

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

С.П. Баутин¹

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: spbautin@mail.ru

С.Н. Кононов²

аспирант, e-mail: kononovsn@susu.ru

Э.С. Левунина³

аспирант, e-mail: elvirka@rambler.ru

¹Снежинский физико-технический институт, Снежинск, Россия

²Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

³Производственное объединение «Маяк», Озёрск, Россия

Аннотация. В работе предлагается вариант решения численным методом одной газодинамической задачи, поставленной в монографии [1]. Предложенная полная система уравнений Навье-Стокса в цилиндрических координатах при использовании центральных конечных разностей представлена явной разностной схемой. Создана программная реализация счёта для известного точного решения системы. Поставлена задача распараллеливания действий для обработки модели на кластерных системах, что необходимо для уменьшения времени счёта.

Ключевые слова: численные методы, полная система уравнений Навье-Стокса, восходящие закрученные потоки газа.

На протяжении десяти лет коллектив авторов под руководством Баутина С.П. ведёт работу по моделированию восходящих закрученных потоков (ВЗП) воздуха, встречающихся в природе в виде торнадо и тропических циклонов [2]. В монографии [1] представлена полная система уравнений Навье-Стокса для воздуха в которой учтено действие сил тяжести и Кориолиса, а также вязкость и теплопроводность газа. Система записана в цилиндрических координатах и содержит пять уравнений: уравнение неразрывности, три уравнения для радиальной, окружной и вертикальной составляющих скорости газа и уравнения энергии в безразмерных переменных.

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\rho_t + u\rho_r + \frac{v}{r}\rho_\varphi + w\rho_z + \rho \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\
 &u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_r + \frac{1}{\gamma}T_r = av - b \cos \varphi w + \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(u_{rr} + \frac{3}{4r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u + \frac{1}{4r}v_{r\varphi} - \frac{7}{4r^2}v_\varphi + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}w_{rz} \right), \\
 &v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{T}{\gamma r \rho}\rho_\varphi + \frac{1}{\gamma r}T_\varphi = -au + b \sin \varphi w + \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{1}{4r}u_{r\varphi} + \frac{7}{4r^2}u_\varphi + \frac{3}{4}v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r}v_r - \frac{3}{4r^2}v + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4r}w_{\varphi z} \right), \\
 &w_t + ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = b \cos \varphi u - b \sin \varphi v - g + \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{1}{4}u_{rz} + \frac{1}{4r}u_z + \frac{1}{4r}v_{\varphi z} + \frac{3}{4}w_{rr} + \frac{3}{4r^2}w_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r}w_r + w_{zz} \right), \\
 &T_t + uT_r + \frac{v}{r}T_\varphi + wT_z + (\gamma - 1)T \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = \\
 &\quad = \frac{\varkappa_0}{\rho} \left(T_{rr} + \frac{1}{r^2}T_{\varphi\varphi} + T_{zz} + \frac{1}{r}T_r \right) + \\
 &\quad + \frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho} \left\{ \left[\cos 2\varphi \left(u_r - \frac{1}{r}v_\varphi - \frac{1}{r}u \right) - \sin 2\varphi \left(v_r + \frac{1}{r}u_\varphi - \frac{1}{r}v \right) \right]^2 + \right. \\
 &\quad + \left[\cos^2 \varphi u_r - \cos \varphi \sin \varphi v_r - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r}u_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r}v_\varphi + \right. \\
 &\quad + \left. \left. \frac{\sin^2 \varphi}{r}u + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}v - w_z \right]^2 + \right. \\
 &\quad + \left[\sin^2 \varphi u_r + \cos \varphi \sin \varphi v_r + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r}u_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r}v_\varphi + \right. \\
 &\quad + \left. \left. \frac{\cos^2 \varphi}{r}u - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}v - w_z \right]^2 + \right. \\
 &\quad + \frac{3}{2} \left[\sin 2\varphi \left(u_r - \frac{1}{r}v_\varphi - \frac{1}{r}u \right) + \cos 2\varphi \left(v_r + \frac{1}{r}u_\varphi - \frac{1}{r}v \right) \right]^2 + \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \left[\left(u_z + w_r \right)^2 + \left(v_z + \frac{1}{r}w_\varphi \right)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Здесь:

ρ — плотность газа;

T — температура;

u, v, w — соответственно радиальная, окружная, вертикальная составляющие скорости;

ρ, φ, z — цилиндрические координаты;

t — время;

μ_0, \varkappa_0 — постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности;

γ — показатель адиабаты газа;

a, b — постоянные коэффициенты, учитывающие действие силы Кориолиса в зависимости от широты расчётной точки.

Аналитическое решение системы с произвольными начальными и граничными условиями невозможно и поэтому необходимо использование численных методов.

Поскольку тропический циклон, является ВЗП больших пространственных размеров и течение воздуха в нем является достаточно сложным, то моделирование таких течений сеточными методами вызывает необходимость использования большого числа узлов для расчёта. Это влечёт увеличение времени счёта и поэтому необходимо ускорения счёта. Современные вычислительные мощности обеспечивают высокую производительность, но лишь в случаях, допускающих хорошее распараллеливания задачи. Для расчётов в работе предложено использовать явную схему метода конечных разностей.

Полная система уравнений Навье-Стокса — нелинейная система уравнений с частными производными смешанного типа — аппроксимирована алгебраическими уравнениями при замене производных на центральные разности. При переходе к уравнению в конечных разностях нижние индексы параметров будут указывать на координаты узла цилиндрической сетки, верхний индекс будет обозначать номер текущего ($n + 1$) и предыдущего (n) временных слоёв. Зададимся, что: i , (от 0 до I) j (от 0 до J), k (от 0 до K) - номера узлов по r, φ, z соответственно, Δr , $\Delta \varphi$ и Δz - шаги по r, φ и z соответственно, n - номер временного слоя, τ - шаг по времени.

Производная по времени от функции f задаётся уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^n - f_{i,j,k}^{n-1}}{\tau} \quad (2)$$

Первые и вторые производные заменяются на центральные разности:

$$\frac{\partial f}{\partial r} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{\Delta r^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} \approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta r \Delta \varphi} \quad (5)$$

Принимая во внимание вышеописанное, выражение плотности на текущем временном слое от параметров на слое предыдущем будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k}^{n+1} = & \rho_{i,j,k}^n - \tau \cdot \left[u_{i,j,k}^n \cdot \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \cdot \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta \varphi} + \right. \\ & + w_{i,j,k}^n \cdot \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \rho_{i,j,k}^n \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2i\Delta r \Delta \varphi} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) \right] \end{aligned}$$

Уравнения для трёх составляющих скоростей примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\tau} = & -u_{i,j,k}^n \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta \varphi} + \frac{(v_{i,j,k}^n)^2}{i\Delta r} - \\ & - w_{i,j,k}^n \frac{u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\gamma \Delta r} + a u_{i,j,k}^n - \\ & - b \cos(j\Delta \varphi) w_{i,j,k}^n + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{\Delta r^2} + \frac{3}{4(i\Delta r)^2} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{\Delta \varphi^2} + \right. \\ & + \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2i\Delta r^2} - \frac{u_{i,j,k}^n}{(i\Delta r)^2} + \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{16i(\Delta r)^2 \Delta \varphi} - \\ & - \frac{7}{4(i\Delta r)^2} \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta \varphi} + \frac{3(u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n)}{4\Delta z^2} + \\ & \left. + \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{16\Delta r \Delta z} \right); \\ \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\tau} = & -u_{i,j,k}^n \frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta \varphi} - \\ & - w_{i,j,k}^n \frac{v_{i,j,k+1}^n - v_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma i \Delta r \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta \varphi} - \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2i\Delta r \gamma \Delta \varphi} - a u_{i,j,k}^n + \\ & + b \sin(j\Delta \varphi) w_{i,j,k}^n + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{16i\Delta r^2 \Delta \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{7}{4(i\Delta r)^2} \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta \varphi} + \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{\Delta r^2} + \frac{1}{(i\Delta r)^2} \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{\Delta \varphi^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2i\Delta r^2} - \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k}^n}{(i\Delta r)^2} + \frac{3(v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n)}{4\Delta z^2} + \\
 & + \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{16i\Delta r\Delta\varphi\Delta z} \Big); \\
 & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\tau} = -u_{i,j,k}^n \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \frac{w_{i,j+1,k}^n - w_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi} - \\
 & - w_{i,j,k}^n \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma\rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z\gamma} + \\
 & + b \cos(j\Delta\varphi)u_{i,j,k}^n - b \sin(j\Delta\varphi)v_{i,j,k}^n - g + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \cdot \\
 & \cdot \left(\frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{16\Delta r\Delta z} + \frac{1}{4i\Delta r} \frac{u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \right. \\
 & + \frac{v_{i,j+1,k+1}^n - v_{i,j+1,k-1}^n - v_{i,j-1,k+1}^n + v_{i,j-1,k-1}^n}{16i\Delta r\Delta\varphi\Delta z} + \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{\Delta r^2} + \\
 & \left. + \frac{3}{4(i\Delta r)^2} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{\Delta\varphi^2} + \frac{3}{4i\Delta r} \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \frac{(w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n)}{\Delta z^2} \right).
 \end{aligned}$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\tau} = -u_{i,j,k}^n \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi} - w_{i,j,k}^n \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \\
 & - (\gamma - 1)T_{i,j,k}^n \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) + \\
 & + \frac{\kappa_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{\Delta r^2} + \frac{1}{i^2\Delta r^2} \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{\Delta\varphi^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2i\Delta r^2} \right) + \\
 & + \frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho_{i,j,k}^n} \left\{ \left[\cos 2j\Delta\varphi \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} - \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \right) - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \sin 2j\Delta\varphi \left(\frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \right) \right]^2 + \right. \\
 & + \left[\cos^2 j\Delta\varphi \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \cos j\Delta\varphi \sin j\Delta\varphi \frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \right. \\
 & - \left. \cos j\Delta\varphi \sin j\Delta\varphi \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} + \right. \\
 & + \left. \sin^2 j\Delta\varphi \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} + \sin^2 j\Delta\varphi \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} + \cos j\Delta\varphi \sin j\Delta\varphi \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} - \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right]^2 + \\
 & + \left[\sin^2 j\Delta\varphi \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \cos j\Delta\varphi \sin j\Delta\varphi \frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \right. \\
 & + \left. \cos j\Delta\varphi \sin j\Delta\varphi \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} + \right. \\
 & + \left. \cos^2 j\Delta\varphi \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} + \cos^2 j\Delta\varphi \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} - \cos j\Delta\varphi \sin j\Delta\varphi \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} - \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right]^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \left[\sin 2j\Delta\varphi \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} - \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} - \frac{u_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \right) + \right. \\
 & + \left. \cos 2j\Delta\varphi \left(\frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} + \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta\varphi i\Delta r} - \frac{v_{i,j,k}^n}{i\Delta r} \right) \right]^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j,k+1}^n - v_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{w_{i,j+1,k}^n - w_{i,j-1,k}^n}{2i\Delta r\Delta\varphi} \right)^2 \right] \Big\}.
 \end{aligned}$$

Перенос представленной выше схемы в программный код сопровождается выделением двух особых областей сетки в цилиндрических координатах.

Первая особенность счёта возникает на оси, при $r = i = 0$. Использование центральных разностей невозможно, значения параметров при $i = -1$ не определены. Так же необходимо отметить, что при произвольной высоте, заданной переменной k , мы получаем при $i = 0$ значения каждого параметра в количестве J , что невозможно с точки зрения физики – в одной точке может быть только

одно значение. Исходя из этого, значения при $i = 0$ рассчитываются по другим формулам, уже после расчётов в узлах сетки всей остальной области. Учитывая отсутствие сильных разрывов примем, что у всех параметров газа на оси производная равна нулю. Поскольку при $i = -1$ параметры не определены, то используется уравнение правой производной, приравненной к нулю. Получаем значения параметров на оси:

$$f_{0,j,k}^n \approx \frac{4}{3}f_{1,j,k}^n - \frac{1}{3}f_{2,j,k}^n \quad (6)$$

После этого для одного и того же значения k полученные значения усредняются по j .

Вторая особая область сетки появляется при $j = 0$ и $j = J$. Получаем один и тот же угол поворота $\varphi = 0 = 2\pi$. Расчёт этой области «замыкания» ведётся по формулам (2)- (5) для $j = 0$, при этом вместо $(j - 1)$ в формулах используется $(J - 1)$. Полученные значения параметров автоматически переносятся в J .

Таким образом, счёт ведётся в трёх областях. Основная область не содержит особенностей в виде «замыкания» и «оси», она может считаться параллельно с «замыканием». Значения на оси считаются после окончания расчётов в «основной» области и в «замыкании» по формуле (6) и после усредняются, чтобы для каждого значения k при $i = 0$ было лишь одно значение параметра.

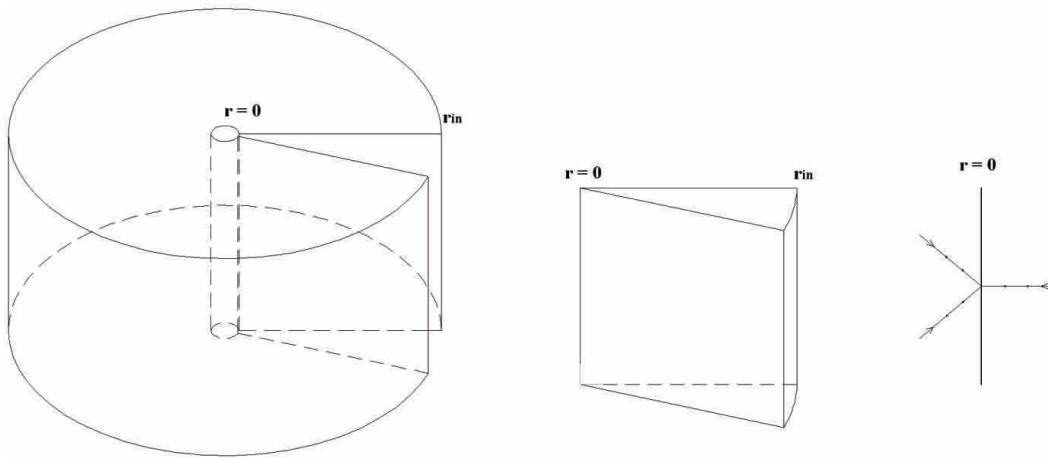


Рис. 1. Выделенные области расчёта

Для проверки правильности счёта по предложенной разностной схеме берётся точное решение ПСУНС [1, 2], описывающее покоящийся в поле силы тяжести газа : составляющие скорости газа во всех точках равны нулю $u = v = w = 0$; температура воздуха линейно падает с ростом высоты

$$T(z) = 1 - k \cdot z = 1 - ((l_* \cdot T_{00})/r_{00}) \cdot z = 1 - 0,1106 \cdot z,$$

где $l_* = 0,0065$ К/м;

плотность воздуха зависит только от высоты:

$$\rho(z) = (1 - 0,1106 \cdot z)^{\nu-1},$$

где $\nu = (\gamma \cdot g)/k = 5,471128$.

Для моделирования был выбран цилиндрический объём воздуха радиусом $r_{00} = 10$ километров и такой же высотой $z_{00} = 10$. Размеры расчётной сетки: $i_{max} = 500$, $j_{max} = 200$, $k_{max} = 500$. На границах расчётной области значения параметров газа полагались неизменными, что определяло граничные условия. Внутри моделируемого объёма по представленным формулам производился расчёт параметров на следующем временном слое в зависимости от значений параметров на слое предыдущем.

Расчеты до 100 000 шагов по времени показали, что отклонение значений конечно-разностного приближения от точного решения не превысило 10^{-10} [3]. Следовательно, представленная явная схема хорошо передаёт известное точное решение для исходной ПСУНС. На рисунке 2 представлено цветовое изображение температуры покоящегося однородного газа, которое передаёт счёт.

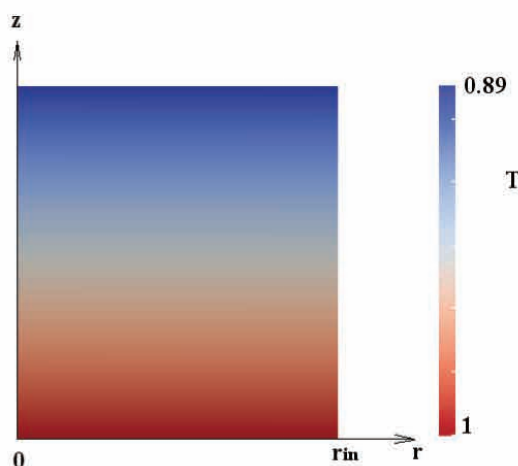


Рис. 2. Цветовое распределение температуры по высоте цилиндра по результатам счёта

Использование модели в предложенном виде требует больших вычислительных мощностей и последующие шаги будут направлены на оптимизацию и распараллеливание счёта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П., Обухов А.Г. Численное моделирование трёхмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Екатеринбург : УрГУПС, 2020.
2. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург : УрГУПС, 2020.
3. Баутин С.П., Кононов С.Н., Левунина Э.С. Адаптация для кластера расчёта по явной схеме одной газодинамической задачи в цилиндрических координатах // Сборник трудов IX международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Новосибирск : ИГИЛ СО РАН, 2020.

**NUMERICAL SIMULATION OF CURRENTS IN RISING SWIRLING FLOWS
USING A DIFFERENCE SCHEME****S.P. Bautin**¹

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: spbautin@mail.ru

S.N. Kononov²

, e-mail: kononovsn@susu.ru

E.S. Levunina³

, e-mail: elvirka@rambler.ru

¹MEPhI, Snezhinsk, Russia²SUSU, Ozersk, Russia³FSUE «PO «Mayak», Ozersk, Russia

Abstract. The paper proposes a variant of solving by the numerical method one gas-dynamic problem posed in the monograph [1]. The proposed complete system of Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates using central finite differences is represented by an explicit difference scheme. A software implementation of the account for the known exact solution of the system has been created. The task of parallelizing actions for processing a model on cluster systems is set, which is necessary to reduce the computation time.

Keywords: numerical methods, complete system of Navier-Stokes equations, rising swirling flows gas.

Дата поступления в редакцию: 11.10.2021