогранника с вершинами на данных прямых и с заданными кривизнами, а также с данным предельным конусом.

Теоремы существования А.Д. Александров доказывает с помощью своей леммы об отображении многообразий, для применения которой должны быть доказаны теоремы единственности.

В начале § 3 сказано, что таким же методом можно доказать аналогичную теорему для замкнутых многогранников в пространстве Лобачевского. А в конце § 3 А.Д. Александров намечает план применений этих теорем к уравнениям Монжа–Ампера.

Позднее А.В. Погорелов и И.Я. Бакельман, а также и сам А.Д. Александров, реализовали этот план в большом цикле работ. При этом теоремы существования А.В. Погорелов доказывал экстремальным методом, не требующим теорем единственности. Для простейшего двумерного случая он состоит в следующем.

Л.А. Антипова

Фиксируем на евклидовой плоскости некоторую горизонтальную прямую a, на ней отрезок AB, на этом отрезке точки A_1, A_2,...,$_k$ и положительные числа ω_1, ω_2,..., ω_k, сумма которых меньше 2π. Тогда существует выпуклая ломаная $L = AB_1B_2...B_kB$, лежащая выше прямой a, вершины которой проектируются в точки A_1, A_2,..., A_k и кривизны (т. е. повороты) в этих вершинах равны ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно.

А.В. Погорелов вводит функционал $F(L) = A_1B_1 + A_2B_2 + ... + A_kB_k$ и рассматривает класс $\{L\}$ тех ломаных L, в вершинах которых кривизны не превосходят заданных значений ω_1, ω_2,...,ω_k, доказывает равномерную ограниченность ломаных этого класса, а затем берёт ту ломаную L_0, для которой функционал $F(L_0)$ достигает максимума. Эта ломаная и даёт решение задачи А.Д. Александрова для этого частного случая краевой задачи Дирихле.

В пространстве Лобачевского метод Погорелова даёт более простые доказательства сформулированным выше теоремам Александрова. В пространстве Лобаческого отсутствуют ограничения на суммы кривизн. Строение (как топологическое, так и метрическое) выпуклых фигур в гиперболических пространствах значительно богаче, чем их строение в евклидовых пространствах, и даже в простейшем случае гиперболических трубок даёт качественно новые результаты. Обратимся теперь к этому частному случаю.

2. Задача Александрова и метод Погорелова на гиперболической чаше

Слово *гиперболический* или *гиперболическая* мы применяем для римановых многообразий или многообразий с краем, имеющих постоянную отрицательную кривизну.

Возьмём в пространстве Лобачевского H^3 горизонтальную плоскость α, в ней равносторонний треугольник ABC со стороной d, и через вершины этого треугольника проведём лучи a, b, c, перпендикулярные плоскости

α. Построили бесконечную призму Π. Её боковая поверхность является двумерным гиперболическим многообразием, краем которого является замкнутая геодезическая ломаная $ABCA$.

Эта поверхность с краем является *гиперболической чашей*, т. е. гиперболическими чашами мы называем полные гиперболические римановы поверхности с геодезическим краем и гомеоморфные кругу с выколотым центром, на которых их край является кратчайшим поясом.

Другими примерами гиперболических чаш могут служить поверхность вращения луча a вокруг луча c или дважды покрытая полоса между этими расходящимися лучами вместе с дважды покрытым их общим перпендикуляром.

Теорема 1. *Рассмотрим гиперболическую чашу T с геодезическим краем Λ. Будем считать, что чаша T реализована в пространстве Лобачевского H^3 бесконечной призмой Π и её край Λ – это равносторонний треугольник $ABCA$. Зададим на Λ последовательно систему точек $A_1 = A$, A_2,..., $A_i = B$, A_{i+1},..., $A_j = C$,...,A_k и сопоставим этим точкам неотрицательные числа ω_1, ω_2,..., ω_k, каждое из которых меньше π. Проведём из точек A_1, A_2,...,A_k лучи a_1, a_2,. . . ,a_κ, ортогональные краю Λ. Тогда существует и притом единственная замкнутая ломаная L, вершины которой лежат на лучах a_1, a_2,...,a_k и кривизны в этих вершинах (т. е. повороты) равны числам ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно.*

Доказательство существования в этой теореме проводится методом Погорелова, а единственность вытекает из формулы, связывающей площадь области между поясами L и Λ на чаше T и поворотом пояса L.

В регулярном случае аналог этой теоремы даёт теорему о восстановлении пояса на чаше T по положительной функции, заданной на краю Λ и равно геодезической кривизне кривой L.

3. Полные некомпактные гиперболические римановы поверхности с гиперболическими чашами

Такими римановыми поверхностями рода ноль являются, например, дважды покрытые выпуклые «многосторонники» на плоскости Лобачевского, у которых соседние стороны – расходящиеся прямые. А многообразия ненулевого рода можно построить так. Взять «кентавра» и провести на нём непересекающиеся замкнутые геодезические. Затем разрезать «кентавра» по этим геодезическим и подклеить к разрезам гиперболические чаши. Например, поступить так с большим додекаэдром.

А выпуклые множества на таких поверхностях либо такой же топологии, как на плоскости Лобачевского, либо имеют такие границы на чашах с положительным поворотом, такие, как были построены в § 2.

4. Задача Александрова и метод Погорелова для трёхмерных гиперболических многообразий

Возьмём, например, одного из кентавров K, т. е. однородный многогранник в пространстве H^3 с гладкой метрикой. На нём имеется сеть S, разбивающая его на выпуклые многоугольники. Выберем сторону кентавра и построим над каждым таким многоугольником в выбранную сторону ортогональную телесную призму. Склеим эти призмы по боковым граням, которые отходят от одинаковых сторон многоугольников сети. Получим трёхмерное риманово гиперболическое многообразие M с краем K. Зададим на K систему точек A_1, A_2,...,A_k, включив в эту систему все вершины сети S, и сопоставим эти точкам неотрицательные числа ω_1, ω_2,..., ω_k меньшие 2π. Из точек A_1, A_2,...,A_k проведём ортогонально к K лучи a_1, a_2,...,a_k. Тогда над краем K в многообразии M существует многогранник P с вершинами B_1, B_2,...,B_k, которые проектируются в точки A_1, A_2,...,A_k и имеют кривизны ω_1, ω_2,..., ω_k соответственно.

ON ONE ALEXANDROV PROBLEM AND POGORELOV METHOD

A.L. Verner
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: werner1934@gmail.com
L.A. Antipova
Assistant Professor, e-mail: pridoroga31@yandex.ru

Herzen St.-Petersburg State Pedagogical university, St.-Petersburg, Russia

Abstract. Briefly one problem of A.D. Aleksandrov is described and the Pogorelov method is presented.

Keywords: A.D. Aleksandrov, A.V. Pogorelov, polyhedrons, extremal method.

Дата поступления в редакцию: 29.03.2022