Математические структуры и моделирование
2022. № 3 (63). С. 97–100

УДК 517
DOI 10.24147/2222-8772.2022.3.97-100

МЕТОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРИМЕРОВ И КОНТРПРИМЕРОВ В КОГНИТИВНО-РЕФЛЕКСИВНОМ СТИЛЕ ПОНИМАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.А. Еровенко
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: erovenko@bsu.by
В.А. Прокашева
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: prover@bsu.by

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Аннотация. Проблема методических функций использования примеров и контрпримеров в когнитивно-рефлексивных проблемных ситуациях при изучении содержательных разделов высшей математики специально не изучалась с точки зрения понимания математики. С одной стороны, примеры и контрпримеры помогают осмыслить абстрактную формулировку математических определений, а с другой стороны, с их помощью можно проверить математическое утверждение на его истинность. В статье анализируя сущность контрпримера, как важнейшего когнитивно-рефлексивного понятия математического знания, поскольку его образовательная роль в познании методически недооценивается не только нематематиками, но иногда даже преподавателями высшей математиками.

Ключевые слова: функции примеров и контрпримеров, когнитивно-рефлексивный стиль преподавания, проблема понимания разделов высшей математики..

Начать хотелось бы с того, что хорошая тренировка мозга идёт только на пользу любому студенту, изучающему математику. Когнитивно-рефлексивный стиль изложения таких важных разделов математики как математический и функциональный анализ влияет не только на уровень обоснования математики, но еще и с помощью специально подобранных контрпримеров способствует пониманию указанных разделов высшей математики в том числе и для студентов-нематематиков.

Кроме того, проблема правильной и убедительной аргументации в формировании математического мышления студентов-нематематиков – это еще и сложная психологическая проблема *эффекта исполнителя* при поиске языка изложения математической темы на лекции, способного минимизировать пассивность студента. Однако без понимания точности используемых математических понятий и необходимости используемых в формулировке теоремы условий ее доказательство часто затруднено.

Иногда некоторые условия или предположения теорем, находясь как бы в тени формулировки теоремы, кажутся отчасти несущественными, а заключение теоремы при изучении доказательства в такой ситуации представляются справедливыми и без них. В этом и заключается методологическая роль контрпримеров в когнитивно-проблемной ситуации, когда для понимания утверждения возникает потребность в анализе разных условий теоремы.

В настоящее время, несмотря на все инновационные преобразования университетского математического образования, важнейшей способностью студентов, изучающих в любом объеме разделы курса высшей математики является их когнитивно-рефлексивное умение анализировать новую для них информацию на ее истинность или ложность.

Одним из эффективных средств познания в этом философско-методологическом направлении для повышения уровня понимания математики, а особенно математического анализа, являются контрпримеры, которые явно показывают, что данное математическое утверждение даже при незначительном изменении его формулировки может быть ложным.

В общей ситуации методическая функция контрпримеров проявляется в понимании обязательности одного или всех условий теоремы. Указанная методика обучения математике, состоит «в использовании контрпримеров для активизации процесса обучения математическому анализу на его начальном этапе для лучшего понимания студентами как смысла вводимых понятий, так и логики изложения материала» [1, с. 82]. Так в курсе математического анализа можно даже рассмотреть пример *патологической функции* Вейерштрасса, являющейся непрерывной, но не дифференцируемой.

Контрпримеры либо демонстрируют ограниченность действия определения или правила; либо опровергают конкретное ошибочное утверждение, полученное, например, отбрасыванием отдельных предположений исходного утверждения или его обращением; либо, наконец, показывают только достаточность или только необходимость условий и предположений в утверждении [2].

Наш опыт преподавания отдельных разделов высшей математики для нематематических специальностей по проблемно-ориентированному принципу показал, что несмотря на появление новых инновационных компьютерно-информационных технологий, все же главный принцип когнитивно-рефлексивного стиля математического образования остается прежним, а именно, сначала определения и их свойства, утверждения и теоремы, а также их следствия, то есть сначала теория, а затем примеры, контрпримеры и соответствующие приложения теории.

Философско-методологическая роль математического доказательства состоит в обосновании истинности математического рассуждения, пониманию которого способствуют также специально подобранные примеры и контрпримеры для осознания важности и необходимости используемых определений и утверждений. С точки зрения *критического мышления* при изучении разделов высшей математики у студентов-естественников в их образовательной деятельности должен вырабатываться определенный исследовательский уровень, который может стать отправной точкой для дальнейшего развития профессионального логического мышления [3].

Заметим также, что примеры, иллюстрирующие математические понятия и явно показывающие справедливость математических утверждений, или контрпримеры, опровергающие некоторые предположения, способствуют развитию критически-рефлексивного мышления, выполняющего функции правильности математических решений и новых идей.

Актуальной задачей общего математического образования студентов естественнонаучных специальностей является проблема «поддержания равновесия» между формальной и неформальной составляющими точного математического знания. Так категоричность когнитивно-рефлексивных математических рассуждений и утверждений характеризует культуру математики, отличающуюся от суждений представителей естественных наук. А *методическая функция*примеров и контрпримеров в математике проявляется еще и в предостережении от ошибочных обобщений и ложных аналогий, например, при переносе утверждений из математического анализа в функциональный анализ.

В качестве обосновательного примера можно указать на статью математиков, в которой «приводятся примеры, показывающие, что в общих метрических пространствах не выполняются классические теоремы о непрерывных функциях: Вейерштрасса об ограниченности и достижении граней, а также теорема Кантора о равномерной непрерывности» [4, с. 3]. Так с точки зрения когнитивно-рефлексивного стиля понимания высшей математики целесообразно привести примеры, показывающие, что теоремы математического анализа в метрических пространствах могут не выполняться, используя анализ когнитивных причин, приводящих в общих метрических пространствах, то есть в функциональном анализе, к разным результатам. Образовательная стратегия и методическая функция таких примеров состоит еще в том, чтобы обратить внимание студентов на ряд «неприятных» вопросов или «опасных» моментов, при встрече с которыми, не имея достаточного опыта, можно дать неправильные ответы по сути понимания [5].

В заключение заметим, что, не умаляя важную роль иллюстративных примеров в высшей математике, которые еще показывают осмысленность математического утверждения, методическая функция контрпримеров, прежде всего, проявляется в особой когнитивно-рефлексивной процедуре, показывающей, что некоторое математическое утверждение может быть лишено смысла.

Такая методика преподавания избранных тем и отдельных разделов высшей математики для студентов-нематематиков позволяет им более глубоко осмыслить проблемный вопрос, делая его более понятным. Построение таких контрпримеров в хорошо продуманном курсе разделов высшей математики по сути является неотъемлемой частью когнитивно-рефлексивного стиля *математического мышления*, так как благодаря им можно обосновывать, аргументировать и опровергать. Справедливости ради, следует также отметить, что использования контрпримеров при изучении математики, несмотря на широкий диапазон их применения, не мешает формировать приемы критического мышления при формально-логическом анализе задач алгоритмического типа.

Литература

1. Климчук С. Контрпримеры в курсе математического анализа / Иванов О, Климчук С. Математический анализ для первокурсников. М.: МЦНМО, 2013. С. 79-136.
2. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. М.: Высшая школа, 2007. 543 с.
3. Еровенко В.А., Прокашева В.А. Развитие математической креативности студентов в ходе применения инновационных подходов преподавания курса высшей математики // Инновации в образовании. 2020. № 2. С. 12-23.
4. Порошкин А.А., Порошкин А.Г. Три примера в анализе // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. 2011. Вып. 13. С. 3-10.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. 3-е издание. М.: Издательство ЛКИ, 2010. 248 с.

METHODICAL FUNCTIONS OF EXAMPLES AND COUNTER-EXAMPLES IN COGNITIVE-REFLEXIVE STYLE OF UNDERSTANDING HIGHER MATHEMATICS

V.A. Erovenko
Dr.Sci., professor, e-mail: erovenko@bsu.by
V.A. Prokasheva
Ph.D., asso professor, e-mail: prover@bsu.by

Belarus State University, Minsk, Belarus'

Abstract. The problem of methodological functions of examples and counterexamples in cognitive-reflexive problem situations in the study of meaningful sections of higher mathematics has not been specifically studied in terms of understanding mathematics. On the one hand, examples and counterexamples help to comprehend the abstract formulation of mathematical definitions, and on the other hand, with their help you can test the mathematical statement for its truth. The article analyzes the essence of the counterexample as the most important cognitive-reflective concept of mathematical knowledge. Its educational role in cognition is methodically underestimated not only by non-mathematicians, but even by teachers of higher mathematicians.

Keywords: functions of examples and counterexamples, cognitive-reflexive teaching style, the problem of understanding higher mathematics..

Дата поступления в редакцию: 10.09.2022