Математические структуры и моделирование
2022. № 4 (64). С. 83–88

УДК 539.3
DOI 10.24147/2222-8772.2022.4.83-88

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Р.Э. Мамедли
к.ф.-м.н., доцент кафедры ИМПИ, e-mail: prog-nv@mail.ru

Нижневартовский государственный университет, Нижневартовск, Россия

Аннотация. В статье исследуется задача о собственных колебаниях двухслойных неоднородных прямолинейных стержней в упругой среде. Предполагается, что слои стержня изготовлены из различных неоднородно упругих материалов и модули упругости материала слоев являются непрерывными функциями координат толщины и длины. При постановке задачи предполагается, что гипотеза плоских сечений справедлива для всей толщины элемента стержня и для упругого основания принимается модель Винклера. В общем виде получены выражения для приращений усилий и момента, а также определена обобщённая жёсткостная характеристика стержня и получено уравнение движения стержня. При шарнирном закреплении концов стержня полученное уравнение движения с переменными коэффициентами решено методом Бубнова–Галеркина и найдена формула для определения частоты собственных колебаний стержня. Подробно исследован случай, когда функции неоднородности материала слоев являются линейными функциями координат толщины и длины и произведены численные расчёты.

Ключевые слова: двухслойный стержень, неоднородный, гипотеза плоских сечений, упругое основание, собственные колебания, частота колебаний.

Введение

В научной литературе подробно изучены вопросы устойчивости и колебаний таких элементов конструкций, как тонкостенные стержни, пластины и крышки [1–3]. В этих исследованиях материалы конструкций обычно предполагаются однородными и гибкими.

Однако во многих случаях слоистые стержневые конструкции изготавливаются из композиционных материалов, подвергаются различным нагрузкам и находятся в упругой среде.При изучении вопросов устойчивости и вибраций таких конструкций необходимо использовать реальные физико-механические характеристики. механические характеристики их материалов.

В представленной статье исследуется вопрос вибрации двухслойных стержней из различных неоднородных упругих материалов на упругом основании.

Постановка задачи

Рассмотрим специфику поведения прямых двухслойных неоднородных стержней постоянного сечения с двумя осями симметрии в упругой среде.

Система координат выбирается следующим образом:

OX и OY — оси расположены в плоскости, разделяющей слои стержня; OZ — ось направлена по толщине.

Предположим, что слои стержня рассчитаны из различных неоднородных упругих материалов, а модули упругости материалов зависят от координат длины (x) и толщины следующим образом:

$$E_1 = E_{10} f(x) f_1(z)$$
$$E_2 = E_{20} f(x) f_2(z) \qquad (1)$$

Здесь $E_{10} = Const, E_{20} = Const$ — модули упругости соответствующих однородных материалов слоев; $f(x)$,$f_1(z)$,$f_2(z)$ — являются непрерывными функциями соответствующих координат.

Соотношение между увеличением напряжения и деформации в каждом слое выглядит следующим образом:

$$\Delta\sigma^1 = E_{10} f(x) f_1(z) \Delta\varepsilon, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h_1$$
$$\Delta\sigma^2 = E_{20} f(x) f_2(z) \Delta\varepsilon, \qquad -h_2 \leqslant z \leqslant 0 \qquad (2)$$

Здесь h_1, h_2 — толщины слоев.

Предположим, что принцип плоских сечений верен для всей толщины стержня:

$$\Delta\varepsilon = l_0 + z\varkappa \qquad (3)$$

где l_0 — дополнительная деформация оси стержня, $\varkappa$ — кривизна.

Приращения сил и моментов рассчитываются следующим образом:

$$\Delta P = \int_{-h_2}^{0} \Delta\sigma^2 b(z) dz + \int_{0}^{h_1} \Delta\sigma^1 b(z) dz$$
$$\Delta M = \int_{-h_2}^{0} \Delta\sigma^2 b(z) z dz + \int_{0}^{h_1} \Delta\sigma^1 b(z) z dz \qquad (4)$$

где $b(z)$ — ширина поперечного сечения стержня.

Получим выражения (2), (3), записав их в (4):

$$\Delta P = E_{20} f(x) [\lambda_0(\alpha_2^0 + \lambda_{12}\alpha_1^0) + \varkappa(\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1)]$$
$$\Delta M = E_{20} f(x) [\lambda_0(\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1) + \varkappa(\alpha_2^2 + \lambda_{12}\alpha_1^2)] \qquad (5)$$

В этих формулах были сделаны следующие замены.

$$a_1^i = \int_0^{h_1} f_1(z) b(z) z^i dz$$

$$l_{12} = E_{10}/E_{20} \qquad (6)$$

$$a_2^i = \int_{-h_2}^{0} f_2(z) b(z) z^i dz, \qquad (i = 0, 1, 2)$$

Уравнения движения стержней

Здесь, если принять модель Винклера с коэффициентом пласта C_0 для упругой среды, уравнения движения рассматриваемого стержня будут иметь следующий вид

$$\Delta P = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta M) + C_0 v + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (8)$$

где v — прогиб оси стержня, m — полная масса на единицу длины.
Мы получаем (6), записывая также (7):

$$\lambda_0 = -\frac{\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1}{\alpha_2^0 + \lambda_{12}\alpha_1^0}\varkappa \qquad (9)$$

Учтём (9) и (5):

$$\Delta M = K_2 I f(x) \varkappa \qquad (10)$$

Здесь произведены следующие замены:

$$K_2 I = E_{20}\left\{\alpha_2^2 + \lambda_{12}\alpha_1^2 - \frac{(\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1)^2}{\alpha_2^0 + \lambda_{12}\alpha_1^0}\right\} \qquad (11)$$

Запишем выражение (10) вместо уравнения (7):

$$K_2 I \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + C_0 v + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (12)$$

или

$$K_2 I\left[f(x)\frac{\partial^4 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f \partial^3 v}{\partial x \partial x^2} + \frac{\partial^2 f \partial^2 v}{\partial x^2 \partial x^2}\right] + C_0 v + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (13)$$

Двухслойные неоднородные стержни были получены в виде уравнения движения на упругом основании (13).

Метод решения проблемы

Для решения уравнения (13) необходимо привести очевидные выражения входящих сюда неоднородных функций. Чтобы получить конкретные результаты, рассмотрим следующий случай неоднородности

$$f(x) = 1 + a\frac{x}{l}$$
$$f_1(z) = 1 + \gamma_1\frac{z}{h_1} \qquad (14)$$
$$f_2(z) = 1 + \gamma_2\frac{z}{h_2}$$

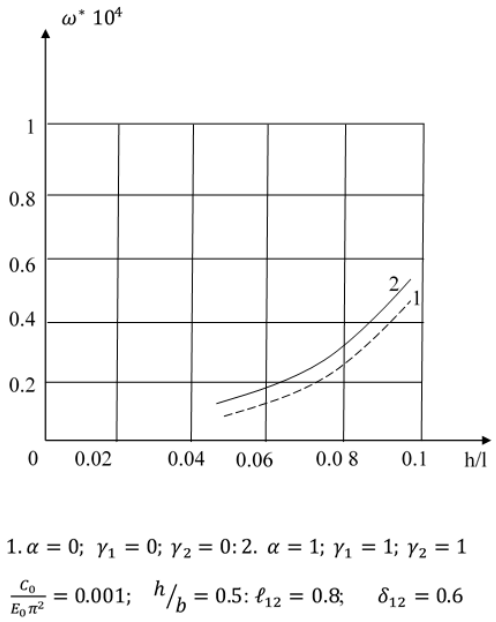

Рис. 1. Результаты расчётов

В этом случае уравнение колебаний (13) получается следующим образом:

$$K_2I\left[(1+\alpha\frac{x}{l})\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\frac{a}{l}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right] + C_0 v + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (15)$$

Здесь K_2I определяется по формуле (11).
Найдём решение этого уравнения в виде $V(x,t) = V(x)Cos\omega t$:

$$K_2I[(1+\alpha\frac{x}{l})V^{IV}(x) + 2\frac{a}{l}V^{III}(x)] + (C_0 - m\omega^2)V(x) = 0 \qquad (16)$$

Если концы стержня закрепить шарнирами, принимая форму прогиба как: $V(x) = V_0 sin\frac{\pi x}{\lambda}$, то для определения удельной частоты колебаний из (16) с помощью метода Бубнова–Галеркина получим следующее выражение:

$$\omega^2 = \omega_{01}^2 \cdot \gamma_1^1(1+\frac{\alpha}{2}) + C_0^1 \qquad (17)$$

Здесь произведены следующие замены.

$$\omega_{01}^2 = (\frac{\pi}{l})^4 \cdot \frac{E_{20}bh_2^3}{m},$$
$$C_0^1 = \frac{C_0}{m} \qquad (18)$$

$$\varphi_1^1 = \left\{ \frac{1}{3} - \frac{\gamma_2}{4} + \lambda_{12}\delta_{12}^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\gamma_1}{4} \right) - \frac{\left[-\frac{1}{2} - \frac{\gamma_2}{3} + \lambda_{12}\delta_{12}^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\gamma_1}{3} \right) \right]^2}{\left[1 - \frac{\gamma_2}{2} + \lambda_{12}\delta_{12} \left(1 + \frac{\gamma_1}{2} \right) \right]} \right\}$$

Результаты проведённых расчётов представлены на рисунке 1.

Литература

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел М. : Изд.-во МГУ, 1978. 432 с.
2. Вольмир А.С Устойчивости деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
4. Мамедли Р.Э. Устойчивость неоднородных трёхслойных стержней при неравномерном поле температуры в нелинейно упругой среде // Математические структуры и моделирование. 2018. Т. 2, № 46. С. 33–38.
5. El-Zafrany A., Fadhil S. A modified Kirchhoff theory for boundary element analysis of thin plates resting on two-parameter foundation // Eng. Structures. 1996. V. 18, No. 2. C. 102–114.
6. Hu Ding, LI-Qun Chen. Galerkin metodus for natural freqnencies of high–speed axcally moving Beams // Journal of Sound and Vibration. 2010. V. 329, No. 17. C. 3484–3494.
7. Panda S.K., Ramachandra L.S. Buckling and postbuckling Behavior Cross-Ply Composite Plate Subjected to Nonuniform in-Plane loads // Journal of Engineering Mechanics. 2011. V. 137(9). C. 589–597.
8. Rahman T., Ijsselmuinden S.T., AbdallaM M., Jansen E.L. Postbucklink analysis of variable stinffnesscomposite plates using a finite element-based perturb bationmethod // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2011. V. 11, No. 3. C. 411–429.
9. Dao Van Dung, Le Kha Hoa. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure // J. Thin-Walled Structures. 2013. V. 63. C. 117–124.
10. Shooshtari A., Rafiee M. Nonlinear forced vibration analysis of clamped functionally graded beams // J. Acta Mechanica. 2011. V. 222. C. 23–38.

FREE VIBRATION TWO-LAYER NONHOMOGENEOUS RODS IN ELASTIC FOUNDATION

R.E. Mamedli
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: prog-nv@mail.ru

Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. In this paper we study the problem of free vibrations of two-layer nonhomogeneous straight rods in elastic foundation. Considering that the layers of the rod are made of different materials and nonhomogeneous elastic modulus of elasticity are continuous functions of the coordinates of the thickness and length. For the elastic foundation of linear model Vinkler is accepted and it is assumed that the hypothesis of plane sections is valid for the entire thickness of the element of the rod In general, increment of force and momentum and rigged characteristics are defined and obtained motion of the rod equation. Hinged ends of the rod with variable coefficients formula result are obtained by the Bubnov–Galerkin method and the formula for determining the free vibration frequency of the rod. In this paper however of the inhomogeneity of the material layers are linear functions of the coordinates of the thickness and length deep investigated and made numerical calculations.

Keywords: two-layer rod, nonhomogeneous, the hypothesis of plane sections, elastic foundation, free vibration, vibration frequency..

Дата поступления в редакцию: 21.11.2022