Математические структуры и моделирование
2022. № 3 (63). С. 5–11

УДК УДК 519.21 + 511.3
DOI 10.24147/2222-8772.2022.3.5-11

ЧАСЫ И ВЕРОЯТНОСТЬ

А.Д. Больбот[1]
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: a.bot@ngs.ru
Н.С. Астапов[1,2]
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nika@hydro.nsc.ru

[1]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
[2]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Получено точное решение вероятностной задачи о случайном положении секундной стрелки на циферблате часов. Доказано, что секундная стрелка чаще оказывается ближе к минутной, чем к часовой стрелке. В доказательстве используется равенство единице некоторой конечной суммы для произвольных двух взаимно простых чисел (лемма о лишней единице).

Ключевые слова: часы со стрелками, вероятность, взаимно простые числа.

В [1] показывается, что из всех областей науки математика случайного особенно богата парадоксами, и приводятся многочисленные подтверждающие примеры, возникшие за несколько веков. В [2] критикуется современный подход к преподаванию теории вероятностей и разбираются ошибочные формулировки и решения задач в популярных учебных изданиях. Ниже формулируется условие и приводится решение вероятностной задачи, для которой простой, казалось бы очевидный ответ оказывается верным лишь приближенно.

Представим себе часы с центральной секундной стрелкой, все стрелки которых движутся равномерно, и спросим:

какова вероятность того, что секундная стрелка находится ближе к минутной, чем к часовой в случайный момент времени?

На сформулированный вопрос многие, не задумываясь, ответят: "Ну конечно же одна вторая" — и практически не ошибутся, потому что вероятность очень близка к одной второй, но всё же слегка от неё отличается. Отметим, что похожие задачи можно найти в [3], см. № 26, № 31, № 36. Чтобы разобраться в этом вопросе, проведём сначала мысленный эксперимент с часами, у которых скорости движения стрелок отличаются не так сильно. Пусть, например, минутная стрелка движется вдвое быстрее часовой и вдвое медленнее секундной. Когда часовая стрелка проходит точки $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$, происходят переключения событий ближе-дальше. Эти 4 момента вместе с точкой 0 делят круг на 5 секторов: в первом, третьем и пятом секторе секундная стрелка расположена ближе к минутной, а в остальных двух секторах — к часовой. На рисунке 1 первые три сектора отмечены знаком плюс, а оставшиеся два сектора — знаком минус. Это означает, что $\frac{3}{5}$ времени часовая стрелка находится в плюсовой области,

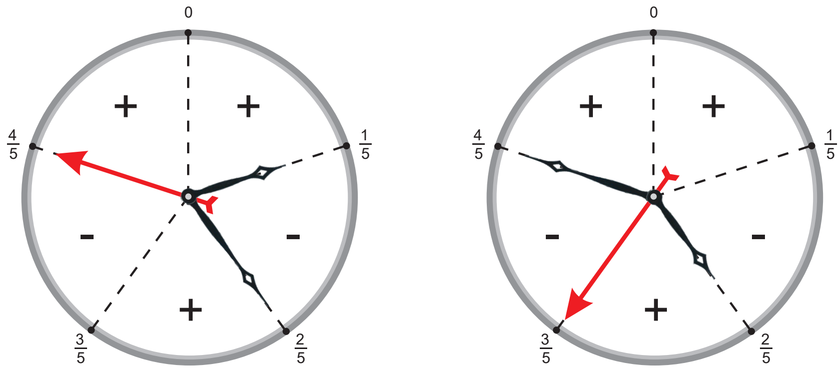

Рис. 1. Часы со стрелками

то есть искомая вероятность равна 0,6. Итак, мы убедились, что вероятность **может** быть отличной от одной второй.

На рисунке видно, что в четырёх точках переключения секундная стрелка проходит через биссектрису угла (тупого или острого) между часовой и минутной стрелками. Однако в точке 0 секундная стрелка тоже проходит через биссектрису угла (нулевого) между часовой и минутной стрелками, но переключения в этой точке нет. Почему? Объяснение очень простое — в этот момент происходит ещё одно переключение, которое и гасит первое. А именно, в этот момент минутная стрелка проходит через часовую. Переключения этого типа в чистом виде можно видеть на примере часов со скоростями 1,4 и 8 для часовой, минутной и секундной стрелок соответственно. Действительно, если часовая стрелка показывает на точку $\frac{1}{3}$, то минутная стрелка, сделав один полный оборот, совпадёт с часовой, а секундная покажет на точку $\frac{2}{3}$. Тогда незадолго до этого момента секундная стрелка была ближе к часовой, а после — ближе к минутной стрелке. Аналогичное переключение происходит и в точке $\frac{2}{3}$. На реальных 12-часовых часах с соотношением скоростей стрелок $1:12:720$ такие переключения наблюдаются в точках $\frac{k}{11}$, $k = 1, 2, \ldots, 10$.

Оставим на время часы и рассмотрим следующую задачу. Для неравных натуральных чисел p и q возьмём два семейства точек, разбивающих интервал, назовём его основным, соответственно на p и q равных частей. Точку разбиения назовём простой, если она входит только в одно семейство и двойной — если в оба. Ясно, что двойные точки внутри интервала могут быть только в случае, если p и q не взаимно просты. Каждому интервалу, заключённому между двумя соседними точками деления, сопоставим знак плюс или минус следующим образом. Первому интервалу (от нуля до первой точки деления) сопоставим знак плюс. Дальнейшим интервалам приписываем знаки согласно правилу: соседним интервалам сопоставляем разные знаки, если их разделяет простая точка, и одинаковые знаки, если точка двойная. Нас будет интересовать вероятность $P^+_{p/q}$ (или $P^-_{p/q}$) попадания точки в положительную (или отрицательную) часть промежутка при её случайном бросании в промежуток. Ясно, что $P^+_{p/q}$ и $P^-_{p/q}$ будут суммами длин соответственно положительных и отрицательных интервалов, если в качестве основного интервала взять $(0;1)$. Заметим, что вероятности не изменятся, если принять другую длину основного интервала, тогда эти суммы следует поделить на длину интервала. Поэтому, в зависимости от удобства будем в качестве основного интервала использовать интервалы разной длины.

Сравним наши вероятности при удвоении параметров p и q. Заметим, что точки разбиения расположены симметрично относительно середины промежутка. Поскольку в случае удвоенных параметров p и q точка $\frac{1}{2}$, то есть середина основного интервала $(0;1)$, будет двойной точкой деления, то знаки интервалов, расположенных симметрично относительно середины, будут одинаковы. Поэтому $P^+_{2p/2q} = P^+_{p/q}$. Проделав достаточное число раз обратные преобразования (то есть сокращения на два), получим $P^+_{p/q} = P^+_{p'/q'}$, где хотя бы одно из чисел p' и q' нечётно.

Пусть p и q имеют разную чётность. В этом случае точка $\frac{1}{2}$, то есть середина основного промежутка $(0;1)$, входит лишь в одно семейство точек деления, следовательно симметричные относительно середины интервалы имеют разные знаки. Поэтому $P^+_{p/q} = P^-_{p/q} = \frac{1}{2}$.

Осталось рассмотреть случай нечётности обоих параметров. Пусть $d = (p,q)$ — наибольший общий делитель чисел p и q. Положим $p = dp'$, $q = dq'$. Тогда весь отрезок разобьётся на d частей с одинаковым расположением точек деления, где каждая следующая часть получается из предыдущей сдвигом $x \to x + \frac{1}{d}$. В силу взаимной простоты чисел p' и q' внутри каждой части двойных точек нет, следовательно внутри этой части знаки интервалов разбиения чередуются, начинаясь и заканчиваясь знаком плюс, в силу нечётности их количества. Поэтому $P^+_{p/q} = P^+_{p'/q'}$. Из полученных свойств следует, что индекс p/q можно сокращать как дробь, без изменения вероятности.

Разберём оставшийся случай. Пусть нечётные числа p и q взаимно просты. В этом случае все точки деления простые. Теперь в качестве основного интервала удобно взять $(0;pq)$, тогда точки деления станут целыми:

$$p, 2p, \ldots, (q-1)p, \quad \text{и} \quad q, 2q, \ldots, (p-1)q\,.$$

Рассмотрим величину $\sigma(t) = (-1)^{[\frac{t}{p}]+[\frac{t}{q}]}$, она меняет знак только в точках, кратных p и q промежутка $(0;pq)$. Следовательно, каждому интервалу $(k;k+1)$ между последовательными точками деления сопоставится знак $\sigma(k)$. Суммируя длины всех таких промежутков с учётом их знака и поделив на длину промежутка, находим равенство $P^+ - P^- = \frac{1}{pq}\sum\limits_{k=0}^{pq-1}\sigma(k)$, где индекс p/q для краткости здесь и далее не указываем, так как он фиксирован. Поскольку $P^+ + P^- = 1$, то отсюда получим равенство

$$P^{+}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{pq}\sum_{k=0}^{pq-1}\sigma(k)\right),\quad P^{-}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{pq}\sum_{k=0}^{pq-1}\sigma(k)\right)$$

Лемма о лишней единице. *Пусть p и q — взаимно простые нечётные числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[\frac{k}{p}]+[\frac{k}{q}]}=1\,.$$

Доказательство. Разделив k с остатками на p и на q получим

$$k=p\left[\frac{k}{p}\right]+r_k,\quad 0\leqslant r_k\leqslant p-1\,.$$

$$k=q\left[\frac{k}{q}\right]+s_k,\quad 0\leqslant s_k\leqslant q-1\,.$$

Заметим, что отображение $k\ \to\ (r_k,s_k)$ инъективно на множестве $k\in\{0,1,\ \ldots,\ pq-1\}$. Действительно, пусть для некоторых k и k' остатки одинаковы:

$$k'=p\left[\frac{k'}{p}\right]+r_k=q\left[\frac{k'}{q}\right]+s_k.$$

Но тогда разность $k-k'$ делится на p и q. В силу взаимной простоты чисел p и q эта разность делится на pq, что возможно только при $k=k'$. Инъективность можно доказать и с помощью китайской теоремы об остатках [4, с. 50]

Таким образом, когда k пробегает последовательность $k\in\{0,1,\ \ldots,\ pq-1\}$, последовательность (r_k,s_k) пробегает всё множество пар

$$\{(i,j);\ i=0,1,\ldots,\ p-1,\ j=0,1,\ldots,q-1\}\,.$$

Так как p и q нечётные, то

$$(-1)^{[\frac{k}{p}]+[\frac{k}{q}]}=(-1)^{p[\frac{k}{p}]+q[\frac{k}{q}]}=(-1)^{k-r_k+k-s_k}=(-1)^{r_k+s_k}\,.$$

Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[\frac{k}{p}]+[\frac{k}{q}]}=\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{r_k+s_k}=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{i+j}=\left(\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{i}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{j}\right)=1\,.$$

Лемма доказана.

Из леммы следуют равенства

$$P^{+}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{pq}\right),\quad P^{-}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{pq}\right)\,.$$

Применим данное рассмотрение к следующей ситуации. Два объекта A и B начинают двигаться одновременно из одной и той же точки в одном направлении по круговой дистанции с отношением скоростей, равной несократимой дроби $\frac{p}{q} > 1$. Длину круговой дистанции выберем за единицу длины. Отношение времени, за которое каждый объект проходит полный круг, обратно пропорционально его скорости, поэтому за счёт выбора единицы времени можно считать, что скорости объектов A и B равны соответственно $\frac{1}{q}$ и $\frac{1}{p}$. Это означает, что объект A проходит полный круг за q, а B — за p единиц времени. Впервые после старта они встретятся на месте старта через pq единиц времени.

Какова будет вероятность того, что в выбранный случайно момент времени из промежутка $(0, pq)$ объект A будет находиться ближе к объекту B, чем к месту старта?

Если объект A находится ближе к объекту B, чем к месту старта в некоторый момент, то этому моменту и точке, в которой находится объект B, припишем знак плюс. Если, наоборот, дальше, то — знак минус. Точки и моменты, в которых указанные расстояния равны, назовём точками и моментами переключения. Имеем два типа точек переключения

1) Объект B проходит место старта.

2) Объект A находится в средней точке между B и местом старта на большей или меньшей дуге между точкой B и местом старта.

Так как объект B проходит место старта в моменты kp, $k = 0, 1, 2 \ldots,$ то моменты первого типа разбивают временной промежуток $(0; pq)$ на q равных частей.

Пусть теперь $t \in (0, pq)$ - момент переключения второго типа. Вместе с объектом B отправим по кругу объект M с половинной скоростью $\frac{1}{2p}$. Тогда к моменту переключения второго типа объекты A и M пройдут соответственно расстояния $\frac{t}{q}$ и $\frac{t}{2p}$. В точке переключения второго типа это означает равенство $\frac{t}{q} - \frac{t}{2p} = \frac{k}{2}$ при целом k. Отсюда $t = \frac{kpq}{2p-q}$, $k \in \mathbb{N}$. Эти моменты разбивают временной интервал $(0; pq)$ на $2p - q$ равных частей.

Таким образом, мы получили разбиение временного интервала двумя семействами точек. Поэтому, как показано выше, искомая вероятность равна $P^+_{2p-q/q}$.

Если q нечётно, то $2p - q$ тоже нечётно и взаимно просто с q. В таком случае, $P^+_{2p-q/q} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{q(2p-q)}\right)$.

Пусть q чётно, но не делится на 4. Тогда p нечётно, поэтому сокращение индекса возможно только на 2 и в этом случае его числитель окажется чётным. Следовательно, в таком случае $P^+_{2p-q/q} = \frac{1}{2}$. Если же q делится на 4, сокращение индекса возможно также только на два, и тогда знаменатель останется чётным. Следовательно, вероятность опять будет равна $\frac{1}{2}$. Таким образом, при чётном q вероятность $P^+_{2p-q/q} = \frac{1}{2}$.

Объектами A и B могут быть, например, спортсмены на круговой дистанции, стартовавшие одновременно из одной точки в одном направлении. Жаль спортсменов, так как в случае больших числителей и знаменателей, им придётся долго бегать, прежде чем они встретятся в месте старта, а в случае иррационального отношения скоростей этого не случится никогда. Заменим их планетами, двигающимися по концентрическим круговым орбитам в одном направлении с неравными постоянными угловыми скоростями и рассмотрим случай иррационального отношения $\alpha > 1$ этих скоростей. Здесь возникает проблема выбора промежутка, в котором выбирается случайный момент, ведь на бесконечном промежутке выбор этой случайной величины не может быть равномерным. Выбрав момент, когда планеты окажутся на одном луче, выходящем из центра, получим луч, от которого планеты стартуют одновременно. Остаётся проблема с заключительным моментом, ведь на выбранном луче в иррациональном случае ситуация не повторится никогда. Однако повтор ситуации можно создать за счёт выбора рационального приближения числа α со сколь угодно высокой степенью точностью. Вычислив предел вероятности для этого рационального приближения, перейдём к пределу при стремлении точности приближения к нулю. Возникает вопрос: существует ли этот предел?

Покажем, что предел существует и равен $\frac{1}{2}$. Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$, где $\frac{p_n}{q_n}$ — последовательность различных несократимых дробей. Можно при этом считать, что знаменатели нечётны. Поскольку последовательность $\frac{p_n}{q_n}$ фундаментальна, то, выбрав произвольно $\varepsilon > 0$, найдём такой номер n_0, что

$$n > m \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_m}{q_m}\right| < \varepsilon$$

Фиксируя в неравенстве $m = n_0$, получим

$$0 < \frac{1}{q_{n_0}q_n} \leqslant \frac{|p_n q_{n_0} - q_n p_{n_0}|}{q_{n_0}q_n} < \varepsilon\,.$$

Поэтому $q_n \to \infty$. Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} P^+_{2p_n - q_n/q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(2p_n - q_n)q_n}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Завершая, ответим на вопрос, поставленный в начале. На часах с 12-часовым циферблатом стрелки движутся со скоростями с соотношением $1 : 12 : (12 \cdot 60)$ соответственно для часовой, минутной и секундной стрелок. Перейдём в систему отсчёта часовой стрелки. Тогда часовая стрелка будет стоять на месте и служить местом старта, а минутная и секундная стрелки станут объектами B и A с отношением скоростей $\frac{12\cdot 60-1}{11} = \frac{719}{11}$. В силу несократимости этой дроби и нечётности знаменателя, получим искомую вероятность

$$P^+_{1427/11} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{11 \cdot 1427}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{31394},$$

Это означает, что в течение 12 часов секундная стрелка находится ближе к минутной, чем к часовой приблизительно на 2,75 секунды дольше.

Литература

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М. : Мир, 1990. 240 с.

2. Виноградов О.П. Теория вероятностей и ЕГЭ // Математическое образование. 2020. Т. 94, № 2. С. 29–31.
3. Эвнин А.Ю., Лернер Э.Ю., Игнатов Ю.А., Григорьева И.С. Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах // Математическое образование. 2017. Т. 84, № 4. С. 45–60.
4. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М. : Мир, 1987. 427 с.

THE HOUR AND PROBABILITY

A.D. Bolbot[1]
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: a.bot@ngs.ru
N.S. Astapov[1,2]
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: nika@hydro.nsc.ru

[1]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
[2]Lavrentyev Institute of Hudrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. The exact solution of the probabilistic problem about the random position of the second hand on the dial hours is obtained. It has been proven that the second hand is often closer to the minute hand than to the hour hand. In this proof equality to one for some finite sum for any two coprime numbers (the extra one lemma) is used.

Keywords: clock with arrows, probability, coprime numbers.

Дата поступления в редакцию: 07.05.2022