

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК В АНИЗОТРОПНО СОПРОТИВЛЯЕМОЙ СРЕДЕ

Р.Э. Мамедли

к.ф.-м.н., доцент кафедры ИМПИ, e-mail: prog-nv@mail.ru

Нижевартовский государственный университет, Нижневартовск, Россия

Аннотация. В статье исследуется устойчивость двухслойных прямоугольных пластинок, изготовленных из различных неоднородно упругих изотропных материалов, находящихся в анизотропно сопротивляемой среде. Предполагается, что упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координат толщины пластинки. Используя гипотезу Кирхгофа–Лява для всей толщины элемента пластинки в общем виде получены выражения для усилия и моментов, определены обобщённые жёсткостные характеристики пластинки и получены системы уравнений устойчивости относительно прогиба и функции напряжения. Здесь для упругого основания принималась модель анизотропно сопротивляемой среды. Подробно исследована устойчивость пластинки при одностороннем сжатии. В случае шарнирного закрепления краёв пластинки построено решение задачи и найдена формула для определения критической нагрузки. В случае квадратной пластинки при различных значениях физических и геометрических параметров произведены численные расчёты и построены характерные графики. .

Ключевые слова: двухслойный, неоднородные изотропные пластинки, гипотеза Кирхгофа–Лява, устойчивость, критическая сила.

Введение

Конструктивные элементы в виде тонких однослойных и многослойных пластин и покрытий из изотропных однородно-упругих материалов находят широкое применение в различных областях техники. Различные типы задач устойчивости этих конструкций широко исследованы в научной литературе. В этой литературе обычно рассматриваются простые процессы нагружения, и при постановке задач используются классические теории. Но в большинстве случаев конструкции типа двухслойных пластин изготавливаются из неоднородных упругих изотропных материалов и находятся в сложном сопротивляющемся упругом состоянии, испытывая воздействие различных комплексных нагрузок. Однако, используя классические математические модели, можно снизить сложность задач по сравнению с другими способами, но при этом возможны серьёзные ошибки при определении критических параметров конструкций. Поэтому

для решения этих задач требуются более адекватные и новые методы. Проблемы надёжности и устойчивости этих пластин в литературе изучены недостаточно.

Поэтому в данной работе исследуется устойчивость неоднородных двухслойных прямоугольных пластин в условиях сопротивления анизотропии, состоящих из различных неоднородных материалов.

Проанализируем устойчивость неоднородных двухслойных прямоугольных пластин из различных неоднородных материалов в условиях сопротивления анизотропии.

Система координат представлена ниже: оси Ox и Oy лежат в плоскости, разделяющей слои пластины; ось Oz перпендикулярна плоскости. (рисунок 1).

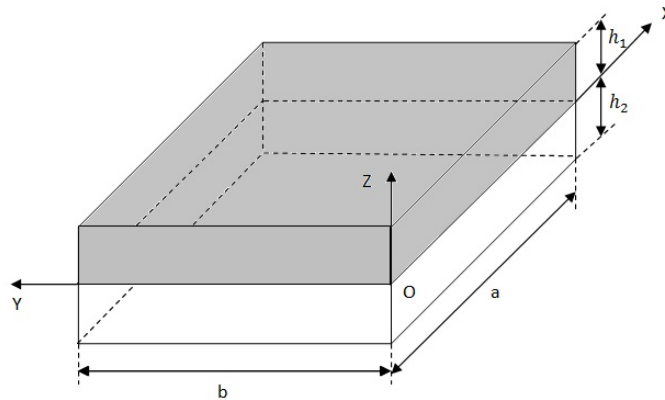


Рис. 1. Система координат

Предполагается, что слои пластины состоят из различных неоднородных изотропных упругих материалов, а упругие характеристики составляющих материалов являются непрерывными функциями координат толщины и изменяются следующим образом:

$$\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^{k'} \cdot a_i^k(z) \quad (1)$$

Согласно закону Гука соотношение между компонентами деформационного напряжения определяется следующим образом:

$$\sigma_{11}^i = \lambda_{11}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{12}^i \varepsilon_{22}, \sigma_{22}^i = \lambda_{21}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{22}^i \varepsilon_{22}, \sigma_{12}^i = \lambda_{33}^i \varepsilon_{12} \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

Принято, что гипотеза Кирхгофа–Лява справедлива для всей толщины пластин, т. е.:

$$\varepsilon_{11} = l_{11} - z\chi_{11}, \varepsilon_{22} = l_{22} - z\chi_{22}, \varepsilon_{12} = l_{12} - z\chi_{12} \quad (3)$$

где l_{11} , l_{22} , l_{12} и χ_{11} , χ_{22} , χ_{12} — бесконечно малая деформация и изгиб срединной плоскости пластины.

Следующие уравнения используются для определения составляющих силы и момента:

$$T_{ij} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{ij}^2 dz + \int_0^{h_1} \sigma_{ij}^1 dz, M_{ij} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{ij}^2 dz + \int_0^{h_1} \sigma_{ij}^1 dz \quad (4)$$

где h_1 и h_2 — толщина соответствующих слоев. После подстановки формул (1)–(3) в (4) получаются следующие общие выражения для силы и момента:

$$T_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^0 l_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 A_{12}^0 l_{22} - - - \bar{\lambda}_{11}^1 \bar{A}_{11}^1 \chi_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \bar{A}_{12}^1 \chi_{22}, \dots \quad (5)$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^1 l_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 A_{12}^1 l_{22} - \bar{\lambda}_{11}^2 \bar{A}_{11}^2 \chi_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \bar{A}_{12}^2 \chi_{22}, \dots \quad (6)$$

Где применяются следующие определения:

$$A_{11}^k = \int_{-h_2}^0 a_1^2(z) z^k dz + \frac{\bar{\lambda}_{11}^1}{\bar{\lambda}_{11}^2} \int_0^{h_1} a_1^1(z) z^k dz, \quad (7)$$

$$A_{12}^k = \int_{-h_2}^0 a_1^2(z) z^k dz + \frac{\bar{\lambda}_{12}^1}{\bar{\lambda}_{12}^2} \int_0^{h_1} a_1^1(z) z^k dz, (k = 0, 1, 2)$$

Уравнения устойчивости

Система уравнений балансировки пластины выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0, \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K(w) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10)$$

Где анизотропная модель определяется для упругого состояния, как показано ниже:

$$K(W) = K_0 W - K_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (11)$$

Здесь K_0, K_1, K_2 — анизотропные коэффициенты упругого состояния.

Как видно из уравнения (8), если функцию напряжения ввести следующим образом:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, T_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

система становится эквивалентной, как и в предыдущем случае.

Для достижения соответствующего вида уравнений (9) и (10) их определяют через изгибную и силовую составляющие с помощью выражения (5), тогда:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= C_{11}T_{11} - C_{12}T_{22} + \chi_{11}(C_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - C_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \chi_{22}(C_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - C_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1), \\ \lambda_{22} &= C_{21}T_{11} - C_{22}T_{22} + \chi_{11}(C_{21}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - C_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \chi_{22}(C_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - C_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1), \\ \lambda_{12} &= C_{33}T_{12} - 2C_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1 \chi_{22}\end{aligned}\quad (13)$$

Коэффициенты из уравнений могут быть выражены через общие характеристики жёсткости (7). Заменяя значения выражения (13) на (6), моменты можно представить в виде:

$$\begin{aligned}M_{11} &= r_{11}^1 T_{11} + r_{12}^1 T_{22} + R_{11}^1 \chi_{11} + R_{12}^1 \chi_{22}, \\ M_{22} &= r_{21}^1 T_{11} + r_{22}^1 T_{22} + R_{21}^1 \chi_{11} + R_{22}^1 \chi_{22}, \\ M_{12} &= r_{33}^1 T_{12} + R_{33}^1 \chi_{12}\end{aligned}\quad (14)$$

где применяются следующие определения:

$$\begin{aligned}r_{11}^1 &= c_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 + c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1, \\ r_{12}^1 &= c_{12}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1, \\ R_{11}^1 &= \bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) - \bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^2, \\ R_{12}^1 &= \bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) + \bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) - \bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^2, \\ R_{21}^1 &= \bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) - \bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^2, \\ R_{12}^1 &= \bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) + \bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) - \bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^2, \\ r_{33}^1 &= c_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1, \\ R_{33}^1 &= 2\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1 \cdot c_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1 - \bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1,\end{aligned}\quad (15)$$

Приведённая ниже система уравнений получается после подстановки выражений (13) и (14) в (9) и (10):

$$\begin{aligned}D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{21} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + D_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\ + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K_0 w - K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\end{aligned}\quad (16)$$

$$d_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + d_{13} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + d_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0\quad (17)$$

где применяются следующие определения:

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= c_{22}, d_{12} = c_{11}, \\
 d_{13} &= c_{12} + c_{21} - 2c_{33}, \\
 d_{21} &= c_{21}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1, \\
 d_{22} &= c_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1, \\
 d_{23} &= c_{22}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1 + c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1 - 4c_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1, \\
 D_{11} &= R_{11}^1, D_{12} = R_{22}^1, \\
 D_{13} &= R_{12}^1 + R_{21}^1 + 2R_{33}^1, \\
 D_{21} &= r_{12}^1, D_{22} = r_{22}^1 = 1, \\
 D_{23} &= r_{11}^1 + r_{22}^1 - 2r_{33}^1
 \end{aligned} \tag{18}$$

Как видно, общее уравнение устойчивости двухслойных прямоугольных пластин из неоднородных изотропных упругих материалов в условиях анизотропного сопротивления указано в (16) и (17). Если добавить предельные условия вне пластин, можно получить математическое представление задачи.

Решение проблемы

Теперь разберём ту же задачу об устойчивости этой же пластины при сжатии сверху вниз. ($T_{12} = 0$). В этом случае система уравнений устойчивости (16) и (17) несколько упрощается.

$$\begin{aligned}
 D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{21} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + D_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\
 + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K_0 w - K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

Изгиб i действителен, как и в приведённом ниже уравнении, если края пластин повернуты.

$$\begin{aligned}
 w &= w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\
 \Phi &= \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь a, b — соответствующие длина и ширина пластины, а m, n — количество полуволн в соответствующих направлениях.

Подставляя (20) в (19):

$$\begin{aligned}
 \Phi_{mn} &= -w_{mn} D_{mn}^0 \\
 D_{mn}^0 &= \frac{d_{21} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + d_{23} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + d_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}{d_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + d_{13} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + d_{12} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}
 \end{aligned} \tag{21}$$

После подстановки выражений (20) в (21) и выполнения некоторых операций получается следующее характеристическое уравнение для определения комбинации критических нагрузок:

$$T_{11}(1 + \eta^2 \alpha) = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \{D_{11} - D_{mn}^0 D_{21} + \eta^2(D_{13} - D_{mn}^0 + D_{23}) + \\ + \eta^4(D_{12} - D_{mn}^0 \cdot D_{22})\} + K_0 \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 + K_1 + K_2 \eta^2 \quad (22)$$

где применяются следующие определения:

$$\eta = \frac{na}{mb}, \alpha = \frac{T_{22}}{T_{11}}$$

Если форма пластины квадратная, то в зависимости от (22) достигается, что ($m = n = 1, a = b$):

$$T_{11}(1 + \alpha) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \{D_{11}D_{11} + D_{13} + D_{12} - D^0(D_{21} + D_{23} + D_{22})\} + \\ + K_0 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + K_1 + K_2 \quad (23)$$

Здесь

$$D^0 = \frac{d_{21} + d_{23} + d_{22}}{d_{11} + d_{13} + d_{12}}$$

Численные расчёты

Для проведения численных расчётов неоднородные функции $\alpha_i^k(z)$ представляются как линейная функция координаты толщины, т. е.:

$$\alpha_1^1(z) = 1 + \mu_1 \frac{z}{h_1}; \alpha_1^2(z) = 1 + \mu_2 \frac{z}{h_2} \quad (24)$$

Расчеты проводились по различным значениям параметров и, следовательно, доказана зависимость критической силы от геометрических параметров пластины. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Решение существующей однородной задачи показано скрытыми линиями. Результаты показывают, что без учёта однородности могут возникать строгие ошибки, поэтому значения критических параметров могут меняться в зависимости от значений параметров из (22). В этом случае неоднородность снижает критическое значение на 8–12%.

$$K_0 = 6.48 \cdot 10E4KN/m^3, K_1 = K_2 = 2250.0KN/m$$

$$- - - - - \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$- - - - - \mu_1 = 0.5; \mu_2 = 1$$

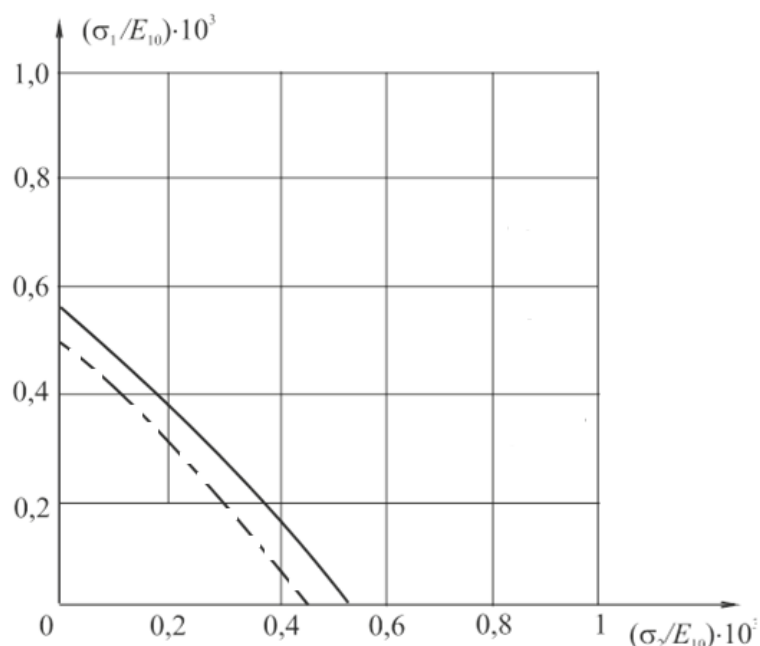


Рис. 2. Результаты расчётов

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел М. : Изд.-во МГУ, 1978. 432 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивости деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
4. Мамедли Р.Э. Устойчивость неоднородных трёхслойных стержней при неравномерном поле температуры в нелинейно упругой среде // Математические структуры и моделирование. 2018. Т. 2, № 46. С. 33–38.
5. El-Zafrany A., Fadhil S. A modified Kirchhoff theory for boundary element analysis of thin plates resting on two-parameter foundation // Eng. Structures. 1996. V. 18, No. 2. С. 102–114.
6. Gulkan P., Alemdar B.N. An exact finite element for a beam on a twoparameterelastic foundation //Structural Engineering and Mechanics. 1999. V. 7, No. 3. С. 259–276.
7. Panda S.K, Ramachandra L.S. Buckling and postbuckling Behavior Cross-Ply Composite Plate Subjected to Nonuniform in-Plane loads // Journal of Engineering Mechanics. 2011. V. 137(9). С. 589–597.
8. Rahman T., Ijsselmuinden S.T., Abdalla M.M., Jansen E.L. Postbucklink analysis of variable stinffnesscomposite plates using a finite element-based perturb bationmethod // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2011. V. 11, No. 3. С. 411–429.
9. Dao Van Dung, Le Kha Hoa. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure // J. Thin-Walled Structures. 2013. V. 63. С. 117–124.

**THE STABILITY OF NON-HOMOGENOUS TWO-LAYERED PLATES
IN ANISOTROPY RESISTING CONDITION****R.E. Mamedli**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: prog-nv@mail.ru

Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. In this article, the stability of non-homogenous two-layered rectangular plates in anisotropy resisting condition made from different non-homogenous materials is explored. It is assumed that the characteristics of resilient layers are continuous functions of thickness coordinate. Considering Kirchhoff–Lyow hypothesis to be valid for the entire thickness of the plate elements, generalized form of the correct expression of moments and general strength and stiffness properties have been determined and voltage stability of the system of equations has been taken by the function. Here resisting elastic anisotropy model was adopted for the environment. A slab-sided state of contraction was examined in detail. Despite the edges of the plate matter of dissolving, the critical force was assigned. To achieve numerical computations, non-homogeneous functions were accepted to be linearly dependent on the thickness coordinate. Calculations were made in the report and appropriate graphics was established.

Keywords: two-layered, nonhomogenous isotropic plates, Kirchof–Lyow hypothesis, stability, critical force..

Дата поступления в редакцию: 20.11.2022