Математические структуры и моделирование
2022. № 4 (64). С. 22–28

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2022.4.22-28

О МОМЕНТАХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Получены оценки для моментов симметрических функций от величин из стационарных последовательностей, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания. Эти оценки обобщают аналогичные результаты, имеющиеся к настоящему времени

Ключевые слова: симметрические функции, равномерно сильное перемешивание, оценки для моментов.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена вещественнозначная функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ (то есть, определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем предполагать, что f удовлетворяет следующим условиям:

A_1. Симметричность: $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

A_2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

A_3. Для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant g(x_{k+1}, , ..., x_n)$, где функция g удовлетворяет условиям A_1, A_2 и условию

A_3': $|g(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant g(x_{k+1}, , ..., x_n)$.

(Согласно сказанному выше $f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$.)

Если функция f удовлетворяет условиям A_1, A_2 и A_3, то будем говорить, что f удовлетворяет условиям $A(g)$, а если удовлетворяет условиям A_1, A_2 и A_3, где $g = f$ то говорим, что f удовлетворяет условиям $A(f)$.

Из $A_3(g)$ вытекает

$$|f(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant |f(x_1, x_2, ..., x_{k-1})| + |g(x_k)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_1, x_2, ..., x_{k-l})| + |g(x_{k-l+1})| + ... + |g(x_k)|, \ 1 \leqslant l \leqslant k. \qquad (1)$$

Многочисленные примеры функций, удовлетворяющих условиям $A(g)$ и $A(f)$ приведены в [1].

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n, \ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, $b > 0, n = 1, 2, ...$ Будем обозначать

$$X_{k,m}(b) = f\left(\frac{\xi_k}{b}, ..., \frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_k(b) = X_{1,k}(b), \quad \overline{X}_k(b) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |X_j(b)|,$$

$$Y_{k,m}(b) = g\left(\frac{\xi_k}{b}, ..., \frac{\xi_m}{b}\right), \quad Y_k(b) = Y_{1,k}(b), \quad Z_k(b) = g\left(\frac{\xi_k}{b}\right),$$

$$X_k = X_k(1),\ Y_k = Y_k(1),\ Z_k = Z_k(1),\ k, n, m \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ – σ -алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $x > 0$ и $k \leqslant n$, а функция f удовлетворяет условиям A. Если последовательность $\{c_n\}$ такова, что*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то при любых $x > 0$

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть $E_i = \{\overline{X}_{i-1}(c_n) < 2x + \varepsilon \leqslant |X_i(c_n)|\},\ i = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\}$.

В силу свойства A_3 и (1)

$$|X_n(c_n) - X_k(c_n)| \leqslant \sum_{j=k+1}^{k+m} |Z_j(c_n)| + |Y_{k+m+1,n}(c_n)|,$$

так что при $k + m \leqslant n$

$$\{|X_k(c_n)| \geqslant 2x + \varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m},\ |Y_{k+m+1,n}(c_n)| < \varepsilon\} \subseteq \{|X_n(c_n)| \geqslant x\}$$

то есть

$$\{|X_n(c_n)| < x\} \subseteq \{|X_k(c_n)| < 2x+\varepsilon\} \cup \{|Y_{k+m+1,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\},$$

откуда

$$\{|X_n(c_n)| < x, E_k\} \subseteq \{|Y_{k+m+1,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon, E_k\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}, E_k\right\}. \quad (2)$$

С помощью (2) и условия φ-перемешивания получаем

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\} \leqslant \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \sum_{k=1}^{k} \mathbb{P}\{|X_k(c_n)| < x,\ E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \sum_{k=1}^{k} \mathbb{P}\{|Y_{k+m+1,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon, E_k\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m)\right) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{E_k\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\} \leqslant \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \gamma \mathbb{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x+\varepsilon\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\}.$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 2. *Если последовательность* $\{c_n\}$ *и* $m > 0$ *таковы,*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то при любом $x > 0$

$$\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \frac{1}{1-\gamma} \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Z_k(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < 2x+\varepsilon \leqslant |X_k(c_n)|\}$, $k = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x+\varepsilon\}$. В силу свойства A_3 и (1)

$$|X_n(c_n)| \leqslant |X_{k-1}(c_n)| + \sum_{j=k}^{k+m} |Z_j(c_n)| + |Y_{k+m,n}(c_n)|,$$

откуда следует

$$\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x+2\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\} \subseteq \{E_k,\ |Y_{k+m,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon\}. \qquad (3)$$

Аналогично выводится

$$\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x+2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant 2x+\varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\},$$

следовательно

$$\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x+2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} =$$

$$= \left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x+2\varepsilon,\ \overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant 2x+\varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\}. \qquad (4)$$

С помощью (4) получаем $\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon\} \leqslant$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| \geqslant \frac{x}{m}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon, \overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| \geqslant \frac{x}{m}\right\} = \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon, E_k, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| < \frac{x}{m}\right\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| \geqslant \frac{x}{m}\right\}. \tag{5}$$

Из соотношений (3), (5) и условия φ-перемешивания следует

$$\mathbb{P}\{X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon\} \leqslant \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\{E_k,\ |Y_{k+m,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| \geqslant \frac{x}{m}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| \geqslant \frac{x}{m}\right\} + \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m)\right) \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\{E_k\} =$$

$$\leqslant \lambda \mathbb{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))| \geqslant \frac{x}{m}\right\}.$$

Из этого соотношения с помощью Леммы 1 выводим утверждение леммы. ■

Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\sigma_n^2 = \mathbb{E}S_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$. К последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равномерно интегрируема. Существенный прогресс в предельных теоремах для последовательностей с φ-перемешиванием достигнут М. Пелиград в [2] на основе доказательства того, из равномерной интегрируемости $\{\sigma_n^{-2} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i^2\}$ следует равномерная интегрируемость $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$.

Получим здесь аналогичный результат, где вместо сумм S_n участвуют функции $f(\xi_1, ..., \xi_n)$, удовлетворяющие условиям $A(g)$.

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $A(g)$, $E|Z_1(c_n))|^p < \infty$, а последовательность $\{c_n\}$ и $m > 0$ таковы,*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1.$$

Тогда из равномерной интегрируемости последовательности $\left\{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |Z_j(c_n))|^p\right\}$ следует равномерная интегрируемость последовательности $\{|X_n(c_n)|^p\}$.

Доказательство. Если $E|Z_1(c_n))|^p < \infty$,то в силу (1) $E|X_n(c_n))|^p < \infty$. Имем

$$\mathbb{E}\{|\xi|^p, |\xi| \geqslant N\} = -\int\limits_N^\infty x^p\, d\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\} = N^p\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant N\} + p\int\limits_N^\infty x^{p-1}\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\}\, dx.$$

В силу леммы 2 при $N \geqslant 1$

$$\mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geqslant (3+2\varepsilon)N\} \leqslant (3+2\varepsilon)^p N^p \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant N(3+2\varepsilon)\}+$$

$$+p(3+2\varepsilon)^p\int\limits_N^\infty x^{p-1}\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x+2\varepsilon\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma}\mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geqslant N\}+$$

$$+\frac{m^p(3+2\varepsilon)^p}{(1-\gamma)}\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)|^p, |\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)| \geqslant \frac{N}{m}\right\}. \tag{6}$$

Пусть последовательность $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n))|^p\right\}$ равномерно интегрируема, то есть

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)|^p, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)| \geqslant N\right\} = 0$$

и пусть

$$R = \lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\left\{|X_n(c_n)|^p, |X_k(c_n)| \geqslant N\right\}.$$

Из равномерной интегрируемости $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n))|^p\right\}$ следует

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)|^p < \infty,$$

а из (6) при $N = 1,\ \tau = \dfrac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1$

$$\mathbb{E}|X_n(c_n)|^p \leqslant (3+2\varepsilon)^p + \mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geqslant (3+2\varepsilon)\} \leqslant (3+2\varepsilon)^p+$$

$$+\tau\mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p\} + \frac{m^p(3+2\varepsilon)^p}{(1-\gamma)}\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)|^p < \infty, \tag{7}$$

так что $0 \leqslant R < \infty$, а из (6) вытекает $R \leqslant \tau R$, следовательно $R = 0$ и последовательность $\{|X_n(c_n)|^p\}$ равномерно интегрируема. ■

Покажем, как с помощью теоремы 2 можно получать оценки для моментов величин $X_n(c_n)$. Пусть $\mathbb{E}|Z_1(c_n))|^p < \infty$. Тогда в силу (6) и (7)

$$\mathbb{E}|X_n(c_n)|^p \leqslant A + B\,\mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k(c_n)|^p, \tag{8}$$

гле A и B не зависят от n, а если $\left\{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|Z_j(c_n))|^p\right\}$ равномерно интегрируема, то $\sup\limits_{n\geqslant 1}\mathbb{E}|X_k(c_n)|^p<\infty$.

Будем говорить, что для функции f выполнено условие A_4, если при любом $\lambda>0$

$$f(\lambda x_1,...,\lambda x_n)=\lambda f(x_1,...,x_n).$$

В большинстве примеров, приводимых в [1], функции f удовлетворяют условию A_4 (в том числе так называемые симметрические калибровочные функции).

Есди функция f удовлетворяет условиям $A(g)$ и A_4, то из оценок (5) получаем следующий результат, обобщающий теорему 2 из [3] и лемму 18.5.1 из [4].

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям A_1-A_4 и пусть $0<q<p,\quad \|Z_1\|_p=\mathbb{E}^{1/p}|Z_1|^p<\infty$. Тогда*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|X_n\|_p\leqslant A\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|Y_n\|_q+B\|\max_{1\leqslant k\leqslant n}Z_k\|_p$$

где A и B не зависят от n.

Доказательство. Пусть $0<q<p$, а $\varepsilon>0,\ m>0$ и $\gamma>\varphi(m)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Обозначим $c_n=N\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\|Y_k\|_q$, где $N>0$ таково, что

$$\varphi(m)+\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbb{P}\{|Y_k|\geqslant\varepsilon c_n\}\leqslant\varphi(m)+\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbb{E}|Y_k|^q}{\varepsilon^q c_n^q}\leqslant\gamma,\quad\frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma}<1.$$

Так так $\{c_n\}$ неубывающая последовательность, то при $k\leqslant n$ и при любом $x>0$ из леммы 2 следует

$$\mathbb{P}\{|X_k|\geqslant(3x+2\varepsilon)c_n\}\leqslant\frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_k|\geqslant xc_n\}+\frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Z_k|\geqslant\frac{xc_n}{m}\right\}$$

откуда аналогично (8) выводим

$$\mathbb{E}|X_k|^p\leqslant Ac_n^p+B\mathbb{E}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Z_j|^p,\ k\leqslant n \tag{9}$$

где $A>0$ и $B>0$ не зависят от n. Из последнего соотношения следует утверждение теоремы. ■

Пусть $X_n=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i,\ p>2,\ \mathbb{E}\xi_1=0,\ \sigma_n^2=\mathbb{E}X_n^2\to\infty,\ n\to\infty$. Тогда σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 [4, теорема 18.2.3], которая при $n\to\infty$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности [5, с. 26], так что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k\sim\sigma_n$. Далее, при $p>2$

$$\mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^p\leqslant n\mathbb{E}|\xi_1|^p=o(\sigma_n^p),$$

и из теоремы 2 следует неравенство И.А. Ибрагимова (лемма 18.5.1 из [4]): $\mathbb{E}|X_n|^p\leqslant C\sigma_n^p$, где $C>0$ не зависит от n.

Литература

1. Гринь А.Г. О предельных теоремах для функций от независимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 2(38). С. 5–15.
2. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, No. 4, P. 1304–1312.
3. Гринь А.Г. О моментах симметрических функций зависимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 4(40). С. 17–23.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука. 1985. 141 с.

ON THE MOMENTS OF FUNCTIONS OF DEPENDENT RANDOM VARIABLES

A.G. Grin
Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Estimates for the moments of symmetric functions of variables from stationary sequences that satisfy the condition of uniformly strong mixing are obtained. These estimates generalize similar results existing by now.

Keywords: symmetric functions, uniformly strong mixing condition, norming sequences, estimates for the moments.

Дата поступления в редакцию: 11.10.2022