Математические структуры и моделирование 2024. № 1 (69). С. 42–55

УДК 517.955
DOI 10.24147/2222-8772.2024.1.42-55

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА, ГРАВИТИРУЮЩЕГО ПО НЬЮТОНУ В ПРОСТРАНСТВЕ R^2

С.Л. Дерябин
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SDeryabin@usurt.ru
А.П. Садов
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: alsadov@yandex.ru

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются изэнтропические течения идеального газа, гравирующего по Ньютону. В качестве математических моделей получены двумерные интегро-дифференциальные системы уравнений газовой динамики для политропного газа. Для полученных уравнений поставлена задача Коши во всём пространстве R^2. Решение задачи построено в виде степенных рядов. Коэффициенты рядов найдены при решении алгебраических уравнений с интегральными правыми частями. Получены ограничения на начальные условия задачи Коши, при которых сходятся несобственные интегралы в правых частях алгебраических уравнений.

Ключевые слова: газ, гравирующий по Ньютону, интегро-дифференциальная система уравнений газовой динамики, задача Коши, степенные ряды, несобственные интегралы .

Введение

В работе [1] для описания течений газа, гравирующего по Ньютону, получены системы интегро-дифференциальных уравнений. При исследовании этих уравнений в [2] были найдены трёхмерные стационарные течения самогравитирующего газа. Для одномерных течений самогравитирующего газа [2–5] удалось построить дифференциальные модели уравнений газовой динамики и решить основные начально-краевые задачи об истечении газа в вакуум. В работе [6] была сделана попытка построения решения задачи Коши для трёхмерной интегро-дифференциальной системы уравнений газовой динамики. Решение строилось в виде ряда. К сожалению, удалось выписать и проанализировать только первый член ряда. Для построения решения задачи Коши в ограниченной области для самогравитирующего газа [7] была использована дифференциальная система уравнений. Однако не было доказано, что использованная дифференциальная система уравнений эквивалентна интегро-дифференциальной системе уравнений газовой динамики.

В данной работе будет исследоваться задача Коши для двумерных интегро-дифференциальных систем уравнений газовой динамики с начальными данными, поставленными во всём пространстве R^2.

1. Построение математической модели

Будут рассматриваться изэнтропические течения газа со следующими искомыми газо-динамическими параметрами: u, v, w – декартовы координаты вектора скорости газа; ρ – плотность газа.

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения газа, гравирующего по Ньютону, имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
&\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0,\\
&u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{1}{\rho}p_x = F_1,\\
&v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho}p_y = F_2,\\
&w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho}p_z = F_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$F_1 = G\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2,\varsigma)(x-\xi_1)}{(\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2})^3} d\xi_1 d\xi_2 d\varsigma;$$

$$F_2 = G\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2,\varsigma)(y-\xi_2)}{(\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2})^3} d\xi_1 d\xi_2 d\varsigma;$$

$$F_3 = G\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2,\varsigma)(z-\varsigma)}{(\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2})^3} d\xi_1 d\xi_2 d\varsigma,$$

где p – давление; $\Omega = R^3$ – область, занимаемая газом; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Hm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ – гравитационная постоянная.

Для построения двумерных течений газа предположим, что область Ω является бесконечным цилиндром, в основании которого плоскость $D = R^2$.

Пусть во всех точках области Ω заданы следующие параметры газа:

$$\rho = \rho(t,x,y), \quad u = u(t,x,y), \quad v = v(t,x,y), \quad w = 0.$$

Тогда гравирующая сила $\overrightarrow{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ вычисляется по формулам

$$F_1 = G\iint\limits_D \rho(t,\xi_1,\xi_2)(x-\xi_1)d\xi_1 d\xi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2})^3}d\varsigma;$$

$$F_2 = G\iint\limits_D \rho(t,\xi_1,\xi_2)(y-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2})^3}d\varsigma;$$

$$F_3 = G\iint\limits_D \rho(t,\xi_1,\xi_2)(z-\varsigma)d\xi_1 d\xi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2})^3}d\varsigma. \tag{2}$$

В первых двух равенствах системы (2) сделаем замену переменных

$$z-\varsigma = \sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}\,\mathrm{tg}\,u.$$

Получим

$$F_1 = -G\iint\limits_D \rho(t,\xi_1,\xi_2)(x-\xi_1)d\xi_1 d\xi_2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}du;$$

$$F_2 = -G\iint\limits_D \rho(t,\xi_1,\xi_2)(y-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}du.$$

После интегрирования имеем

$$F_1 = -2G\iint\limits_D \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2)(x-\xi_1)}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2;$$

$$F_2 = -2G\iint\limits_D \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2)(y-\xi_2)}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2.$$

Вычисляя последний интеграл в F_3, получим

$$F_3 = G\iint\limits_D \rho(t,\xi_1,\xi_2)\left.\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\varsigma)^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Таким образом, четвёртое уравнение системы (1) выполняется тождественно, и система (1) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0,\\
&u_t + uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho}p_x = -2G\iint\limits_D \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2)(x-\xi_1)}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2;\\
&v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho}p_y = -2G\iint\limits_D \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2)(y-\xi_2)}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Не нарушая общности, уравнение состояния политропного газа возьмём в виде $p = \dfrac{\rho^\gamma}{\gamma}, \gamma = \mathrm{const} > 1$. Тогда система (3) для изэнтропических течений газа будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0,\\
&u_t + uu_x + vu_y + \rho^{\gamma-2}\rho_x =\\
&= -2G\iint\limits_D \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2)(x-\xi_1)}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2;\\
&v_t + uv_x + vv_y + \rho^{\gamma-2}\rho_y =\\
&= -2G\iint\limits_D \frac{\rho(t,\xi_1,\xi_2)(y-\xi_2)}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Замечание 1. Заметим, что система (4) для произвольного числа γ не является аналитической. Полагая, что $(\gamma - 2) = k$ – целое положительное число, получим счётный набор $\gamma = (2+k) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}$, для которых функция $\rho^{\gamma-2}$ является аналитической. Заметим, что для воды $\gamma = 7$, т. е. $k = 5$. При этом для воздуха $\gamma = 1,4$ в этот набор не входит.

Если за неизвестную функцию взять c – скорость звука газа $\left(c^2 = \dfrac{dp}{d\rho} = \rho^{\gamma-1}\right)$, то система (4) будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&c_t + uc_x + vc_y + \frac{\gamma-1}{2}c(u_x+v_y) = 0,\\
&u_t + uu_x + vu_y + \frac{2}{\gamma-1}cc_x =\\
&= -2G\iint\limits_D c^{\frac{2}{\gamma-1}}(t,\xi_1,\xi_2)\frac{x-\xi_1}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2;\\
&v_t + uv_x + vv_y + \frac{2}{\gamma-1}cc_y =\\
&= -2G\iint\limits_D c^{\frac{2}{\gamma-1}}(t,\xi_1,\xi_2)\frac{y-\xi_2}{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Интегралы в правой части системы (5) запишем в полярной системе координат:

$$\xi_1 - x = r\cos\varphi, \quad \xi_2 - y = r\sin\varphi, \quad d\xi_1 d\xi_2 = r dr d\varphi.$$

Соответственно, пределы интегрирования будут иметь вид

$$D: \ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ \ 0 \leqslant r < \infty.$$

Тогда система (5) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
&c_t + uc_x + vc_y + \frac{\gamma-1}{2}c(u_x+v_y) = 0,\\
&u_t + uu_x + vu_y + \frac{2}{\gamma-1}cc_x =\\
&= -2G\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\infty} c^{\frac{2}{\gamma-1}}(t, x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)dr\right]\cos\varphi d\varphi;\\
&v_t + uv_x + vv_y + \frac{2}{\gamma-1}cc_y =\\
&= -2G\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\infty} c^{\frac{2}{\gamma-1}}(t, x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)dr\right]\sin\varphi d\varphi.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Замечание 2. В результате такой замены мы получили аналитическую систему уравнений газовой динамики, но для произвольного числа γ подынтегральная функция $c^{\frac{2}{\gamma - 1}}$ не является аналитической. Предполагая, что $\dfrac{2}{\gamma - 1} = n$ – натуральное число, получим счётный набор $\gamma = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = \left[3; 2; \dfrac{5}{3}; \dfrac{3}{2}; 1,4; ...\right]$, для которых подынтегральная функция является аналитической. Заметим, что для воздуха $\gamma = 1,4$, т. е. $n = 5$.

2. Построение решения задачи Коши

Система (6) с учётом замечания 2 будет иметь вид

$$
\begin{gathered}
c_t + uc_x + vc_y + \frac{1}{n}c(u_x + v_y) = 0, \\
u_t + uu_x + vu_y + ncc_x = \\
= -2G \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} c^n(t, x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \right] \cos\varphi d\varphi; \\
v_t + uv_x + vv_y + ncc_y = \\
= -2G \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} c^n(t, x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \right] \sin\varphi d\varphi.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Пусть при $t = t_0$ заданы начальные условия

$$
c(t_0, x, y) = c_0(x, y), \;\; u(t_0, x, y) = u_0(x, y), \;\; v(t_0, x, y) = v_0(x, y). \tag{8}
$$

Далее будет предполагаться, что функции $c_0(x, y),\ u_0(x, y),\ v_0(x, y)$ ограничены во всей области R^2 и интеграл

$$
\int\limits_0^{\infty} c_0^n(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) dr \tag{9}
$$

сходится.

Построим решение задачи (7), (8) в виде ряда по степеням t

$$
\mathbf{f}(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(x, y) \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \;\; \mathbf{f} = \{c, u, v\}. \tag{10}
$$

Нулевые коэффициенты ряда (10) находятся из начальных условий (8).

В системе (7) положим $t = t_0$ и получим первые коэффициенты ряда (10):

$$c_1 = -u_0 c_{0x} - v_0 c_{0y} - \frac{1}{n} c_0 (u_{0x} + v_{0y});$$

$$u_1 = -u_0 u_{0x} - v_0 u_{0y} - n c_0 c_{0x} - \tag{11}$$

$$-2G \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} c_0^n (x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \right] \cos\varphi d\varphi;$$

$$v_1 = -u_0 v_{0x} - v_0 v_{0y} - n c_0 c_{0y} -$$

$$-2G \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} c_0^n (x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \right] \sin\varphi d\varphi.$$

Продифференцируем систему (7) по t, положим $t = t_0$ и получим вторые коэффициенты ряда (10)

$$c_2 = -u_1 c_{0x} - u_0 c_{1x} - v_0 c_{0y} - v_1 c_{1y} - \frac{\gamma - 1}{2} c_1 (u_{0x} + v_{0y}) -$$

$$-\frac{1}{n} c_0 (u_{1x} + v_{1y});$$

$$u_2 = -u_1 u_{0x} - u_0 u_{1x} - v_1 u_{0y} - v_0 u_{1y} - n(c_1 c_{0x} + c_0 c_{1x}) -$$

$$-2G \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} n c_0^{n-1} c_1 dr \right] \cos\varphi d\varphi;$$

$$v_2 = -u_1 v_{0x} - u_0 v_{1x} - v_1 v_{0y} - v_0 v_{1y} - n c_0 c_{0y} -$$

$$-2G \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} n c_0^{n-1} c_1 dr \right] \sin\varphi d\varphi.$$

Далее будет предполагаться, что интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} n c_0^{n-1} (x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) c_1 (x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) dr \tag{12}$$

сходится.

Остальные коэффициенты ряда получаются рекуррентным образом с помощью дифференцирования системы (7) по t подстановки в полученные выражения $t = t_0$ и ранее вычисленных коэффициентов ряда.

Продифференцируем систему (7) k раз по t, положим $t = t_0$ и получим

$$c_{k+1} = F_{1k}(x,y);$$

$$u_{k+1} = F_{2k}(x,y) - 2G\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\infty} P_k(x,y,r,\varphi)\right]\cos\varphi d\varphi; \tag{13}$$

$$v_{k+1} = F_{3n}(x,y) - 2G\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\infty} P_k(x,y,r,\varphi)dr\right]\sin\varphi d\varphi.$$

Здесь

$$F_{1k}(x,y) = -\sum_{p=0}^{k} C_k^p u_p \cdot c_{x(k-p)} -$$

$$-\sum_{p=0}^{k} C_k^p v_p \cdot c_{y(k-p)} - \frac{\gamma-1}{2}\sum_{p=0}^{k} C_k^p c_p [u_{x(k-p)} + v_{y(k-p)}];$$

$$F_{2k}(x,y) = -\sum_{p=0}^{k} C_k^p u_p \cdot u_{x(k-p)} - \sum_{p=0}^{k} C_k^p v_p \cdot u_{y(k-p)} -$$

$$-\frac{2}{\gamma-1}\sum_{p=0}^{k} C_k^p c_p c_{x(k-p)}; \tag{14}$$

$$F_{3k}(x,y) = -\sum_{p=0}^{k} C_k^p u_p \cdot v_{x(k-p)} - \sum_{p=0}^{k} C_k^p v_p \cdot v_{y(k-p)} -$$

$$-\frac{2}{\gamma-1}\sum_{p=0}^{k} C_k^p c_p c_{y(k-p)};$$

$$P_k(x,y,r,\varphi) = \frac{d^k}{dt^k}[c^n(t, x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)]_{t=t_0}.$$

Далее будет предполагаться, что интегралы

$$\int\limits_0^{\infty} P_k(x,y,r,\varphi)dr \tag{15}$$

сходятся.

При сделанных предположениях рекуррентные соотношения для построения решения задачи Коши получены.

Лемма. Пусть в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ заданы функции $u_0(x,y) = \dfrac{u_{00}(x,y)}{x \cdot y}$, $v_0(x,y) = \dfrac{v_{00}(x,y)}{x \cdot y}$, $c_0(x,y) = \dfrac{c_{00}(x,y)}{x \cdot y}$. Если функции $c_{00}(x,y)$, $u_{00}(x,y)$, $v_{00}(x,y)$ и их частные производные любого порядка ограничены в области R^2, тогда несобственные интегралы (15) сходятся.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по k. База индукции:

$$\int\limits_0^\infty c_0^n(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)dr = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{c_{00}^n(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)}{(x + r\cos\varphi)^n \cdot (y + r\sin\varphi)^n} dr.$$

Заметим, что n – фиксированное натуральное число. Следовательно, функция $c_{00}^n(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)$ ограничена в области R^2, т. е.

$$|c_{00}^n(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)| < A.$$

Тогда

$$\int\limits_0^R \frac{c_{00}^n(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)}{(x + r\cos\varphi)^n \cdot (y + r\sin\varphi)^n} dr <$$

$$< \int\limits_0^R \frac{A}{(x + r\cos\varphi)^n \cdot (y + r\sin\varphi)^n} dr = J_n.$$

Вычислим интеграл J_n.

При $n = 1$

$$J_1 = A \int\limits_0^R \frac{1}{(x + r\cos\varphi) \cdot (y + r\sin\varphi)} dr =$$

$$= \frac{A}{y\cos\varphi - x\sin\varphi} \ln\left|\frac{(x + R\cos\varphi)y}{(y + R\sin\varphi)x}\right|;$$

$$\lim_{R\to\infty} J_1 = \lim_{R\to\infty} \frac{A}{y\cos\varphi - x\sin\varphi} \ln\left|\frac{(x + R\cos\varphi)y}{(y + R\sin\varphi)x}\right| =$$

$$= \frac{A}{y\cos\varphi - x\sin\varphi} \ln\left|\frac{y\cos\varphi}{x\sin\varphi}\right|$$

интеграл (9) сходится.

При $n > 1$ порядок J_n будет $\dfrac{1}{r^{2n}}$, и это гарантирует сходимость интеграла (9).

Дальнейшее доказательство проведём для $n = 1$.

Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{A\cos\varphi}{y\cos\varphi - x\sin\varphi} \ln\left|\frac{y\cos\varphi}{x\sin\varphi}\right| d\varphi;$$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{A\sin\varphi}{y\cos\varphi - x\sin\varphi} \ln\left|\frac{y\cos\varphi}{x\sin\varphi}\right| d\varphi.$$

Перепишем их в виде

$$I_1 = \frac{A}{y}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi - \dfrac{x}{y}} \ln\left|\frac{y}{x}\operatorname{ctg}\varphi\right| d\varphi, \quad I_2 = \frac{A}{x}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi - \dfrac{y}{x}} \ln\left|\frac{x}{y}\operatorname{tg}\varphi\right| d\varphi.$$

Это несобственные интегралы от функций, разрывных в точках: $\varphi = 0$; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; $\varphi = \pi$; $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Далее интегралы I_1, I_2 рассмотрим в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

В интеграле I_1 сделаем замену переменных $z = \operatorname{ctg}\varphi$, в интеграле I_2 – замена $z = \operatorname{tg}\varphi$. Получим

$$I_1 = \frac{A}{y}\int\limits_0^{\infty} \frac{z}{\left(z - \dfrac{x}{y}\right)(1+z^2)} \ln\left(\frac{y}{x}z\right) dz;$$

$$I_2 = \frac{A}{x}\int\limits_0^{\infty} \frac{z}{\left(z - \dfrac{y}{x}\right)(1+z^2)} \ln\left(\frac{x}{y}z\right) dz.$$

Исследуем интеграл I_1 в точке $z = \dfrac{x}{y}$. Интеграл рассмотрим в пределах $\left[\dfrac{x}{y} - a, \dfrac{x}{y} + b\right]$, $a \in \left(0, \dfrac{x}{y}\right)$, $b \in \left(\dfrac{x}{y}, \infty\right)$.

$$I_1 = \frac{A}{y}\int\limits_{\frac{x}{y}-a}^{\frac{x}{y}} \frac{z}{\left(z - \dfrac{x}{y}\right)(1+z^2)} \ln\left(\frac{y}{x}z\right) dz +$$

$$+\frac{A}{y}\int\limits_{\frac{x}{y}}^{\frac{x}{y}+b} \frac{z}{\left(z - \dfrac{x}{y}\right)(1+z^2)} \ln\left(\frac{y}{x}z\right) dz.$$

Сделаем замену переменных $U = \dfrac{y}{x} z, \quad z = \dfrac{x}{y} U$. Будем иметь

$$I_1 = \frac{Ax}{y^2} \int\limits_{1-a\frac{y}{x}}^{1} \frac{U}{(U-1)\left(1+\left(\frac{x}{y}U\right)^2\right)} \ln U dU +$$

$$+\frac{Ax}{y^2} \int\limits_{1}^{1+b\frac{y}{x}} \frac{U}{(U-1)\left(1+\left(\frac{x}{y}U\right)^2\right)} \ln U dU.$$

Или, если $V = U - 1$,

$$I_1 = \frac{Ax}{y^2} \int\limits_{-a\frac{y}{x}}^{0} \frac{V+1}{V\left(1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2\right)} \ln(1+V) dV +$$

$$+\frac{Ax}{y^2} \int\limits_{0}^{b\frac{y}{x}} \frac{V+1}{V\left(1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2\right)} \ln(1+V) dV.$$

Поскольку $\ln(1+V) \leqslant V$, то справедлива оценка

$$I_1 \leqslant \frac{Ax}{y^2} \int\limits_{-a\frac{y}{x}}^{0} \frac{V+1}{1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2} dV + \frac{A}{y} \int\limits_{0}^{b\frac{y}{x}} \frac{V+1}{1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2} dV$$

или

$$I_1 \leqslant \frac{A}{2x} \int\limits_{-a\frac{y}{x}}^{0} \frac{d\left(1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2\right)}{1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2} + \frac{A}{2x} \int\limits_{0}^{b\frac{y}{x}} \frac{d\left(1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2\right)}{1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2}.$$

Интегрируя, имеем

$$I_1 \leqslant \frac{A}{2x} \left[\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2\right) \right] \Bigg|_{-a\frac{y}{x}}^{0} + \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}(V+1)^2\right) \Bigg|_{0}^{b\frac{y}{x}}$$

или

$$I_1 \leqslant \frac{A}{2x} \ln \frac{1+\dfrac{x^2}{y^2}\left(1+b\dfrac{y}{x}\right)^2}{1+\dfrac{x^2}{y^2}\left(1-a\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Аналогично получаем оценку для I_2:

$$I_2 \leqslant \frac{A}{2y} \ln \frac{1+\dfrac{y^2}{x^2}\left(1+b\dfrac{x}{y}\right)^2}{1+\dfrac{x^2}{y^2}\left(1-a\dfrac{x}{y}\right)^2}.$$

Следовательно, интеграл I_1 в точке $z=\dfrac{x}{y}$ и интеграл I_2 в точке $z=\dfrac{y}{x}$ сходятся.

Исследуем интеграл I_1 в точке $z=0$. Рассмотрим его в пределах $[0,a]$ и после замены $U=\dfrac{y}{x}z,\ \ z=\dfrac{x}{y}U$ получим

$$I_1 = \frac{Ax}{y^2}\int\limits_0^{a\frac{y}{x}} \frac{U}{(U-1)\left(1+\left(\dfrac{x}{y}U\right)^2\right)} \ln U dU.$$

В окрестности точки $U=0$ справедливо неравенство $\ln U \leqslant \dfrac{1}{U}$. Тогда

$$I_1 \leqslant \frac{Ax}{y^2}\int\limits_0^{a\frac{y}{x}} \frac{U^2}{(U-1)\left(1+\left(\dfrac{x}{y}U\right)^2\right)} dU \leqslant \frac{Ax}{y^2}\int\limits_0^{a\frac{y}{x}} \frac{U}{1+\left(\dfrac{x}{y}U\right)^2} dU.$$

Интегрируя, имеем

$$I_1 \leqslant \frac{A}{2x} \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}U^2\right)\Bigg|_0^{a\frac{y}{x}} = \frac{A}{2x}\ln 2.$$

Оценка для I_2 будет иметь вид

$$I_2 \leqslant \frac{A}{2y}\ln 2.$$

Следовательно, интегралы I_1 и I_2 в точке $z=0$ сходятся.

Исследуем интеграл I_1 при $z\to\infty$. Рассмотрим его в пределах $[b,\infty]$ и после замены $U=\dfrac{y}{x}z,\ \ z=\dfrac{x}{y}U$ получим

$$I_1 = \frac{Ax}{y^2}\int\limits_{b\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{U}{(U-1)\left(1+\left(\dfrac{x}{y}U\right)^2\right)} \ln U dU.$$

При $U \to \infty$ справедливо неравенство $\ln U \leqslant \sqrt{U}$. Тогда

$$I_1 \leqslant \frac{Ax}{y^2} \int\limits_{b\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{U\sqrt{U}}{(U-1)\left(1+\left(\frac{x}{y}U\right)^2\right)} dU \leqslant \frac{A}{x} \int\limits_{b\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{1}{(U-1)\sqrt{U}} dU.$$

Делая замену переменных $U = w^2$, получим

$$I_1 \leqslant \frac{2A}{x} \int\limits_{\sqrt{b\frac{y}{x}}}^{\infty} \frac{1}{w^2-1} dw = \frac{A}{x} \ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{b\frac{y}{x}}}^{\infty} = \frac{A}{x} \ln\left|\frac{b\frac{y}{x}+1}{b\frac{y}{x}-1}\right|.$$

Оценка для I_2 будет иметь вид

$$I_2 \leqslant \frac{A}{y} \ln\left|\frac{b\frac{x}{y}+1}{b\frac{x}{y}-1}\right|.$$

При $U \to \infty$ интегралы I_1 и I_2 сходятся.

База индукции доказана.

Заметим, что условия леммы и формулы (11), (12) гарантируют, что $c_1,\ c_2$ имеет такой же порядок по $x,\ y$, как и c_0.

Делаем индуктивное предположение, что, при $l < k,\ c_l$ имеет такой порядок по $x,\ y$, как и c_0. Тогда из формул (13) и условий леммы получаем, что интегралы (15) сходятся. Лемма доказана. ■

Заключение

1. В работе построена математическая модель для описания двумерных течений газа, гравирующего по Ньютону.

2. Для интегро-дифференциальной системы уравнений газовой динамики поставлена задача Коши, решение которой построено в виде степенного ряда.

3. Коэффициенты ряда получены с помощью рекуррентных соотношений из решения алгебраически уравнений с интегральными правыми частями.

4. Получены ограничения на начальные условия задачи Коши, при которых сходятся несобственные интегралы в правых частях алгебраических уравнений.

Таким образом, выполнено аналитическое исследование для дальнейшего численного моделирования гравитационных волн на большой промежуток времени.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Дерябин С.Л., Чуев Н.П. Сферически симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005.
4. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.
5. Дерябин С.Л., Садов А.П. Математическое моделирование течений самогравитирующего газа с помощью стационарных автомодельных переменных // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2022. № 3 (55). С. 15–22.
6. Чуев Н.П. Аналитический метод исследования пространственных задач динамики самогравитирующего газа // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 1. С. 79–89.
7. Дерябин С.Л., Чуев Н.П. Построение трёхмерных течений самогравитирующего идеального газа, непрерывно примыкающих к вакууму // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 2 (14). С. 4–13.

THE CAUCHY PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL GAS FLOWS, GRAVITATING BY NEWTON IN THE SPACE OF R^2

S.L. Deryabin
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru
A.P. Sadov
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: alsadov@yandex.ru

Ural State University of Railway Engineering, Yekaterinburg, Russia

Abstract. The paper considers isentropic flows of an ideal gas gravitating by Newton. Two-dimensional integro-differential systems of equations of gas dynamics for a polytropic gas are obtained as mathematical models. For the obtained equations, the Cauchy problem is posed in the entire space R^2. The solution of the problem is constructed in the form of power series. The coefficients of the series are found in solving algebraic equations with integral right-hand sides. Restrictions are obtained on the initial conditions of the Cauchy problem, under which improper integrals converge in the right-hand sides of algebraic equations.

Keywords: gas engraving according to Newton, integro-differential system of equations of gas dynamics, Cauchy problem, power series, improper integrals.

Дата поступления в редакцию: 24.12.2023