Математические структуры и моделирование
2023. № 1 (65). С. 46–54

УДК 514.765+512.812.4
DOI 10.24147/2222-8772.2023.1.46-54

САМОПОДОБНОЕ ОДНОРОДНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ ЛИ $\boldsymbol{SE}(2) \times \boldsymbol{R}^+$

М.Н. Подоксёнов
канд. физ.-мат. наук, доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Ю.А. Шпакова
студентка, e-mail: juliashpkv@gmail.com

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается четырёхмерная группа Ли $G_4 = SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$, где $SE(2)$ – связная группа движений евклидовой плоскости, сохраняющих ориентацию плоскости, а $\boldsymbol{R}^+$ – мультипликативная группа положительных действительных чисел. Найден единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, при которых данная группа Ли является самоподобным многообразием. Получены формулы, описывающие действие существенной однопараметрической группы подобий относительно естественных координат. Эта группа порождается однопараметрической группой автоподобий соответствующей алгебры Ли, снабжённой лоренцевым скалярным произведением.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, лоренцева метрика, подобие, самоподобное многообразие.

1. Постановка задачи

Пусть (M, g) – риманово или лоренцево многообразие. Преобразование $f : M \to M$ называется *подобием* с коэффициентом e^ν, ($\nu = \mathrm{const}$) если любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_pM$ выполнено $g(f_*X, f_*Y)_{f(p)} = e^{2\nu} g(X, Y)_p$. Метрика $\widetilde{g}$ на многообразии M называется конформно эквивалентной метрике g, если существует такая функция $\varphi : M \to \boldsymbol{R}$, что $\widetilde{g} = \varphi \cdot g$. Преобразование подобия называется *несущественным*, если оно является изометрией для некоторой метрики, конформно эквивалентной g. В противном случае оно называется *существенным*. Однопараметрическая группа подобий называется *существенной*, если она не сводится к группе изометрий для некоторой метрики, конформно эквивалентной g. Многообразие называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий.

Пусть G – произвольная группа Ли, $\mathcal{G}$ – её алгебра Ли, g – левоинвариантная метрика на G, которая определяется скалярным произведением, заданным в алгебре Ли $\mathcal{G}$. Назовём линейное преобразование $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ *автоподобием*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно заданного в ней скалярного произведения. Назовём алгебру Ли $\mathcal{G}$ *самоподобной*, если она допускает однопараметрическую группу автоподобий, не являющуюся группой изометрий.

Любое подобие $f : G \to G$ однородного пространства (G, g), раскладывается в композицию $L_a \circ h$, где h – подобие, оставляющее единицу $e \in G$ на месте, а L_a – левый сдвиг, $a \in G$. Таким образом, задача поиска подобий однородного пространства (G, g) сводится к поиску подобий, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли. В работе [1] автором доказано, что такие преобразования порождаются автоподобиями соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$, если группа Ли G является экспоненциальной.

В данной работе мы рассмотрим четырёхмерную группу Ли $G_4 = SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$, где $SE(2)$ – связная группа движений евклидовой плоскости, сохраняющих ориентацию плоскости, а $\boldsymbol{R}^+$ – мультипликативная группа положительных действительных чисел. Её алгебра Ли есть прямая сумма $\mathcal{G}_4 = \mathcal{E}(2) \oplus \mathcal{R}$.

В работе [2] доказано, что эта алгебра Ли $\mathcal{E}(2)$ не допускает автоподобий при любом способе задания на ней лоренцева скалярного произведения. Это означает, что трёхмерная группа Ли $E(2)$ не может быть самоподобным многообразием относительно левоинвариантной лоренцевой метрики.

Цель данной работы – показать, что группа Ли $G_4 = SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ может быть самоподобным многообразием относительно левоинвариантной лоренцевой метрики. Мы выпишем вид метрического тензора в координатах, которые определяются матричным представлением данной группы Ли, и укажем формулы, по которым действует существенная однопараметрическая группа подобий. Более того, мы покажем, что существует только один класс левоинвариантных метрик, превращающих рассматриваемую группу Ли в самоподобное многообразие. При этом мы используем результаты работы [3], где найдено единственное скалярное произведение в алгебре Ли $\mathcal{G}_4$, при котором она является самоподобной.

В работе [4] найдена полная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ и доказано, что она не может быть самоподобной при любом способе задания на ней евклидова скалярного произведения.

2. Группа Ли $G_4 = SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ и её алгебра Ли

Группа Ли G_4 и алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ могут быть представлены как состоящие соответственно из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} \cos x^1 & -\sin x^1 & x^2 & 0 \\ \sin x^1 & \cos x^1 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -u^1 & u^2 & 0 \\ u^1 & 0 & u^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^4 \end{pmatrix}$$

с обычными операциями умножения матриц и коммутатора матриц ($u^i \in \boldsymbol{R}, i = 1, \ldots, 4; x^j \in \boldsymbol{R}, j = 1, 2, 3; x^4 > 0$). В алгебре Ли G_4 можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3, E_4), состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться равенствами

$$[E_1, E_2] = E_3, [E_1, E_3] = -E_2,$$

а остальные скобки Ли равны нулевому вектору.

Обозначим $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ – линейную оболочку векторов $X_1, \ldots, X_n$. Алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ содержит трёхмерный коммутативный идеал $\mathcal{H} = \langle E_2, E_3, E_4 \rangle$, одномерный центр $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}E_4$, а производная алгебра Ли двумерна: $\mathcal{G}_4^{(2)} = \mathcal{L} = \langle E_2, E_3 \rangle$. Вектор E_1 действует на $\mathcal{H}$ с помощью преобразования $\mathrm{ad}(E_1)$, причём ядро этого преобразования есть $\mathcal{Z}$.

Произвольный базис (V_1, V_2, V_3, V_4) в $\mathcal{G}_4$, относительно которого коммутационные соотношения задаются равенствами $[V_1, V_2] = V_3$, $[V_1, V_3] = -V_2$, будем называть каноническим. В любом каноническом базисе верно, что $\mathcal{H} = \langle V_2, V_3, V_4 \rangle$, $\mathcal{L} = \langle V_2, V_3 \rangle$ и $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}V_4$.

Группа Ли $SE(2)$ не является односвязным многообразием, и поэтому мы не можем определить на ней одну глобальную карту. Однако это не помешает построить существенную однопараметрическую группу подобий. Мы припишем матрице X координаты (x^1, x^2, x^3, x^4), $x^1 \in (-\pi, \pi]$. На алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ зададим карту $\psi : \mathcal{G}_4 \to \boldsymbol{R}^4$, приписывающую матрице U координаты (u^1, u^2, u^3, u^4). Тогда запись отображения $\exp : \mathcal{G}_4 \to G_4$ в выбранных координатах выглядит так:

$$\exp(u^1, u^2, u^3, u^4) =$$
$$= \left(u^1, \frac{1}{u^1}(u^2 \sin u^1 + u^3(\cos u^1 - 1)), \frac{1}{u^1}(-u^2(\cos u^1 - 1) + u^3 \sin u^1), e^{u^4} \right).$$

Заметим, что в этих формулах имеется устранимая неопределённость при $u^1 = 0$. Необходимо определить $\exp(0, u^2, u^3, u^4) = (0, u^2, u^3, e^{u^4})$. Тогда формулы показывают, что группа Ли G_4 является экспоненциальной (т. е. образ экспоненциального отображения совпадает со всей группой G_4).

Запись отображения $\exp^{-1} : G_4 \to \mathcal{G}_4$ в выбранных координатах:

$$\exp^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \\ = \left(x^1, \frac{x^1}{2}\left(\frac{x^2 \sin x^1}{1-\cos x^1} + x^3\right), \frac{x^1}{2}\left(-x^2 + \frac{x^2 \sin x^1}{1-\cos x^1}\right), \ln x^4\right). \quad (1)$$

Здесь также имеем устранимую неопределённость, и надо добавить $\exp^{-1}(0, x^2, x^3, x^4) = (0, x^2, x^3, \ln x^4)$. Образ данного отображения не совпадает со всей алгеброй Ли. Заметим, что из области определения данных формул выпадают значения $x^1 = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, однако мы ввели координаты на группе Ли так, что эти значения не соответствуют ни одной точке. Безусловно, это отображение не является непрерывным в топологическом смысле.

Операция умножения в группе Ли G_4 имеет следующую запись в координатах:

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \cdot (y^1, y^2, y^3, y^4) = \\ = (x^1 + y^1, y^2 \cos x^1 - y^3 \sin x^1 + x^2, y^2 \sin x^1 + y^3 \cos x^1 + x^3, x^4 y^4), \quad (2)$$

и здесь надо уточнить, что $x^1 + y^1$ вычисляется с точностью до $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, так что $x^1 + y^1 \in (-\pi, \pi]$.

Пусть теперь (V_1, V_2, V_3, V_4) – произвольный канонический базис. На алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ зададим естественную карту $\psi : \mathcal{G}_4 \to \boldsymbol{R}^4$, приписывающую вектору $U = u_1 V_1 + u_2 V_2 + u_3 V_3 + u_4 V_4$ координаты (u^1, u^2, u^3, u^4). На G_4 припишем элементу $\exp U$ координаты $\left(u^1, \frac{1}{u^1}(u^2 \sin x^1 + u^3(\cos x^1 - 1)), \frac{1}{u^1}(u^3 \sin x^1 - u^2(\cos x^1 - 1)), e^{u^4}\right)$. Тогда в выбранных картах отображение $\exp^{-1} : G_4 \to \mathcal{G}_4$ будет задаваться равенствами (1), а групповое умножение – формулами (2). Назовём введённые координаты естественными.

Нам понадобится следующий вспомогательный результат, который сформулирован в работе [4]; там же приведено краткое доказательство.

Лемма. *Алгебра Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{E}(2) \oplus \mathcal{R}$ является самоподобной в том и только в том случае, когда существует канонический базис, относительно которого лоренцево скалярное произведение задаётся с помощью матрицы Грама:*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В этом случае данная алгебра Ли допускает однопараметрическую группу подобий, действие которой в каноническом базисе задаётся матрицей

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu t}\cos\varepsilon t & -e^{\nu t}\sin\varepsilon t & 0 \\ 0 & e^{\nu t}\sin\varepsilon t & e^{\nu t}\cos\varepsilon t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\nu t} \end{pmatrix}, \nu > 0, t \in \boldsymbol{R}, \quad (4)$$

где ε может принимать одно из двух значений: 1 или 0.

Последнее означает, что минор, расположенный во 2-й и 3-й строках и 2-м и 3-м столбцах может быть равен $e^{\nu t}E$, где E – единичная матрица. Заметим, что согласно этой лемме, скалярное произведение, при котором рассматриваемая алгебра Ли является самоподобной, не является единственным, поскольку канонический базис не является единственным. В частности, в матрице (3) можно взять $g_{22} = g_{33} = k$, где – любое положительное число; тогда за счёт выбора другого канонического базиса, мы приведём матрицу Грама к собственно виду (3). По этой причине в следующей теореме мы говорим не о единственной левоинвариантной метрике, а о классе левоинвариантных метрик; для любой метрики из данного класса метрический тензор можно привести к одному и тому же виду за счёт выбора естественных координат.

3. Основной результат

Теорема. 1. *На группе Ли $G_4 = SE(2)\times\boldsymbol{R}^+$ существует единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, при которых она допускает существенную однопараметрическую группу преобразований, оставляющую инвариантной единичный элемент группы. Матрица метрического тензора и формулы, по которым действует указанная однопараметрическая группа преобразований, имеют следующий вид относительно естественных координат:*

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x^4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$f_t(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1, e^{\nu t}(x^2\cos\varepsilon t - x^3\sin\varepsilon t), e^{\nu t}(x^2\sin\varepsilon t + x^3\cos\varepsilon t), e^{2\nu t}x^4). \tag{6}$$

где $\nu = const > 0$ и ε может принимать одно из двух значений: 1 или 0.

2. *Группа Ли G_4 снабжённая левоинвариантной лоренцевой метрикой из указанного класса, допускает существенную однопараметрическую группу преобразований, имеющую замкнутую изотропную орбиту. Эта группа преобразований действует по формулам*

$$\begin{aligned} &f_t(x^1, x^2, x^3, x^4) = \\ &\quad = (x^1 + at, e^{\nu t}(x^2\cos\varepsilon t - x^3\sin\varepsilon t), e^{\nu t}(x^2\sin\varepsilon t + x^3\cos\varepsilon t), e^{2\nu t}x^4), \end{aligned} \tag{7}$$

где $a = const \neq 0$, $\nu = const > 0$ и ε может принимать одно из двух значений: 1 или 0.

Доказательство. 1. Левоинвариантная метрика на группе Ли G_4 индуцирует скалярное произведение в её алгебре Ли $\mathcal{G}_4$, и, наоборот, скалярное произведение в $\mathcal{G}_4$ однозначно определяет левоинвариантную метрику на G_4.

Обозначим $F_t : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ однопараметрическую группу автоподобий алгебры Ли $\mathcal{G}_4$. Тогда подобия группы Ли G_4 будем строить по правилу:

$$f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1} : G_4 \to G_4.$$

При этом отсутствие непрерывности отображения $\exp^{-1}$ не повлияет на окончательный результат.

И наоборот, любое подобие группы Ли, оставляющее неподвижной единицу группы, имеет в этой точке дифференциал, который является автоподобием алгебры Ли. Произвольное подобие группы Ли является композицией подобия, оставляющего неподвижной единицу группы, и левого сдвига.

Левый сдвиг на элемент $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$ действует по формуле

$$L_x(y^1, y^2, y^3, y^4) = (x^1 + y^1, y^2 \cos x^1 - y^3 \sin x^1 + x^2, y^2 \sin x^1 + y^3 \cos x^1 + x^3, x^4 y^4).$$

Матрица его дифференциала $(L_x)_*$ в любой точке $y(y^1, y^2, y^3, y^4)$ и обратная матрица имеют вид

$$U(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & -\sin x^1 & 0 \\ 0 & \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix}, V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & \sin x^1 & 0 \\ 0 & -\sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^4} \end{pmatrix}.$$

Матрицу метрического тензора (g_{ij}) в точке $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$ находим по формуле

$$(g_{ij}(x)) = V^T(x) \Gamma V(x),$$

в соответствии с методикой, описанной в работе [5]. Для рассматриваемого случая получаем матрицу (5). Убедимся, что преобразования, действующие по формулам (6), действительно являются подобиями при любом значении t.

При каждом фиксированном значении t дифференциал преобразования $(f_t(x))_*$ относительно базиса $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3, \partial/\partial x^4)$ в касательном пространстве $T_x G_4$ задаётся в точности матрицей (6), т. е. дифференциалы в касательных пространствах $T_x G_4$ и $T_e G_4$ имеют одну и ту же матрицу, не зависящую от $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Обратная матрица $I(t)$ имеет вид

$$I(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} \cos \varepsilon t & e^{-\nu t} \sin \varepsilon t & 0 \\ 0 & -e^{-\nu t} \sin \varepsilon t & e^{-\nu t} \cos \varepsilon t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\nu t} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрицу тензора $((f_t)^* g(x))$ находим из равенства

$$((f_t)^* g(x))_{ij} = I^T(t) (g_{ij}(x)) I(t).$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$((f_t)^* g(x))_{ij} = e^{-2\nu t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x^4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $x' = f_t(x)$. Сравнивая последнюю матрицу с матрицей (5), мы видим, что

$$((f_t)^* g(x))_{ij} = e^{-2\nu t}(g_{ij}(x')).$$

Это значит, что однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (6), действительно является существенной однопараметрической группой подобий.

Несложно убедиться, что отображения, действующие по формулам (6), действительно являются преобразованиями. Тот факт, что координата x^1 не изменяется при действии преобразований (6) и координаты x^2, x^3 изменяются независимо от x^1, приводит к тому, что отсутствие непрерывности отображения $\exp^{-1}$ не повлияло на непрерывность построенных преобразований $f_t : G_4 \to G_4$.

2. Рассмотрим теперь преобразования, которые действуют по формулам (7), где $x^1 + at$ исчисляется с точностью до $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Очевидно, что они тоже образуют однопараметрическую группу. Матрицы дифференциалов этих преобразований тоже имеют вид (4), а обратные матрицы – вид (8). Тем самым эти преобразования являются подобиями.

При $t = \frac{2\pi k}{a}$ эти подобия являются существенными, потому что они имеют неподвижную точку. При $t \neq \frac{2\pi k}{a}$ эти преобразования не имеют неподвижных точек. Если бы координата x^1 не была циклической, то, умножив метрический тензор на $e^{\frac{vx^1}{a}}$, мы бы превратили эти преобразования в изометрии. Тем самым цикличность координаты x^1 гарантирует то, что каждое из преобразований (7) в отдельности является существенным подобием.

Мы получили однородное лоренцево многообразие, которое относится к классу, описанному в работе [6]. Его существенная однопараметрическая группа подобий имеет замкнутую изотропную орбиту. Работа [6] послужила дополнением работы Д.В. Алексеевского [7], где были рассмотрены самоподобные однородные лоренцевы многообразия, в предположении, что их существенная однапараметрическая группа подобий не имеет замкнутой изотропной орбиты. ■

Замечание 1. Построенная левоинвариантная метрика на группе Ли G_4, является плоской. Тем самым, группа Ли $G_4 = SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ может быть самоподобным многообразием относительно левоинвариантной лоренцевой метрики, только если эта метрика является плоской.

Замечание 2. Группа Ли G_4 не является односвязной. Мы можем рассмотреть её универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{G}_4 = \widetilde{SE}(2) \times \boldsymbol{R}^+$. Для этого мы будем считать точки $(x^1 + 2\pi k, x^2, x^3, x^4)$ различными для различных $k \in \boldsymbol{Z}$. Эта группа Ли имеет ту же алгебру Ли $\mathcal{G}_4$, но она не является экспоненциальной: точки $(2\pi k, x^2, x^3, x^4)$ $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, имеют прообразы, только если $x^2 = x^3 = 0$. Это означает, что экспоненциальное отображение не является обратимым. Тем не менее метрика, которая определяется формулой (5), тоже является левоинвариантной, и однопараметрическая группа, действующая по формулам (6) для неё является существенной группой подобий. При этом однопараметрическая группа, действующая по формулам (7), является несущественной.

Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н. Гомотетические автоморфизмы трёхмерных алгебр Ли // Учёные записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова»: сборник научных трудов. Т. 8. Витебск, Изд-во ВГУ, 2009. С. 203–211.
3. Podoksenov M.N., Shpakova Yu.A. Self similar Lie algebra $\mathcal{E}(2) \oplus \mathcal{R}$ // Mathematical and computer modeling: collection of materials of the X International scientific conference (Omsk, February 10, 2023). Omsk : Publishing House of Omsk State University, 2023. P. 28–30.
4. Podoksenov M.N., Gorovaya Y.V. Automorphisms and autometries of one four-dimensional Lie algebra of the Bianchi VI_2 subtype // Mathematical and computer modeling: collection of materials of the IX International scientific conference dedicated to the 85th anniversary of Professor V.I. Potapov (Omsk, November 19, 2021). Omsk : Publishing House of Omsk State University, 2021. P. 24–26.
5. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трёхмерной группе Ли II типа Бианки // Гравитация и теория относительности. Вып. 19. Казань, 1982. С. 37–47.
6. Подоксёнов М.Н. Лоренцево многообразие с однопараметрической группой гомотетий, имеющей замкнутую изотропную орбиту // Сибирский математический журнал. 1989. Т. 30, № 5, С. 135–137.
7. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds // Ann. of Global Anal. Geom. 1985. V. 3, No. 1. P. 59–84.

SELF-SIMILAR HOMOGENEOUS LORENTZIAN MANIFOLD OF LIE GROUP $\boldsymbol{SE}(2) \times \boldsymbol{R}^+$

M.N. Podoksenov
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Yu.A. Shpakova
Student, e-mail: juliashpkv@gmail.com

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. We consider the four-dimensional Lie group $G_4 = SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$, where $SE(2)$ is the connected group of motions of the Euclidean plane that preserve the orientation of the plane, and $\boldsymbol{R}^+$ is the multiplicative group of positive real numbers. A unique class of left-invariant Lorentzian metrics is found for which the given Lie group is a self-similar manifold. Formulas are obtained that describe the action of an essential one-parameter similarity group with respect to natural coordinates. This group is generated by the one-parameter autosimilarity group of the corresponding Lie algebra equipped with the Lorentz scalar product.

Keywords: Lie group, Lie algebra, Lorentzian metric, similarity, self-similar manifold.

Дата поступления в редакцию: 02.03.2023