Математические структуры и моделирование
2022. № 4 (64). С. 44–59

УДК 512.54:512.55:512.58
DOI 10.24147/2222-8772.2022.4.44-59

О КАТЕГОРИЯХ ГРУППОВЫХ АФФИННЫХ (Γ, λ)-СХЕМ И (Γ, λ)-КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР ХОПФА

С.Г. Казаков
аспирант, e-mail: kazakovsg@gmail.com

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. В работе рассматривается обобщение понятий (групповых) аффинных схем, а также (групповых) аффинных суперсхем как функторов, представимых $\mathbb{Z}_2$-градуированными алгебрами, на случай произвольной градуировки.
Приведено обобщение известной теоремы об антиэквивалентности категорий групповых аффинных схем и коммутативных алгебр Хопфа.

Ключевые слова: коммутационный фактор, градуировка, симметрическая моноидальная категория, аффинная схема, супергруппа, алгебра Хопфа.

Введение

Пусть $\Bbbk$ – область целостности. Всюду далее под кольцом подразумевается коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, а под алгеброй над $\Bbbk$ – унитальная $\Bbbk$-алгебра.

Для данной абелевой группы Γ через $\Gamma\text{-}\mathsf{Mod}_\Bbbk$ и $\Gamma\text{-}\mathsf{Alg}_\Bbbk$ обозначаются категории Γ-градуированных $\Bbbk$-модулей и Γ-градуированных (цветных) $\Bbbk$-алгебр с сохраняющими градуировку гомоморфизмами [1, 4].

1. Групповые функторы из категорий с конечными копроизведениями

Пусть далее C – некоторая категория с конечными копроизведениями, а $I \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ – инициальный объект в ней.[1] В такой категории для любой пары объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ определён объект $A \sqcup B$ и пара морфизмов

$$\varkappa^1_{A,B}\colon A \to A \sqcup B, \quad \varkappa^2_{A,B}\colon B \to A \sqcup B,$$

удовлетворяющих универсальному свойству: для любой пары морфизмов $f\colon A \to C$, $g\colon B \to C$ в C существует и единственный морфизм, обозначаемый $f \nabla g\colon A \sqcup B \to C$ и называемый *диагональным копроизведением* f и g,

[1] Такой объект обязательно существует [2, Ch. 2],[3, §3.5].

который делает коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varkappa^1_{A,B}"] \arrow[dr, "f"'] & A \sqcup B \arrow[d, "f \nabla g"'] & B \arrow[l, "\varkappa^2_{A,B}"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}.$$

Как следствие, для любых объектов $A, B, X, Y \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ и морфизмов $\varphi\colon A \to X$, $\psi\colon A \to Y$ существует единственный морфизм

$$\varphi \sqcup \psi\colon A \sqcup B \to X \sqcup Y, \text{ [2]}$$

называемый *копроизведением произведением* φ и ψ, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varkappa^1_{A,B}"'] & & & X \arrow[dl, "\varkappa^1_{X,Y}"] \\
& A \sqcup B \arrow[r, "\varphi \sqcup \psi"] & X \sqcup Y & \\
B \arrow[rrr, "\psi"'] \arrow[ur, "\varkappa^2_{A,B}"] & & & Y \arrow[ul, "\varkappa^2_{X,Y}"']
\end{tikzcd}.$$

Рассматривая копроизведение $\sqcup$ как ковариантный бифунктор $\sqcup\colon \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ на C, на этой категории естественным образом определяют структуру симметрической моноидальной категории

$$\mathbf{C} = \big\langle \mathsf{C}, \sqcup, \alpha, I, \lambda, \rho, \sigma \big\rangle,$$

в которой функторные изоморфизмы

$$\begin{gathered}
\alpha\colon (_ \sqcup _) \sqcup _ \xrightarrow{\approx} _ \sqcup (_ \sqcup _) \\
\lambda\colon\ I \sqcup _ \xrightarrow{\approx} \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}, \quad \rho\colon _ \sqcup I \xrightarrow{\approx} \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}, \\
\sigma\colon \sqcup \xrightarrow{\approx} \sqcup \circ \tau, \text{ [3]}
\end{gathered}$$

таковы, что для любых объектов $A, B, C \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ изоморфизмы

$$\begin{gathered}
\alpha_{A,B,C}\colon (A \sqcup B) \sqcup C \xrightarrow{\sim} A \sqcup (B \sqcup C) \\
\lambda_A\colon I \sqcup A \xrightarrow{\sim} A, \qquad \rho_A\colon A \sqcup I \xrightarrow{\sim} A \\
\sigma_{A,B}\colon A \sqcup B \xrightarrow{\sim} B \sqcup A
\end{gathered}$$

делают коммутативными диаграммы

---

[2] При этом $\varphi \sqcup \psi = (\varkappa^1_{X,Y} \circ \varphi) \nabla (\varkappa^2_{X,Y} \circ \psi)$, где ∇ соответствует паре $(\varkappa^1_{A,B}, \varkappa^2_{A,B})$.

[3] Здесь τ – переставляющий бифунктор на категории C.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dl, "\varkappa^1_{A,B}"'] \arrow[dddddrr, bend left, "\varkappa^1_{A,B\sqcup C}"] & & \\
 & A\sqcup B \arrow[ddddl, bend right, "\varkappa^1_{A\sqcup B,C}"'] & & & \\
 & & B \arrow[ul, "\varkappa^2_{A,B}"] \arrow[dr, "\varkappa^1_{B,C}"] & & \\
 & & & B\sqcup C \arrow[ddr, "\varkappa^2_{A,B\sqcup C}"'] & \\
 & & C \arrow[ur, "\varkappa^2_{B,C}"'] \arrow[dll, "\varkappa^2_{A\sqcup B,C}"'] & & \\
(A\sqcup B)\sqcup C \arrow[rrrr, "\alpha_{A,B,C}"] & & & & A\sqcup(B\sqcup C)
\end{tikzcd}
,\qquad
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\varkappa^1_{I,A}"'] \arrow[d, "\iota_A"'] \arrow[dr, "\varkappa^2_{A,I}"] & \\
I\sqcup A \arrow[r, "\lambda_A"] & A & A\sqcup I \arrow[l, "\rho_A"'] \\
 & A \arrow[ul, "\varkappa^2_{I,A}"] \arrow[u, "1_A"'] \arrow[ur, "\varkappa^1_{A,I}"'] &
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\varkappa^1_{A,B}"'] \arrow[dr, "\varkappa^2_{B,A}"] & \\
A\sqcup B \arrow[rr, "\sigma_{A,B}"] & & B\sqcup A \\
 & B \arrow[ul, "\varkappa^2_{A,B}"] \arrow[ur, "\varkappa^1_{B,A}"'] &
\end{tikzcd}
,
$$

в которых $\iota_A\colon I\to A$ – единственный элемент множества $\mathrm{Hom}(I,A)$.

Для $\mathbf{C}$, как и для любой другой симметрической моноидальной категории, определены понятия *группоида*, *когруппоида*, *бигруппоида*, *моноида*, *комоноида*, *бимоноида* и *моноида Хопфа* [7, Ch.1], [8, §2]. При этом, для каждого объекта $A\in\mathrm{Ob}\mathsf{C}$ существует единственная структура моноида:

$$\langle A,\ 1_A\nabla 1_A,\ \iota_A\rangle,$$

в которой единичным морфизмом является $\iota_A\colon I\to A$, а умножением – диагональное копроизведение двух копий тождественного морфизма 1_A. Она примечательна тем, что с ней согласована любая структура комоноида

$$\langle A,\ \Delta,\ \varepsilon\rangle,$$

на A, определяемая морфизмами $\Delta\colon A\to A\sqcup A$ и $\varepsilon\colon A\to I$, для которых коммутативны *коассоциативная* и *коунитальные диаграммы*:

$$
\begin{tikzcd}
 & (A\sqcup A)\sqcup A \arrow[rr, "\sim"] & & A\sqcup(A\sqcup A) & \\
A\sqcup A \arrow[ur, "\Delta\sqcup 1_A"] & & & & A\sqcup A \arrow[ul, "1_A\sqcup\Delta"'] \\
 & & A \arrow[ull, "\Delta"] \arrow[urr, "\Delta"'] & &
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
 & A\sqcup A \arrow[dl, "\varepsilon\sqcup 1_A"'] \arrow[dr, "1_A\sqcup\varepsilon"] & \\
I\sqcup A & & A\sqcup I \\
 & A \arrow[ul, "\lambda_A^{-1}", "\sim"'] \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[ur, "\rho_A^{-1}"', "\sim"] &
\end{tikzcd}
, \tag{1}
$$

поскольку, ввиду определений морфизмов $1_A\nabla 1_A$ и ι_A, для Δ и ε бигруппоидная и биунитальная диаграммы заведомо коммутативны [8, §2].

Т. о., задание на объекте $A\in\mathrm{Ob}\mathsf{C}$ структуры бимоноида определяется заданием морфизмов

$$\Delta\colon A\to A\sqcup A,\quad \varepsilon\colon A\to I,$$

делающих коммутативными диаграммы (1), а задание на $A\in\mathrm{Ob}\mathsf{C}$ структуры моноида Хопфа – заданием морфизмов

$$\Delta\colon A\to A\sqcup A,\quad \varepsilon\colon A\to I,\quad S\colon A\to A$$

для которых помимо диаграмм (1) коммутативна ещё и *антиподная диаграмма*:

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[d, "1_A \nabla 1_A"'] & A \sqcup A \arrow[l, "S \sqcup 1_A"'] \arrow[r, "1_A \sqcup S"] & A \sqcup A \arrow[d, "1_A \nabla 1_A"] \\ & A \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, "\varepsilon"] & \\ A & I \arrow[l, "\iota_A"'] \arrow[r, "\iota_A"] & A \end{tikzcd} . \qquad (2)$$

Напомним, что ковариантный функтор $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ из категории C в категорию множеств Set называется *представимым* объектом $A \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$, если существует функторный изоморфизм

$$\theta\colon h^A \xrightarrow{\approx} F,$$ [4]

называемый *представляющим изоморфизмом* [2, §3].

Пользуясь свойствами представимых функторов из категорий с конечными копроизведениями, получим справедливость следующего, аналогичного классическому, утверждения

Предложение 1. *Если*

$$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}, \qquad G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$$

– две функтора, представимые объектами A и B с представляющими изоморфизмами

$$\theta\colon h^A \xrightarrow{\approx} F, \qquad \eta\colon h^B \xrightarrow{\approx} G,$$

то функтор

$$F \times G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$$

представим копроизведением $A \sqcup B$ с функторным изоморфизмом

$$\theta \boxtimes \eta\colon h^{A \sqcup B} \xrightarrow{\approx} F \times G,$$

таким, что, если $C \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ – ещё один объект C, то

$$\big(\theta \boxtimes \eta\big)_C\colon \mathrm{Hom}(A \sqcup B, C) \ni \varphi \mapsto \big(\theta_C(\varphi \circ \varkappa^1_{A,B}), \eta_C(\varphi \circ \varkappa^2_{A,B})\big) \in F(C) \times G(C).$$

Лемма Йонеды [2, 3] даёт связь между морфизмами представимых функторов и морфизмами их представляющих объектов. Так, если

$$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}, \qquad G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$$

два функтора, представимые объектами $A, B \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$:

$$\theta\colon h^A \xrightarrow{\approx} F, \qquad \eta\colon h^B \xrightarrow{\approx} G,$$

[4] Здесь $h^A \equiv \bar{h}_A\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ – т. н. ковариантный hom-функтор, соответствующий объекту $A \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ [2, 3].

то определено биективное отображение

$$\Phi^{\theta,\eta}_{F,G}\colon \mathrm{Hom}(F,G) \xrightarrow{\mathrm{bi}} \mathrm{Hom}(B,A),$$

такое, что, если $\varphi\colon F\to G$ – морфизм F в G, а $\xi\colon B\to A$ – гомоморфизм B в A, то

$$\bigl(\varphi\colon F\to G\bigr) \xleftrightarrow{\Phi^{\theta,\eta}_{F,G}} \bigl(\xi\colon B\to A\bigr)\ ^{5}$$

тогда и только тогда, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] & G \\ h^A \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "(\circ\xi)"'] & h^B \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

т. е. имеет место равенство $\xi = (\eta^{-1}\circ\ \varphi\circ\theta)_A(1_A) = (\eta_A^{-1}\circ\varphi_A\circ\theta_A)(1_A)$.

Определение 1. *Групповым функтором* из категории C называется любой функтор $\mathbf{F}\colon \mathsf{C}\to\mathsf{Grp}$ из этой категории в категорию групп Grp. Каждому групповому функтору соответствует *подлежащий функтор*

$$F := \#\circ\mathbf{F}\colon \mathsf{C}\to\mathsf{Set} \tag{4}$$

где $\#\colon \mathsf{Grp}\to\mathsf{Set}$ – «забывающий» функтор на категории групп Grp.

Определение 2. Групповой функтор $\mathbf{F}\colon \mathsf{C}\to\mathsf{Grp}$ из категории C называют *представимым* объектом $A\in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$ [2, §3], если им представим его подлежащий функтор $F\colon \mathsf{C}\to\mathsf{Set}$, т. е. если существует функторный изоморфизм

$$\theta\colon h^A \xrightarrow{\approx} F,$$

называемый *представляющим изоморфизмом* $\mathbf{F}$.

Представимые функторы и представимые групповые функторы вместе с функторными морфизмами между ними составляют категории $\mathsf{RFun}(\mathsf{C})$ и соответственно $\mathsf{GRFun}(\mathsf{C})$

Групповой функтор $\mathbf{F}\colon \mathsf{C}\to\mathsf{Grp}$ определяется заданием на его подлежащем функторе (4) групповой структуры посредством функторных морфизмов

$$m\colon F\times F\to F,\quad \epsilon\colon E\to F,\quad \iota\colon F\to F, \tag{5}$$

таких, что для каждого объекта A категории C отображения

$$m_A\colon F(A)\times F(A)\to F(A),\quad \epsilon_A\colon E(A)\to F(A),\quad \iota_A\colon F(A)\to F(A),$$

определяют на множестве $F(A)$ структуру группы $\mathbf{F}(A)$, т. е. для этих морфизмов в категории $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$ коммутативны диаграммы:

[5] Далее индексы “$^{\theta,\eta}$” и “$_{F,G}$” будут опускаться.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (F\times F)\times F \arrow[dl, "m\times\mathrm{Id}_F"'] & & F\times(F\times F) \arrow[ll, "\approx"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_F\times m"] & \\
F\times F \arrow[drr, "m"'] & & & & F\times F \arrow[dll, "m"] \\
 & & F & &
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F\times F \arrow[dd, "m"] & \\
E\times F \arrow[ur, "\epsilon\times\mathrm{Id}_F"] \arrow[dr, "\approx"'] & & F\times E \arrow[ul, "\mathrm{Id}_F\times\epsilon"'] \arrow[dl, "\approx"] \\
 & F &
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
F\times F \arrow[dd, "m"'] & F\times F \arrow[l, "\iota\times\mathrm{Id}_F"'] \arrow[r, "\mathrm{Id}_F\times\iota"] & F\times F \arrow[dd, "m"] \\
 & F \arrow[u, "\delta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\
F & E \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon"] & F
\end{tikzcd}, \tag{6}$$

где

$$E\colon \mathsf{C}\to\mathsf{Set}$$

– т. н. «одноточечный» функтор на C, определённый следующим образом:

$$E\colon \begin{cases} \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}\ni A\mapsto\{\bullet\}\in\mathrm{Ob}\,\mathsf{Set}; \\ \mathrm{Mor}\,\mathsf{C}\ni\big(\varphi\colon A\to B\big)\mapsto\big(\mathrm{id}_{\{\bullet\}}\colon\ \{\bullet\}\to\{\bullet\}\big)\in\mathrm{Mor}\,\mathsf{Set}\end{cases}$$

($\{\bullet\}$ – фиксированное одноточечное множество – терминальный объект в категории Set), представимый инициальным объектом $I\in\mathrm{Ob}\mathsf{C}$ с представляющим изоморфизмом

$$\mathcal{E}\colon h^I\xrightarrow{\approx}E,$$

ставящим для каждого объекта $A\in\mathrm{Ob}\mathsf{C}$ единственному элементу $\iota_A\colon I\to A$ множества $\mathrm{Hom}(I,A)$ единственный элемент одноточечного множества $\{\bullet\}$:

$$\mathcal{E}_A\colon \mathrm{Hom}(I,A)\ni\iota_A\mapsto\bullet\in\{\bullet\},$$

а

$$\delta\colon F\to F\times F,\qquad \gamma\colon G\to E$$

– такие функторные морфизмы, что

$$\delta_A\colon F(A)\ni x\mapsto(x,x)\in F(A)\times F(A);$$
$$\gamma_A\colon F(A)\ni x\mapsto\bullet\in\{\bullet\}\equiv E(A).$$

Следующая теорема является, двойственной по отношению к Теореме 4.1 из [2, Ch. 4] и является следствием леммы Йонеды.

Теорема 1. *Пусть* C *– категория с конечными копроизведениями и инициальным объектом* I*. Задание на ковариантном функторе* $F\colon\mathsf{C}\to\mathsf{Set}$*, представимом* $A\in\mathrm{Ob}\mathsf{C}$*, групповой структуры посредством морфизмов* (5)*, делающих коммутативными диаграммы* (6)*, эквивалентно заданию на* A *структуры моноида Хопфа в* $\mathbf{C}$ *морфизмами*

$$\Delta\colon A\to A\sqcup A,\quad \varepsilon\colon A\to I,\quad S\colon A\to A,$$

для которых коммутативны диаграммы (1) *и* (2).[6]

Более того, пусть $F, G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ *– ковариантные функторы, представимые* $A, B \in \mathrm{Ob}\mathsf{C}$. *Тогда любому (изо)морфизму* $\varphi\colon F \to G$ *соответствует (изо)морфизм* $\xi\colon B \to A$, *делающий коммутативной диаграмму* (3), *причём, если на* F *и* G *заданы групповые структуры:* $\mathbf{F}, \mathbf{G}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$, *или, что то же заданы морфизмы*

$$\Delta_A\colon A \to A \sqcup A, \quad \varepsilon_A\colon A \to I, \quad S_A\colon A \to A,$$
$$\Delta_B\colon B \to B \sqcup B, \quad \varepsilon_B\colon B \to I, \quad S_B\colon B \to B,$$

определяющие на A *и* B *структуры моноидов Хопфа в* $\mathbf{C}$, *то* φ *является функторным (изо)морфизмом* $\mathbf{F}$ *в* $\mathbf{G}$: $\varphi\colon \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ *– в том и только том случае, когда коммутативны следующие диаграммы*:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\Delta_B"'] & A \arrow[d, "\Delta_A"] \\ B \sqcup B \arrow[r, "\xi \sqcup \xi"'] & A \sqcup A \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\varepsilon_B"'] & & A \arrow[dl, "\varepsilon_A"] \\ & I & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "S_B"'] & A \arrow[d, "S_A"] \\ B \arrow[r, "\xi"'] & A \end{tikzcd}.$$

2. Категория (Γ,λ)-коммутативных $\Bbbk$-алгебр

Определение 3 (см. [6],[9]). Пусть Γ – абелева группа. *Коммутационным фактором* на Γ со значениями в $\Bbbk$ называется отображение

$$\lambda\colon \Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^*,$$

удовлетворяющее для любых $\mu, \nu, \gamma \in \Gamma$ следующим трём условиям:

$$\lambda(\mu,\nu)\lambda(\nu,\mu) = 1, \quad \lambda(\mu+\nu,\gamma) = \lambda(\mu,\gamma)\lambda(\nu,\gamma), \quad \lambda(\mu,\nu+\gamma) = \lambda(\mu,\nu)\lambda(\mu,\gamma).$$

Определение 4 (см. [1],[6],[9]). Пусть $\lambda\colon \Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^*$ – коммутационный фактор на абелевой группе Γ со значениями в $\Bbbk$. Γ-градуированную $\Bbbk$-алгебру

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

[6] Опуская индексы у Φ, отметим, что между функторными морфизмами, входящими в (6) и моморфизмами, входящими в (1) и (2) имеет место взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{aligned} \big(\delta\colon G \to G \times G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(1_A \nabla 1_A\colon A \sqcup A \to A\big), \\ \big(\gamma\colon G \to E\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\iota_A\colon I \to A\big), \\ \big(m\colon G \times G \to G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\Delta\colon A \to A \sqcup A\big), \\ \big(\epsilon\colon E \to G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\varepsilon\colon A \to I\big), \\ \big(\iota\colon G \to G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(S\colon A \to A\big). \end{aligned}$$

называют λ-*коммутативной*, если для произвольных $\mu, \nu \in \Gamma$ и $a \in A_\mu$, $b \in A_\nu$ имеет место равенство

$$ab = \lambda(\mu, \nu) ba.$$

λ-коммутативные Γ-градуированные $\Bbbk$-алгебры будем также называть просто (Γ, λ)-*коммутативными* $\Bbbk$-*алгебрами*.

Для данных $\Bbbk$, Γ и коммутационного фактора $\lambda\colon \Gamma\times\Gamma \to \Bbbk^*$ класс всех (Γ, λ)-коммутативных $\Bbbk$-алгебр вместе с сохраняющими градуировку гомоморфизмами составляет полную подкатегорию (Γ, λ)-$\mathsf{Alg}_\Bbbk$ категории Γ-градуированных $\Bbbk$-алгебр Γ-$\mathsf{Alg}_\Bbbk$.

Понятие (Γ, λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгебры обобщает понятия коммутативной $\Bbbk$-алгебры и суперкоммутативной $\Bbbk$-супералгебры.

На тензорном произведении $M \underset{\Bbbk}{\otimes} N$ двух Γ-градуированных $\Bbbk$-модулей $M = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ и $N = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$ естественным образом определяется градуировка [1, 4]:

$$M \underset{\Bbbk}{\otimes} N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \bigoplus_{\substack{\mu,\nu\in\Gamma\\ \mu+\nu=\gamma}} M_\mu \underset{\Bbbk}{\otimes} N_\nu.$$

Если на абелевой группе Γ задан коммутационный фактор $\lambda\colon \Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^*$, то на тензорном произведении $A \underset{\Bbbk}{\otimes} B$ двух Γ-градуированных $\Bbbk$-алгебр $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ можно задать [1] структуру Γ-градуированной $\Bbbk$-алгебры, определив умножение как бинарную операцию

$$m\colon \left(A \underset{\Bbbk}{\otimes} B\right)^2 \to A \underset{\Bbbk}{\otimes} B,$$

удовлетворяющую на порождающих элементах $a \underset{\Bbbk}{\otimes} b$, $x \underset{\Bbbk}{\otimes} y$, $a \in A_\mu$, $b \in A_\nu$, $x \in B_\gamma$, $y \in B_\delta$ $(\mu, \nu, \gamma, \delta \in \Gamma)$ равенству:

$$m(a \underset{\Bbbk}{\otimes} b, x \underset{\Bbbk}{\otimes} y) = \lambda(\nu, \gamma) ax \underset{\Bbbk}{\otimes} by.$$

В этом случае тензорное произведение $A \underset{\Bbbk}{\otimes} B$ двух (Γ, λ)-коммутативных $\Bbbk$-алгебр $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ также является (Γ, λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй, причём тензорное произведение $\underset{\Bbbk}{\otimes}$, как бифунктор, является копроизведением в категории (Γ, λ)-$\mathsf{Alg}_\Bbbk$ [1, 3].

На категории Γ-$\mathsf{Mod}_\Bbbk$ естественным образом определена структура моноидальной категории [3]. Более того, наличие коммутационного фактора $\lambda\colon \Gamma\times\Gamma \to \Bbbk^*$ позволяет расширить эту структуру до структуры симметрической моноидальной категории $\mathbf{Mod}_\Bbbk^{\Gamma,\lambda}$ [9], сплетающий функторный изоморфизм

$$\sigma\colon \underset{\Bbbk}{\otimes} \xrightarrow{\approx} \underset{\Bbbk}{\otimes} \circ\, \tau\,^7$$

[7] τ – переставляющий бифунктор на Γ-$\mathsf{Mod}_\Bbbk$.

которой на однородных порождающих элементах $x \underset{\Bbbk}{\otimes} y, x \in M_\mu, y \in M_\mu\ (\mu, \nu \in \Gamma)$ тензорного произведения $M \underset{\Bbbk}{\otimes} N$ Γ-градуированных $\Bbbk$-модулей $M = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ и $N = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$ имеет вид:

$$\sigma_{M,N}\bigl(x \underset{\Bbbk}{\otimes} y\bigr) = \lambda(\mu,\nu) y \underset{\Bbbk}{\otimes} x$$

Для $\mathbf{Mod}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ стандартным образом определяются «моноидальные» аналоги таких алгебраических систем, как группоид, полугруппа, моноид, и т. п., а также двойственные им понятия и производные от них [7],[8, §2]. В частности, в ней определено понятие моноида Хопфа [7, §1.2].

Категория моноидов в $\mathbf{Mod}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ изоморфна категории Γ-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$, а категория коммутативных моноидов в $\mathbf{Mod}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ – категории (Γ,λ)-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$ (Γ,λ)-коммутативных $\Bbbk$-алгебр. На ней, как на категории с конечными копроизведениями и инициальным объектом – $\Bbbk$-алгеброй $\Bbbk$ с тривиальной градуировкой – задаётся естественная структура симметрической моноидальной категории (Γ,λ)-$\mathbf{Alg}_{\Bbbk}$.

Аналогично, категория моноидов Хопфа в $\mathbf{Mod}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ изоморфна категории $\mathsf{Hopf}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$, объектами $\langle A, \Delta, \varepsilon, S\rangle$ которой являются Γ-градуированные $\Bbbk$-алгебры $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ с заданными на них сохраняющими градуировку гомоморфизмами

$$\Delta\colon A \underset{\Gamma}{\to} A \underset{\Bbbk}{\otimes} A, \quad \varepsilon\colon A \underset{\Gamma}{\to} \Bbbk, \quad S\colon A \underset{\Gamma}{\to} A,$$

для которых коммутативны следующие три диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& (A \underset{\Bbbk}{\otimes} A) \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[r, "\cong"] & A \underset{\Bbbk}{\otimes} (A \underset{\Bbbk}{\otimes} A) & \\
A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[ur, "\Delta \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id}_A"] & & & A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[ul, "\mathrm{Id}_A \underset{\Bbbk}{\otimes} \Delta"'] \\
& A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[urr, "\Delta"'] & &
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
& A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[dl, "\varepsilon \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id}_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_A \underset{\Bbbk}{\otimes} \varepsilon"] & \\
\Bbbk \underset{\Bbbk}{\otimes} A & & A \underset{\Bbbk}{\otimes} \Bbbk \\
& A \arrow[ul, "\cong"] \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[uu, "\Delta"] &
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[dd, "\mu"] & A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[l, "S \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id}_A"'] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A \underset{\Bbbk}{\otimes} S"] & A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[dd, "\mu"] \\
& A \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \\
A & \Bbbk \arrow[l, "\iota_{\Bbbk,A}"'] \arrow[r, "\iota_{\Bbbk,A}"] & A
\end{tikzcd}, \tag{7}$$

(где $\mu\colon A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \underset{\Gamma}{\to} A$ и $\iota_{\Bbbk,A}\colon \Bbbk \underset{\Gamma}{\to} A$ – умножение в алгебре A, записанное через тензорное произведение, и канонический гомоморфизм $\Bbbk$ в A), а морфизмами из $\langle A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A\rangle$ в $\langle B, \Delta_B, \varepsilon_B, S_B\rangle$ – сохраняющие градуировку гомоморфизмы $h\colon A \underset{\Gamma}{\to} B$ Γ-градуированных $\Bbbk$-алгебр, делающие коммутативными диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
A \underset{\Bbbk}{\otimes} A \arrow[r, "h \underset{\Bbbk}{\otimes} h"] & B \underset{\Bbbk}{\otimes} B \\
A \arrow[u, "\Delta_A"] \arrow[r, "h"'] & B \arrow[u, "\Delta_B"']
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varepsilon_A"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\
& \Bbbk &
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] & B \\
A \arrow[u, "S_A"] \arrow[r, "h"'] & B \arrow[u, "S_B"']
\end{tikzcd}, \tag{8}$$

причём, полная подкатегория коммутативных моноидов Хопфа в $\mathbf{Mod}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ изоморфна полной подкатегории $\mathsf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{c}}^{\Gamma,\lambda}$ категории $\mathsf{Hopf}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$, образованной теми $\langle A, \Delta, \varepsilon, S\rangle$, в которых $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ – (Γ,λ)-коммутативные $\Bbbk$-алгебры.

Определение 5. Для данного $\lambda\colon \Gamma\times\Gamma \to \Bbbk^*$ объекты категории $\mathsf{Hopf}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ будем называть (Γ,λ)-*алгебрами Хопфа над* $\Bbbk$, а объекты её полной подкатегории $\mathsf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{c}}^{\Gamma,\lambda}$ – λ-*коммутативными* (Γ,λ)-*алгебрами Хопфа над* $\Bbbk$ или просто (Γ,λ)-*коммутативными алгебрами Хопфа над* $\Bbbk$.

3. Аффинные (Γ,λ)-схемы и групповые аффинные (Γ,λ)-схемы

Пусть $\lambda\colon \Gamma\times\Gamma \to \Bbbk^*$ – коммутационный фактор на абелевой группе Γ.

Определение 6. *Аффинной* (Γ,λ)-*схемой* будем называть любой представимый (Γ,λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ковариантный функтор

$$F\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set},$$

из категории (Γ,λ)-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$ в категорию множеств Set, т. е. такой, что $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(A) \approx F$, где $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(A) := h^A \equiv \bar{h}_A$ [2, §3].

При этом A будем называть *представляющей алгеброй* данной аффинной (Γ,λ)-схемы.

Тензорное произведение, являясь копроизведением в категории (Γ,λ)-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$, задаёт на ней естественную структуру симметрической моноидальной категории (Γ,λ)-$\mathbf{Alg}_{\Bbbk}$, поэтому для (Γ,λ)-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$ имеют место понятия и утверждения из §1.

Предложение 2. *Если*

$$G\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}, \qquad H\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}$$

– две аффинные (Γ,λ)-*схемы, представимые* (Γ,λ)-*коммутативными* $\Bbbk$-*алгебрами* $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *и* $B = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ *с представляющими изоморфизмами*

$$\theta\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(A) \xrightarrow{\approx} G, \qquad \eta\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(B) \xrightarrow{\approx} H,$$

то функтор

$$G\times H\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}$$

является аффинной (Γ,λ)-*схемой, представимой тензорными произведением* $A \underset{\Bbbk}{\otimes} B$ *с функторным изоморфизмом*

$$\theta \underset{\Bbbk}{\otimes} \eta\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(A \underset{\Bbbk}{\otimes} B) \xrightarrow{\approx} G\times H,$$

таким, что, для любой (Γ,λ)*-коммутативной* $\mathbb{k}$*-алгебры* $C = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma$:

$$\big(\theta \underset{\mathbb{k}}{\otimes} \eta\big)_C \colon \mathrm{Hom}_\Gamma(A \underset{\mathbb{k}}{\otimes} B, C) \ni \varphi \mapsto \big(\theta_C(\varphi\circ\varkappa_A), \eta_C(\varphi\circ\varkappa_B)\big) \in G(C)\times H(C),$$

где $\varkappa_A \colon A \underset{\Gamma}{\to} A \underset{\mathbb{k}}{\otimes} B$, $\varkappa_B \colon B \underset{\Gamma}{\to} A \underset{\mathbb{k}}{\otimes} B$ *– канонические гомоморфизмы* A *и* B *в их тензорное произведение* $A \underset{\mathbb{k}}{\otimes} B$.

Лемма Йонеды даёт связь между морфизмами аффинных (Γ,λ)-схем и сохраняющими градуировку гомоморфизмами их представляющих алгебр: если

$$G \colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathbb{k}} \to \mathsf{Grp}, \qquad H \colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathbb{k}} \to \mathsf{Grp}$$

две аффинные (Γ,λ)-схемы, представимые (Γ,λ)-коммутативными $\mathbb{k}$-алгебрами $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$:

$$\theta \colon \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma,\lambda}(A) \xrightarrow{\approx} G, \qquad \eta \colon \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma,\lambda}(B) \xrightarrow{\approx} H,$$

то определено взаимно-однозначное соответствие

$$\Phi^{\theta,\eta}_{G,H} \colon \mathrm{Hom}(G,H) \xrightarrow{\mathrm{bi}} \mathrm{Hom}_\Gamma(B,A), \qquad \big(\varphi\colon G\to H\big) \overset{\Phi^{\theta,\eta}_{G,H}}{\longleftrightarrow} \big(\xi\colon B \underset{\Gamma}{\to} A\big)$$

между функторными морфизмами $\varphi\colon G \to H$ и сохраняющими градуировку гомоморфизмами $\xi\colon B \underset{\Gamma}{\to} A$, описываемое коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma,\lambda}(A) \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "(\circ\xi)"'] & \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma,\lambda}(B) \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd} \tag{9}$$

выражающей равенство $\xi = (\eta^{-1}\circ\ \varphi\circ\theta)_A(\mathrm{Id}_A) = (\eta_A^{-1}\circ\varphi_A\circ\theta_A)(\mathrm{Id}_A)$.

Определение 7. *Групповой аффинной* (Γ,λ)*-схемой*, представимой (Γ,λ)-коммутативной $\mathbb{k}$-алгеброй $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ будем называть представимый ею групповой функтор

$$\mathbf{G} \colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathbb{k}} \to \mathsf{Grp}, \tag{10}$$

из категории (Γ,λ)-$\mathsf{Alg}_{\mathbb{k}}$, т. е. такой, что

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma,\lambda}(A) \approx \#\circ\mathbf{G},$$

где $\#\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ – «забывающий» функтор на категории групп Grp.

Иными словами, групповой функтор (10) является групповой аффинной (Γ,λ)-схемой, если аффинной (Γ,λ)-схемой является его подлежащий функтор

$$G = \#\circ\mathbf{G} : (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathbb{k}} \to \mathsf{Set}. \tag{11}$$

При этом (Γ,λ)-коммутативная $\mathbb{k}$-алгебра $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ называется *представляющей алгеброй* схемы (10).

Аффинные (Γ, λ)-схемы и групповые аффинные (Γ, λ)-схемы вместе с функторными морфизмами между ними составляют категории $\mathsf{ASc}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ и $\mathsf{GASc}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$.

Для различных абелевых групп Γ и коммутационных факторов $\lambda\colon \Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^*$ на них аффинные (Γ, λ)-схемы и групповые аффинные (Γ, λ)-схемы будем называть просто *цветными аффинными схемами* и *цветными групповыми аффинными схемами* соответственно.

Групповая аффинная (Γ, λ)-схема (10) определяется заданием на соответствующей ей аффинной (Γ, λ)-схеме (11) групповой структуры посредством функторных морфизмов

$$m\colon G \times G \to G, \quad \epsilon\colon E \to G, \quad \iota\colon G \to G, \tag{12}$$

таких, что для каждой (Γ, λ)-коммутативной алгебры $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ отображения

$$m_A\colon G(A) \times G(A) \to G(A), \quad \epsilon_A\colon E \to G(A), \quad \iota_A\colon G(A) \to G(A),$$

определяют на множестве $G(A)$ структуру группы $\mathbf{G}(A)$, т. е. для этих морфизмов в категории $\mathsf{Set}^{(\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}}$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (G\times G)\times G & & G\times(G\times G) \arrow[ll, "\approx"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_G\times m"] & \\
G\times G \arrow[ul, leftarrow, "m\times\mathrm{Id}_G"'] \arrow[drr, "m"'] & & & & G\times G \arrow[dll, "m"] \\
 & & G & &
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
 & G\times G \arrow[d, "m"] & \\
E\times G \arrow[ur, "\epsilon\times\mathrm{Id}_G"] \arrow[r, "\approx"'] & G & G\times E \arrow[ul, "\mathrm{Id}_G\times\epsilon"'] \arrow[l, "\approx"]
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[dd, "m"'] & G\times G \arrow[l, "\iota\times\mathrm{Id}_G"'] \arrow[r, "\mathrm{Id}_G\times\iota"] & G\times G \arrow[dd, "m"] \\
 & G \arrow[u, "\delta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\
G & E \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon"] & G
\end{tikzcd}, \tag{13}$$

где

$$E\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}$$

– «одноточечный» функтор на (Γ, λ)-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$:

$$E\colon \begin{cases} \mathrm{Ob}\big((\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}\big) \ni A \mapsto \{\bullet\} \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{Set}; \\ \mathrm{Mor}\big((\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}\big) \ni \big(\varphi\colon A \underset{\Gamma}{\to} B\big) \mapsto \big(\mathrm{id}_{\{\bullet\}}\colon \{\bullet\} \to \{\bullet\}\big) \in \mathrm{Mor}\,\mathsf{Set}, \end{cases}$$

представимый (Γ, λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй $\Bbbk$, с представляющим изоморфизмом

$$\mathcal{E}\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(\Bbbk) \xrightarrow{\approx} E,$$

компоненты которого для каждой $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathrm{Ob}(\Gamma, \lambda)$-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$ имеют вид:

$$\mathcal{E}_A\colon \mathrm{Hom}_\Gamma(\Bbbk, A) \ni \big(\iota_{\Bbbk,A}\colon \Bbbk \underset{\Gamma}{\to} A\big) \mapsto \bullet \in \{\bullet\},$$

а $\delta\colon G\to G\times G$ $\gamma\colon G\to E$ – такие функторные морфизмы, что

$$\delta_A\colon G(A)\ni x\mapsto (x,x)\in G(A)\times G(A),\qquad \gamma_A\colon G(A)\ni x\mapsto \bullet\in\{\bullet\}\equiv E(A).$$

Как следствие, задание на аффинной (Γ,λ)-схеме G структуры групповой аффинной (Γ,λ)-схемы $\mathbf{G}$ эквивалентно заданию на представляющей её $\Bbbk$-алгебре A структуры (Γ,λ)-коммутативной алгебры Хопфа $\mathbf{A}=\langle A,\Delta,\varepsilon,S\rangle$.

Воспользовавшись тем, что категория (Γ,λ)-$\mathsf{Alg}_{\Bbbk}$ – категория с конечными копроизведениями и инициальным объектом $\Bbbk$, применяя теорему 1, получим следующее утверждение, являющееся аналогом соответствующих утверждений о категориях классических групповых аффинных схем и аффинных суперсхем.

Теорема 2. *Категория $\mathsf{GASc}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}$ групповых аффинных (Γ,λ)-схем антиэквивалента категории $\mathsf{Hopf}_{\Bbbk,c}^{\Gamma,\lambda}$ (Γ,λ)-коммутативных алгебр Хопфа над $\Bbbk$.*

При этом задание на каждой аффинной (Γ,λ)-схеме

$$G\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}\to \mathsf{Set},$$

представимой (Γ,λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй $A=\bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ структуры групповой аффинной (Γ,λ)-схемы

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}\to \mathsf{Grp}$$

посредством морфизмов (12)*, делающих коммутативными диаграммы* (13)*, эквивалентно заданию сохраняющих градуировку гомоморфизмов*

$$\Delta\colon A\underset{\Gamma}{\to} A\underset{\Bbbk}{\otimes} A,\quad \varepsilon\colon A\underset{\Gamma}{\to}\Bbbk,\quad S\colon A\underset{\Gamma}{\to} A,$$

для которых коммутативны диаграммы (7).[8]

Более того, пусть $\varphi\colon G\to H$ – (изо)морфизм аффинных (Γ,λ)-схем

$$G\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}\to \mathsf{Grp},\qquad H\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk}\to \mathsf{Grp},$$

представимых (Γ,λ)-коммутативными $\Bbbk$-алгебрами $A=\bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ и $B=\bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$, которому соответствует (изоморфизм) гомоморфизм $\xi\colon B\underset{\Gamma}{\to}A$. Если на G и H заданы структуры групповых аффинных (Γ,λ)-схем

[8] Между функторными морфизмами, входящими в (13) и гомоморфизмами, входящими в (7) имеет место следующее взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{aligned}
\big(\delta\colon G\to G\times G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\mu\colon A\underset{\Bbbk}{\otimes}A\underset{\Gamma}{\to}A\big),\\
\big(\gamma\colon G\to E\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\iota_{\Bbbk,A}\colon \Bbbk\underset{\Gamma}{\to}A\big),\\
\big(m\colon G\times G\to G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\Delta\colon A\underset{\Gamma}{\to}A\underset{\Bbbk}{\otimes}A\big),\\
\big(\epsilon\colon E\to G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(\varepsilon\colon A\underset{\Gamma}{\to}\Bbbk\big),\\
\big(\iota\colon G\to G\big) &\overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \big(S\colon A\underset{\Gamma}{\to}A\big),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}, \qquad \mathbf{H}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

т. е. на A и B заданы структуры (Γ,λ)-коммутативных алгебр Хопфа

$$\mathbf{A} = \langle A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A\rangle, \quad \mathbf{B} = \langle B, \Delta_B, \varepsilon_B, S_B\rangle,$$

то φ является (изо)морфизмом $\mathbf{G}$ в $\mathbf{H}$: $\varphi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ тогда и только тогда, когда ξ является (изо)морфизмом $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, т. е. делает коммутативными диаграммы (8).

Данная антиэквивалентность позволяет формулировать свойства групповых аффинных (Γ,λ)-схем в терминах их представляющих алгебр. При этом, если

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}, \qquad \mathbf{H}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

– групповые аффинные (Γ,λ)-схемы, представимые (Γ,λ)-коммутативными $\Bbbk$-алгебрами $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$:

$$\theta\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(A) \xrightarrow{\approx} G \quad (G = \#\circ \mathbf{G}), \qquad \eta\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}^{\Gamma,\lambda}(B) \xrightarrow{\approx} H \quad (H = \#\circ \mathbf{H}),$$

то на A и B заданы структуры (Γ,λ)-коммутативных алгебр Хопфа

$$\mathbf{A} = \langle A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A\rangle, \quad \mathbf{B} = \langle B, \Delta_B, \varepsilon_B, S_B\rangle$$

и функторный морфизм $\varphi\colon G \to H$, которому по лемме Йонеды соответствует гомоморфизм $\xi\colon B \underset{\Gamma}{\to} A$, является морфизмом $\mathbf{G}$ в $\mathbf{H}$ (т. е. каждое отображение φ_A является гомоморфизмом групп: $\varphi_A\colon \mathbf{G}(A) \to \mathbf{H}(A)$), тогда и только тогда, когда $\xi\colon B \underset{\Gamma}{\to} A$ является морфизмом алгебры Хопфа $\mathbf{B}$ в алгебру Хопфа $\mathbf{A}$, причём

$$\varphi\colon \mathbf{G} \xrightarrow{\approx} \mathbf{H} \;\Leftrightarrow\; \xi\colon \mathbf{B} \underset{\Gamma}{\xrightarrow{\cong}} \mathbf{A}.$$

Обобщая классические понятия из теории групповых аффинных схем [10], дадим следующие определения.

Определение 8. Групповую аффинную (Γ,λ)-схему $\mathbf{G}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$ будем называть *алгебраической*, если она представима конечнопорождённой (Γ,λ)-коммутативной алгеброй.

Определение 9. Аффинную (Γ,λ)-схему

$$H\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}$$

будем называть *подсхемой* аффинной (Γ,λ)-схемы

$$G\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}$$

и писать $H \subseteq G$, если $H(A) \subseteq G(A)$ для любой (Γ,λ)-коммутативной алгебры $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

Аналогично, групповую аффинную (Γ,λ)-схему

$$\mathbf{H}\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

будем называть *подсхемой* групповой аффинной (Γ, λ)-схемы

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

и писать $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}$, если для любой (Γ, λ)-коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ группа $\mathbf{H}(A)$ является подгруппой группы $\mathbf{G}(A)$: $\mathbf{H}(A) \leqslant \mathbf{G}(A)$.

Определение 10. Морфизм $\varphi\colon \mathbf{H} \to \mathbf{G}$ групповой аффинной (Γ, λ)-схемы

$$\mathbf{H}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

в групповую аффинную (Γ, λ)-схему

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

будем называть *вложением*: $\varphi\colon \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$, если для любой (Γ, λ)-коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ групповой гомоморфизм $\varphi_A\colon \mathbf{H}(A) \to \mathbf{G}(A)$ является алгебраическим вложением $\mathbf{H}(A)$ в $\mathbf{G}(A)$.

Определение 11. Подсхему $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}$ групповой аффинной (Γ, λ)-схемы

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp},$$

представимой (Γ, λ)-коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, будем называть *замкнутой подсхемой*, если она представима факторалгеброй алгебры A по некоторому её градуированному идеалу.

Определение 12. Вложение $\varphi\colon \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$ групповой аффинной (Γ, λ)-схемы

$$\mathbf{H}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

в групповую аффинную (Γ, λ)-схему

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

называется *замкнутым вложением*, если оно осуществляет изоморфизм $\mathbf{H}$ и некоторой замкнутой подсхемы $\mathbf{H}' \leqslant \mathbf{G}$ схемы $\mathbf{G}$.

На основе леммы Йонеды, при помощи рассуждений, аналогичных классическим [10, §2.1], легко получается следующее утверждение

Предложение 3. *Пусть*

$$\mathbf{G}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}, \qquad \mathbf{H}\colon (\Gamma, \lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$$

– две групповые аффинные (Γ, λ)-схемы, представимые (Γ, λ)-коммутативными $\Bbbk$-алгебрами $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, а

$$\varphi\colon \mathbf{H} \to \mathbf{G}$$

– морфизм $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$. Если морфизм $\xi\colon A \underset{\Gamma}{\to} B$ представляющих алгебр, соответствующий φ, сюръективен: $\xi\colon A \underset{\Gamma}{\xrightarrow{\text{sur}}} B$, то φ – замкнутое вложение $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$, а схема $\mathbf{H}$ изоморфна некоторой замкнутой подсхеме $\mathbf{H}'$ схемы $\mathbf{G}$, представимой факторалгеброй $A/\ker\xi$.

Благодарности

Автор выражает благодарность д.ф-м.н., профессору А.Н. Зубкову за постановку задачи, советы и ценные замечания при работе над данной статьёй.

Литература

1. Bourbaki N. Elements of Mathematics. Algebra I. New York : Springer-Verlag, 1989.
2. Bucur I., Deleanu A. Introduction to the theory of categories and functors. London, New York : John Wiley & Sons, 1968. [Перевод: Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М. : Мир, 1972.]
3. Mac Lane S. Categories for the working mathematician. New York : Springer-Verlag, 1998. [Перевод: Маклейн С. Категории для работающего математика. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.]
4. Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Methods of graded rings. New York : Springer-Verlag, 2004.
5. Dăscălescu S., Năstăsescu C., Raianu Ş. Hopf algebras. An introduction, New York, Basel : Marcel Dekker, Inc., 2001
6. Scheunert M. Generalized Lie algebra // Journal of Mathematical Physics. 1979. V. 20, No. 4. P. 712–720.
7. Aguiar M., Mahajan S. Monoidal functors, species and Hopf algebras. Providence, RI : AMS, 2010
8. Smith J.D.H. Quantum quasigroups and loops // Journal of Algebra. 2011. V. 456. P. 135–170
9. Covolo T., Michel J.-P. Determinants over graded-commutative algebras. A categorical viewpoint // L'Enseignement Mathématique. 2016. V. 62, No. 2. P. 361–420.
10. Waterhouse W.C. Introduction to affine group schemes. New York : Springer-Verlag, 1979

ON CATEGORIES OF AFFINE GROUP (Γ, λ)-SCEMES AND (Γ, λ)-CUMMUTATIVE HOPF ALGEBRAS

S.G. Kazakov
PhD student, e-mail: kazakovsg@gmail.com

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. In the paper we consider the generalization of the concepts of (group) affine schemes and (group) affine superschemes as a representable by $\mathbb{Z}_2$-graded algebras to the case of arbitrary grading.
A generalization of the well-known theorem on the anti-equivalence of categories of group affine schemes and commutative Hopf algebras is given

Keywords: commutation factor, grading, affine scheme, symmetric monoidal category, supergroups, Hopf algebra.

Дата поступления в редакцию: 23.10.2022