Математические структуры и моделирование 2024. № 1 (69). С. 18–31

УДК 512.815.8
DOI 10.24147/2222-8772.2024.1.18-31

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ. IV: ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Рассматривается структура групповой алгебры конформной группы (группы, лежащей в основании теоретико-группового описания периодической системы химических элементов) в рамках двукратного накрытия. Изучается водородная реализация подалгебры Картана и генераторов Вейля групповой алгебры.

Ключевые слова: периодический закон, таблица Менделеева, конформная группа, групповая алгебра, подалгебра Картана, генераторы Вейля.

1. Введение

Книга природы написана на языке математики.

Галилео Галилей

Общеизвестно, что наука только тогда достигает совершенства, когда начинает пользоваться математикой (К. Маркс). В полной мере это относится к химии, где периодический закон является наиболее важным обобщением этой науки, а периодическая таблица Менделеева называется E. Scerri «иконой современной химии» [1]. Сразу же после открытия Д.И. Менделеевым периодической системы химических элементов стали предприниматься попытки математического описания (математизации) периодического закона (об истории вопроса см. [2]). Неудивительно, что наиболее подходящей математической структурой для описания явления периодичности, т. е. повторяемости (цикличности), оказалась теория групп.

Теоретико-групповые методы изучения периодической системы были предложены независимо несколькими авторами в начале 1970-х гг. В 1971 г. появляется работа Ю.Б. Румера и А.И. Фета [3], в которой было отмечено поразительное сходство между строением системы химических элементов и строением энергетического спектра атома водорода[1]. Это сходство объясняется в [3] в рамках представления

[1]Э. Маделунг первым применил «водородные» квантовые числа n, l, m, s для нумерации элементов периодической системы. Следует отметить, что числа n, l, m, s не являются в модели Бора квантовыми числами, поскольку в этой модели нет единого квантово-механического описания системы элементов, последним присваивается атомный номер Z, различающий, а не объединяющий отдельные квантовые системы. Полученную классификацию элементов Маделунг назвал «эмпирической», поскольку он не смог связать её с моделью Бора. Видимо, именно из-за отсутствия теоретического обоснования на тот момент (1936 г.) он опубликовал её в виде справочного материала в [4, с. 585].

В.А. Фока F [7] для спинорной группы $\mathbf{Spin}(4)$ (двулистная накрывающая группы $\mathrm{SO}(4)$). Однако главным недостатком описания в [3] является приводимость представления F, что не позволяло рассматривать систему как «элементарную» в смысле групповой механики. В 1972 г. Б.Г. Конопельченко [8] расширил представление Фока F до представления F^+ конформной группы, устранив тем самым указанный выше недостаток. В том же 1972 г. появляется статья А.О. Барута [9] о групповой структуре периодической системы в рамках конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$. Барут вводит квантовые числа[2] ν, λ, μ_λ, μ_σ группы $\mathrm{SO}(4,2)$ с целью рассмотрения химических элементов как различных *состояний* единой *квантовой системы*, которая, в свою очередь, рассматривается как своего рода сверхчастица. Следуя предложению, данному позднее С.Е. Вульфманом [11] в 1978 г., эта псевдочастица, спектр которой является атомным супермультиплетом Барута, будет обозначаться названием *барутон*. Различные состояния (или элементы) Барут представляет кет-векторами $|\ \alpha\rangle$, $|\ \beta\rangle$, $|\ \gamma\rangle$, $\ldots$, которые образуют базис бесконечномерного гильбертова пространства. В рамках теоретико-группового описания различные химические элементы рассматриваются как *бессструктурные* частицы, при этом предполагается, что атомы являются *несоставными*, а поэтому их внутреннюю динамику можно игнорировать[3].

Одновременно с этими публикациями появляются работы О. Новаро с соавторами [16, 17], где группой симметрии периодической системы предлагается группа $G_{NB} = \mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$, образованная тремя взаимно коммутирующими угловыми моментами $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_2$, $\boldsymbol{J}_3$. Группа Новаро–Беррондо G_{NB} допускает следующую редукцию:

$$\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)\supset\mathrm{O}(4)\supset\mathrm{SO}(3).$$

Неприводимые представления группы G_{NB} имеют вид (j_1, j_2, j_3), где j_1, j_2, j_3 яв-

При рассмотрении истории возникновения правила Маделунга $(n+l, n)$ возникает множество приоритетных вопросов. Как отмечает В.Н. Островский [5], трудно проследить происхождение этого правила, которое выглядит как своего рода научный фольклор. Так, в 1930 г. В. Карапетов использовал это правило для предсказания трансурановых элементов до $Z = 124$ включительно [6].

[2]Чтобы не быть предвзятым по отношению к квантовым числам n, l, m_l и m_s механической (планетарной) модели Бора, описывающей водородопобные системы, Барут намеренно ввёл символы ν, λ, μ_λ и μ_σ, имеющие, прежде всего, теоретико-групповой (не механический) смысл, хотя диапазон их изменения такой же, как у «водородных» квантовых чисел. Островский аналогичным образом проводит различие между обычными («водородными») квантовыми числами и абстрактными $\mathrm{SO}(4,2)$-символами, обозначая последние знаком тильды: $\tilde{n}$, $\tilde{l}$, $\tilde{m}_l$, $\tilde{m}_s$ [10]. Этот символизм призван подчеркнуть холистическую трактовку теоретико-группового подхода в отличие от механистического редукционизма модели Бора, в которой квантовые числа соответствуют радиальным и орбитальным движениям «составных частей» атома за исключением квантового числа m_s, не имеющего, как известно, классического аналога, что лишний раз указывает на паллиативный характер модели Бора.

[3]Под «бесструктурностью» здесь не следует понимать отсутствие какой-либо структуры вообще. Прежде всего, под этим понимается отрицание структуры редукционистского плана в виде механических моделей (планетарная модель Резерфорда–Бора, модель кварков), привнесённых, как говорил Гейзенберг, из «репертуара классической физики», т. е. моделей, адекватных на уровне макрофизики, но теряющих свой смысл и затемняющих существо дела при переносе их на микроуровень. В рамках теоретико-группового подхода реализуется структура холистического плана. А именно, различные состояния, являющиеся *циклическими векторами* $\mathbb{K}$-гильбертова пространства, имеют структуру тензорного произведения [12–15]. Эта структура задаёт динамическую связь между спином, зарядом и массой.

ляются собственными значениями операторов Казимира $\boldsymbol{J}_1^2$, $\boldsymbol{J}_2^2$, $\boldsymbol{J}_3^2$ и принимают целые и полуцелые значения. Физически допустимые представления группы G_{NB} имеют два вида: $(j, j, 0)$ и $(j, 0, j)$, $j = 0, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ Это следствие представления Фока F $(j_1 = j_2)$ для группы $\mathrm{O}(4)$, входящей в редукционную цепочку для G_{NB}.

Уже из первых работ в этом направлении появляется важное различие между двумя теоретико-групповыми подходами. Первым на это различие указал В.Н. Островский [10]. Исторически сложилось так, что единственной изучаемой (методами теории групп) квантовой системой был атом водорода, гамильтониан которого был точно известен. Когда теория групп начала применяться в атомной физике, это было типичным случаем. Следуя терминологии Островского [10], будем называть это *подходом атомной физики* (ПАФ). Однако, когда дело доходит до периодической системы, гораздо сложнее построить гамильтониан, не говоря уже об изучении его симметрии. *Подход элементарных частиц* (ПЭЧ), основы которого заложены в работах Румера, Фета и Барута, опирается на аналогию с группами динамических («внутренних») симметрий физики элементарных частиц, таких как $\mathrm{SU}(2)$ (изотопический спин), $\mathrm{SU}(3)$ и $\mathrm{SU}(6)$. В этом подходе химические элементы рассматриваются как различные состояния некоторой субстанции: «атомной материи» Барута[4] [9] или «бесструктурной частицы с внутренними степенями свободы» Румера–Фета [3].

Все дальнейшие теоретико-групповые обобщения были связаны с попытками теоретического объяснения так называемых атомных *магических чисел*, описывающих *удвоение периодов*: 2, 8, 8, 18, 18, 32, 32, ... Как отмечает P.-O. Löwdin [18], отсутствие теоретического объяснения удвоения периодов (имеющее место до сих пор, см. [1,19]), равнозначно отсутствию теоретического понимания периодической системы химических элементов в целом[5]. Удвоение периодов означает, что всё многообразие химических элементов естественным образом распадается на два множества с суммой $(n+l)$, чётной или нечётной, где n и l – главное и орбитальное квантовые числа соответственно. В результате элементы из одного и того же (чётного или нечётного) множества химически более схожи, чем элементы из разных множеств

[4]Поскольку в рамках ПЭЧ различные состояния образуют *единую квантовую систему*, то, как следствие, возможны *квантовые переходы* между состояниями (трансмутация элементов). В этом контексте «атомную материю» Барута следует понимать как «первичную материю» (*prima materia*).

[5]Согласно широко распространённому заблуждению, планетарная модель Бора объясняет периодическую систему Менделеева. Однако Бор выводил электронные конфигурации не из квантовой теории, а исходя из известных химических и спектроскопических свойств элементов. Более того, интерпретация структуры периодической системы на основе последовательности заполнения электронных атомных орбиталей в соответствии с их относительными энергиями ε_{nl} весьма и весьма приближённа. Универсальной последовательности орбитальных энергий ε_{nl} не существует, к тому же такая последовательность не определяет полностью порядок заселения атомных орбиталей электронами, поскольку необходим учёт конфигурационных взаимодействий (наложение конфигураций в многоконфигурационном приближении). Неизвестна причина повторения сходных электронных конфигураций атомов (более подробно см. [20]). В результате модель Бора может воспроизвести (аппроксимировать) первоначальное открытие Менделеева только с помощью математических приближений (в рамках одноэлектронного приближения Хартри) – она не может предсказать (объяснить) периодическую систему. Как следствие, широко распространённое представление о сводимости (редукции) химии к физике ставится под сомнение [21,22]. В связи с этим в последнее время в журнале Foundations of Chemistry возникла довольно широкая дискуссия об онтологическом статусе химии.

[23–25]. Барут пытался объяснить удвоение периодов при помощи редукции представлений h конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$ относительно подгруппы $\mathrm{SO}(3,2)$ (группа анти-де Ситтера), основанной на следующей цепочке:

$$\mathrm{SO}(4,2) \supset \mathrm{SO}(3,2) \supset \mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{SO}(2),$$

согласно которой представление h распадается на сумму $h = h_e \oplus h_o$, где h_e соответствует чётному $(n+l)$, h_o – нечётному $(n+l)$. Островский, критикуя схему Барута, отмечает, что согласно этой редукции подгруппа $\mathrm{O}(4)$ полностью теряет своё значение. Отсюда следует, что квантовое число n, которое непосредственно связано с $\mathrm{O}(4)$, не появляется в этой схеме. Однако это квантовое число является существенным для описания периодической системы[6]. Более того, с группой $\mathrm{O}(4)$ связано первое применение теории групп в квантовой механике. В статье 1926 г. [27] Паули использовал матричную механику Гейзенберга для получения спектра атома водорода. Помимо углового момента $\mathbf{L}$, Паули также ввёл квантовомеханический аналог $\mathbf{A}$ классического вектора Лапласа–Рунге–Ленца. Инвариантность гамильтониана относительно этих операторов ($\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$) оказалась достаточной для объяснения полного вырождения спектра водорода. Кроме того, соответствующая алгебра может быть идентифицирована как алгебра Ли группы вращений в четырёх измерениях, изоморфная специальной ортогональной группе $\mathrm{SO}(4)$, что впоследствии было строго установлено В. Фоком [28] (и далее В. Баргманом [29]).

В работах А.И. Фета [30, 31] удвоение периодов интерпретируется посредством включения циклической группы $\mathbb{Z}_2$ (т. е. группы перестановок двух элементов) в динамическую группу:

$$G_F = \mathrm{O}(4,2) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathbb{Z}_2.$$

Далее, в 1981 г. Островский [32] вводит группу

$$G_O = \mathrm{O}(4,2) \otimes \mathrm{SU}(2)_S \otimes \mathrm{SU}(2)_T.$$

Её подгруппа $\mathrm{O}(4) \otimes \mathrm{SU}(2)_S \otimes \mathrm{SU}(2)_T$ содержит симметрию $\mathrm{O}(4)$, которая приводит к представлениям размерности n^2. Посредством расширения группы $\mathrm{O}(4)$ до $\mathrm{O}(4) \otimes \mathrm{SU}(2)_S$ размерности представлений удваиваются до $2n^2$. Нижний индекс S здесь указывает на физическое происхождение группы $\mathrm{SU}(2)$ от электронного спина $m_s = \pm 1/2$. Островский называл это «горизонтальное» удвоение длин периодов *спиновым удвоением*. «Вертикальное» удвоение длин периодов, известное как фактическое *удвоение периодов* в периодической системе, было сформулировано Островским в теоретико-групповой форме путём введения второй группы $\mathrm{SU}(2)$, обозначаемой $\mathrm{SU}(2)_T$ и формально аналогичной группе изоспина. Это приводит к *двум копиям* представлений группы $\mathrm{O}(4,2) \otimes \mathrm{SU}(2)_S$, которые реализуются в двух различных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. Островский вводит три оператора T_+, T_- и T_3 алгебры $\mathfrak{su}(2)_T$, где оператор T_3 действует как генератор Картана,

[6] Удвоение периодов, предложенное Барутом посредством двух различных представлений группы анти-де Ситтера $\mathrm{SO}(3,2)$, О. Новаро [26] называет «фатальным недостатком», поскольку получающиеся размерности не соответствуют магическим числам. Сам Новаро пытался объяснить удвоение периодов посредством различия двух типов представлений $(j, j, 0)$ и $(j, 0, j)$ группы G_{NB} [26].

различающий состояния из обоих подпространств $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$, а лестничные операторы $T_\pm$ действуют как операторы сдвига между $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. Сравнение с группой Фета G_F, где удвоение периодов задаётся циклической группой $\mathbb{Z}_2$, показывает, что конструкция G_F не приводит к использованию лестничных операторов для соединения двух непересекающихся представлений группы $\mathrm{O}(4,2)\otimes\mathrm{SU}(2)_S$, как это имеет место в конструкции Островского G_O. В своих последующих работах [33, 34] Фет использует по сути такую же группу $\mathrm{SO}(4,2)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)'$, как у Островского.

В настоящей статье, являющейся продолжением серии работ [35–38], изучается структура групповой алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$, группы, как показало время, наиболее подходящей для изучения периодической системы химических элементов. За исключением группы Новаро–Беррондо G_{NB}, эта группа является главной составной частью группы Фета G_F и группы Островского G_O. По этой причине групповая алгебра $\mathfrak{so}(4,2)$ описывает основные структурные свойства периодической системы. Прежде всего, алгебра Ли $\mathfrak{so}(4,2)$ является алгеброй третьего ранга, что делает возможным графическую визуализацию корневой и весовой диаграмм[7]. Графический аспект чрезвычайно важен, поскольку первой формой, в которой является периодический закон, есть всем известное его табличное представление. В книге Е.Г. Мазурса [40] (см. также книгу Д.В. ван Спронсона [41]) приведено более 700 различных графических представлений периодической системы Менделеева. Сам Менделеев, как известно, предпочитал трёхмерную спиралевидную конструкцию (наподобие конструкции Шанкортуа). Структура алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ определяется выделением подалгебры Картана и последующим построением генераторов Вейля, что позволяет задать базис Картана–Вейля алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ и построить соответствующую корневую и весовую диаграммы. В п. 2 в краткой форме рассматриваются все необходимые для дальнейшего исследования групповой алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ теоретические конструкции: подалгебра Картана, генераторы Вейля и инварианты Казимира. В п. 3 используется представление Барута для генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ как наиболее удобное для последующей редукции $\mathfrak{so}(4,2)$ к её подалгебрам $\mathfrak{so}(3,1)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$. При этом используется переход к двукратному накрытию конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$, которое изоморфно группе $\mathrm{SU}(2,2)$[8]. Унитарные представления группы $\mathrm{SU}(2,2)$, следуя методу Томаса [43], изучались в работах [44–49] главным образом относительно максимальной компактной подгруппы $K=\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$. Конечномерные представления группы $\mathrm{SU}(2,2)$ определяются в базисе Йао [47] относительно подгруппы K.

[7]Для алгебр Ли ранга $r>3$ графическая реализация корневых и весовых диаграмм становится практически невозможной. Альтернативным методом построения таких диаграмм для алгебр Ли любого ранга является метод диаграмм Дынкина [39].

[8]С чисто алгебраической точки зрения более адекватно рассмотрение конформной группы с обратной сигнатурой, т. е. $\mathrm{SO}(2,4)$, поскольку в этом случае двулистное накрытие (спинорная группа) $\mathbf{Spin}_+(2,4)\simeq\mathrm{SU}(2,2)$ имеет кватернионное кольцо деления $\mathbb{K}\simeq\mathbb{H}$ в отличие от $\mathbf{Spin}_+(4,2)$ с вещественным кольцом $\mathbb{K}\simeq\mathbb{R}$, см. [42].

2. Подалгебра Картана и генераторы Вейля

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли размерности n, образованная генераторами X_i $(i = 1 \leftarrow n)$, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\mathsf{X}_i, \mathsf{X}_j] = \sum_{k=1}^{n} f_{ijk}\mathsf{X}_k \equiv f_{ijk}\mathsf{X}_k,$$

где f_{ijk} – структурные константы. m генераторов X_i образуют *базис* $\mathcal{B}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1. (Максимальная абелева подалгебра.) Абелева подалгебра $\mathfrak{K}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *максимальной*, когда нет дополнительных элементов алгебры $\mathfrak{g}$, которые коммутируют со всеми элементами подалгебры $\mathfrak{K}$.

Подалгебра $\mathfrak{K}$ более известна как *подалгебра Картана* алгебры $\mathfrak{g}$, а число m элементов подалгебры Картана называется *рангом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 2. (Подалгебра Картана алгебры Ли.) Пусть $\mathfrak{g}$ – n-мерная алгебра Ли, тогда множество всех взаимно коммутирующих базисных элементов $\{\mathsf{X}_i = \mathsf{H}_i\}$ $(i = 1 \to m)$ алгебры $\mathfrak{g}$ образует базис максимальной абелевой подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{g}$.

Определение 3. (Ранг алгебры Ли.) Размерность m подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{g}$ определяет *ранг* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Элементы H_i подалгебры Картана $\mathfrak{K}$ называются *генераторами Картана* или *элементами Картана*. Генераторы Картана удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\mathsf{H}_i, \mathsf{H}_j] = 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Это означает, что все H_i одновременно диагонализируемы. Обозначая их собственные значения через h_i, получим

$$\mathsf{H}_i \left|h_1, h_2, \ldots, h_m\right\rangle = h_i \left|h_1, h_2, \ldots, h_m\right\rangle, \quad \forall i = 1 \to m.$$

Собственные значения h_i называются *весами*. h_i можно рассматривать как компоненты m-мерного вектора $\boldsymbol{h}$, который называется *весовым вектором*. Веса подалгебры Картана используются как квантовые числа для обозначения данного мультиплета.

Далее, из оставшихся генераторов X_i алгебры $\mathfrak{g}$ $(i = 1 \to n - m)$, не являющихся элементами подалгебры Картана $\mathfrak{K}$, образуем линейные комбинации, которые, в свою очередь, образуют множество *повышающих* и *понижающих* операторов (*лестничные операторы* E_α – *генераторы Вейля* или *элементы Вейля*). Наряду с генераторами Картана H_i, они составляют *базис Картана–Вейля* $\{\mathsf{H}_i, \mathsf{E}_\alpha\}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть разложена в прямую сумму, состоящую из подалгебры Картана $\mathfrak{K}$ (m генераторов H_i) и $(n - m)$ одномерных подалгебр $\mathfrak{W}_\alpha$, образуемых генераторами Вейля E_α:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \bigoplus_{\alpha=1}^{n-m} \mathfrak{W}_\alpha = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{W}_1 \oplus \mathfrak{W}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{W}_{n-m}.$$

Генераторы H_i и E_α удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\mathsf{H}_i, \mathsf{E}_\alpha] = \alpha_i \mathsf{E}_\alpha, \quad \forall i = 1 \to m, \ \alpha = 1 \to n - m. \tag{2}$$

Соотношения (2) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{bmatrix} [\mathsf{H}_1, \mathsf{E}_\alpha] \\ [\mathsf{H}_2, \mathsf{E}_\alpha] \\ \vdots \\ [\mathsf{H}_m, \mathsf{E}_\alpha] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \mathsf{E}_\alpha = \boldsymbol{\alpha} \mathsf{E}_\alpha.$$

Различные α_i называются *корнями* генератора E_α. Множество корней α_i может рассматриваться как совокупность компонент вектора $\boldsymbol{\alpha}$, называемого *корневым вектором*, который принадлежит m-мерному *корневому пространству*. Корневой вектор для каждого генератора Вейля E_α может быть изображён на диаграмме, называемой *диаграммой Вейля*, размерность которой равна рангу m алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следует отметить, что в силу (1) все генераторы Картана H_i имеют корни $\alpha_i = 0$ и, следовательно, располагаются в центре диаграммы Вейля.

В общем случае стандартная форма коммутационных соотношений для генераторов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ записывается следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} [\mathsf{H}_i, \mathsf{H}_j] & = & 0, & \forall i, j = 1, \ldots, m; \\ [\mathsf{H}_i, \mathsf{E}_\alpha] & = & \alpha_i \mathsf{E}_\alpha, & \forall i = 1 \to m, \ \alpha = 1 \to n - m; \\ [\mathsf{E}_\alpha, \mathsf{E}_{-\alpha}] & = & \alpha^i \mathsf{H}_i; & \\ [\mathsf{E}_\alpha, \mathsf{E}_\beta] & = & N^\gamma_{\alpha\beta} \mathsf{E}_\gamma, & \beta \neq -\alpha. \end{array} \tag{3}$$

Величины $N^\gamma_{\alpha\beta}$ также могут быть выражены через корневые векторы, так что мы знаем алгебру $\mathfrak{g}$, если известны её корни. Эти корни обладают свойством

$$\sum_\alpha \alpha_i \alpha_j = \delta_{ij},$$

где α может принимать только $(n - m)$ значений:

$$\alpha = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm \frac{1}{2}(n - m). \tag{4}$$

Далее, *инварианты Казимира* C_μ коммутируют со всеми генераторами X_i алгебры $\mathfrak{g}$:

$$[\mathsf{C}_\mu, \mathsf{X}_i] = 0, \quad \forall \mu = 1 \to m, \ i = 1 \to n.$$

Число инвариантов (операторов) Казимира для данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяется рангом этой алгебры.

Теорема 1. *(Теорема Рака́) Для каждой n-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга m существует в общей сложности m операторов Казимира C_μ ($\mu = 1 \to m$), которые коммутируют с генераторами X_i ($i = 1 \to n$) алгебры $\mathfrak{g}$.*

Как следствие, все $\mathbf{C}_\mu$ также коммутируют с генераторами Картана $\mathbf{H}_i$:

$$[\mathbf{C}_\mu, \mathbf{H}_i] = 0, \quad \forall \mu, i = 1 \to m.$$

Таким образом, можно найти полный набор состояний, которые одновременно являются собственными состояниями всех $\mathbf{C}_\mu$ и $\mathbf{H}_i$. Определим кет-вектор следующего вида:

$$|c_1, c_2, \ldots, c_m; h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle = |c_\mu; h_i\rangle\,,$$

где c_μ, h_i – собственные значения операторов $\mathbf{C}_\mu$, $\mathbf{H}_i$. Тогда

$$\mathbf{C}_\mu\,|c_\mu; h_i\rangle = c_\mu\,|c_\mu; h_i\rangle\,, \quad \mathbf{H}_i\,|c_\mu; h_i\rangle = h_i\,|c_\mu; h_i\rangle$$

для всех $\mu, i = 1 \to m$. Мы приходим к выводу, что инварианты Казимира $\mathbf{C}_\mu$ и образующие $\mathbf{H}_i$ подалгебры Картана $\mathfrak{K}$ позволяют нам помечать каждое состояние мультиплета, в то время как лестничные операторы $\mathbf{E}_\alpha$ позволяют перемещаться между состояниями внутри мультиплета, как показано на диаграмме Вейля. Таким образом, когда лестничный оператор $\mathbf{E}_\alpha$ воздействует на кет-вектор $|c_\mu; h_i\rangle$, он сдвигает собственное значение операторов $\mathbf{H}_i$ на величину α_i в соответствии с

$$\mathbf{E}_\alpha\,|c_\mu; h_i\rangle \approx |c_\mu; h_i + \alpha_i\rangle\,.$$

3. Конформная группа $\mathrm{SO}(4,2)$

Специальная псевдоортогональная группа в шести измерениях, $\mathrm{SO}(4,2)$, соответствует группе вращений шестимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,2}$, или, что эквивалентно, множеству 6×6 ортогональных матриц, оставляющих квадратичную форму

$$Q(\boldsymbol{r}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$, инвариантной.

Структура соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$ определяется коммутационными свойствами её генераторов $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$. $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ образуют базис алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Число независимых генераторов легко найти: из 36 возможных комбинаций индексов α и β шесть комбинаций исчезают в силу $\mathbf{L}_{\alpha\alpha} = 0$, это уменьшает число генераторов до 30. Более того, в силу $\mathbf{L}_{\alpha\beta} = -\mathbf{L}_{\beta\alpha}$ остаётся только 15 независимых генераторов, число которых также может быть получено с помощью формулы $n(n-1)/2$. Таким образом,

$$\mathbf{L} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L}_{12} & \mathbf{L}_{13} & \mathbf{L}_{14} & \mathbf{L}_{15} & \mathbf{L}_{16} \\ & 0 & \mathbf{L}_{23} & \mathbf{L}_{24} & \mathbf{L}_{25} & \mathbf{L}_{26} \\ & & 0 & \mathbf{L}_{34} & \mathbf{L}_{35} & \mathbf{L}_{36} \\ & & & 0 & \mathbf{L}_{45} & \mathbf{L}_{46} \\ & & & & 0 & \mathbf{L}_{56} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Система пятнадцати генераторов $\mathsf{L}_{\alpha\beta}$ алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathsf{L}_{\alpha\beta}, \mathsf{L}_{\gamma\delta}] = i\left(g_{\alpha\delta}\mathsf{L}_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}\mathsf{L}_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}\mathsf{L}_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}\mathsf{L}_{\alpha\gamma}\right), \tag{6}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, 6$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, при этом $g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$, $g_{55} = g_{66} = -1$.

3.1. Водородная реализация алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$

В этом пункте рассмотрим *представление Барута* [9, 50] алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$ конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$. Как отмечалось во введении, подгруппа $\mathrm{SO}(4)$ имеет важное значение в полной спектр-генерирующей группе $\mathrm{SO}(4,2)$. Группа $\mathrm{SO}(4)$ описывает вырождение уровней энергии атома водорода [7, 27]. В алгебре $\mathfrak{so}(4,2)$ подалгебра $\mathfrak{so}(4)$ представлена следующими генераторами:

$$\mathsf{L}_1 = \mathsf{L}_{23}, \quad \mathsf{L}_2 = \mathsf{L}_{31}, \quad \mathsf{L}_3 = \mathsf{L}_{12},$$

$$\mathsf{A}_1 = \mathsf{L}_{14}, \quad \mathsf{A}_2 = \mathsf{L}_{24}, \quad \mathsf{A}_3 = \mathsf{L}_{34}. \tag{7}$$

Здесь L_1, L_2, L_3 – генераторы углового момента, генераторы A_1, A_2, A_3 соответствуют вектору Лапласа–Рунге–Ленца [27]. Коммутационные соотношения для (7) имеют вид

$$[\mathsf{L}_i, \mathsf{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathsf{L}_k, \quad [\mathsf{L}_i, \mathsf{A}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathsf{A}_k, \quad [\mathsf{A}_i, \mathsf{A}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathsf{L}_k.$$

Далее, полная спектр-генерирующая алгебра $\mathfrak{so}(4,2)$ должна включать алгебру $\mathfrak{so}(2,1)$, генераторы Δ_i ($i = 1 \to 3$) которой действуют на радиальную часть водородной волновой функции $\psi(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$, а поскольку генераторы L_i действуют только на угловую часть, то

$$[\mathsf{L}_i, \Delta_i] = 0.$$

Следовательно, генераторы Δ_i подалгебры $\mathfrak{so}(2,1)$ не должны содержать общих индексов с генераторами L_i углового момента. Таким образом,

$$\Delta_1 = \mathsf{L}_{46}, \quad \Delta_2 = \mathsf{L}_{45}, \quad \Delta_3 = \mathsf{L}_{56}.$$

Комбинируя генераторы A_i с Δ_2, получим элементы L_{15}, L_{25}, L_{35} пятого столбца в (5), которые обозначим символом B_i:

$$[\Delta_2, \mathsf{A}_i] = i\mathsf{B}_i.$$

Три генератора B_i являются компонентами вектора $\mathbf{B}$, который в некотором смысле сопряжён вектору Лапласа–Рунге–Ленца $\mathbf{A}$.

Аналогично, элементы L_{16}, L_{26}, L_{36} шестого столбца в (5) получаются посредством коммутации вектора $\mathbf{A}$ с Δ_1:

$$[\Delta_1, \mathsf{A}_i] = i\Gamma_i.$$

В свою очередь, три генератора Γ_i являются компонентами вектора, обозначенного Барутом $\boldsymbol{\Gamma}$.

Таким образом, все 15 генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ могут быть представлены в матричной форме

$$\mathbf{L} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{L}_3 & -\mathsf{L}_2 & \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ & 0 & \mathsf{L}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ & & 0 & \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ & & & 0 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ & & & & 0 & \Delta_3 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2. Подалгебра Картана

Найдём максимальное подмножество коммутирующих генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Как известно, два генератора коммутируют, если они не имеют общих индексов. Легко видеть, что среди генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ этому условию удовлетворяют три генератора $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{34}$ и $\mathbf{L}_{56}$ (т. е. L_3, A_3 и Δ_3 соответственно):

$$[\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3] = [\mathsf{L}_3, \Delta_3] = [\mathsf{A}_3, \Delta_3] = 0.$$

Триплет $\{\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3, \Delta_3\}$ образует базис *максимальной абелевой подалгебры* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4,2)$ (*подалгебры Картана*). L_3, A_3 и Δ_3 называются *генераторами Картана*. Размерность подалгебры $\mathfrak{K}$ определяет *ранг* алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$. Как следствие, все корневые и весовые диаграммы для $\mathfrak{so}(4,2)$ будут трёхмерными.

Инварианты Казимира. В силу теоремы Рака и того факта, что алгебра $\mathfrak{so}(4,2)$ имеет ранг 3, можно ожидать, что группа $\mathrm{SO}(4,2)$ допускает три независимых *инварианта Казимира* $\mathbf{C}_\mu$ ($\mu = 1 \to 3$), которые коммутируют со всеми генераторами алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Наиболее важным оператором Казимира группы $\mathrm{SO}(4,2)$ является квадратичная комбинация инвариантов различных подгрупп:

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 - \boldsymbol{\Gamma}^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta_2^2.$$

Здесь $\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2$ и $\Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta_2^2$ известны как операторы Казимира групп $\mathrm{SO}(4)$ и $\mathrm{SO}(2,1)$ соответственно. Остальные два оператора Казимира группы $\mathrm{SO}(4,2)$ являются полиномами третьей и четвёртой степени относительно генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$:

$$\mathbf{C}_3 = \frac{1}{48}\varepsilon_{abcdef}\mathbf{L}^{ab}\mathbf{L}^{cd}\mathbf{L}^{ef}, \quad \mathbf{C}_4 = \mathbf{L}_{ab}\mathbf{L}^{bc}\mathbf{L}_{cd}\mathbf{L}^{da}.$$

4. Группа $\mathrm{SU}(2,2)$ и базис Яо

Двулистное накрытие конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$ изоморфно группе $\mathrm{SU}(2,2)$. $\mathrm{SU}(2,2)$ (группа псевдоунитарных унимодулярных 4×4 матриц) определяется как группа преобразований четырёхмерного комплексного пространства $\mathbb{C}^4$ (твисторного пространства), оставляющей инвариантной квадратичную форму $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 -$

$|Z_3|^2 - |Z_4|^2$. При этом *твисторы* (векторы пространства $\mathbb{C}^4$) определяются как редуцированные спиноры для конформной группы (см. Приложение Б в [51]).

Базис алгебры $\mathfrak{su}(2,2)$ относительно максимальной компактной подгруппы

$$K = \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$$

связан с генераторами алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ следующими соотношениями [47–49]:

$$\mathsf{K}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{23} + \mathsf{L}_{14}\right), \quad \mathsf{K}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{31} + \mathsf{L}_{24}\right), \quad \mathsf{K}_3 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} + \mathsf{L}_{34}\right), \tag{8}$$

$$\mathsf{J}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{23} - \mathsf{L}_{14}\right), \quad \mathsf{J}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{31} - \mathsf{L}_{24}\right), \quad \mathsf{J}_3 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{34}\right), \tag{9}$$

$$\mathsf{T}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{15} - \mathsf{L}_{26}\right), \quad \mathsf{T}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{25} - \mathsf{L}_{16}\right), \quad \mathsf{T}_0 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{56}\right), \tag{10}$$

$$\mathsf{S}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{15} + \mathsf{L}_{26}\right), \quad \mathsf{S}_2 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{25} - \mathsf{L}_{16}\right), \quad \mathsf{S}_0 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{56}\right), \tag{11}$$

$$\mathsf{P}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{35} - \mathsf{L}_{46}\right), \quad \mathsf{P}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{45} - \mathsf{L}_{36}\right), \quad \mathsf{P}_0 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{34} - \mathsf{L}_{56}\right), \tag{12}$$

$$\mathsf{Q}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{35} - \mathsf{L}_{46}\right), \quad \mathsf{Q}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{45} + \mathsf{L}_{36}\right), \quad \mathsf{Q}_0 = 1/2\left(\mathsf{L}_{34} - \mathsf{L}_{56}\right). \tag{13}$$

Базис Яо (8)–(13) содержит 18 генераторов, что создаёт избыточную систему генераторов для алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$, поскольку последняя состоит из 15 независимых генераторов. Базис алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ можно получить из (8)–(13), исключив три генератора с помощью соотношений

$$\mathsf{J}_3 + \mathsf{K}_3 = \mathsf{S}_0 - \mathsf{T}_0 = \mathsf{L}_{12} = \mathsf{L}_3, \tag{14}$$

$$\mathsf{J}_3 - \mathsf{K}_3 = \mathsf{P}_0 - \mathsf{Q}_0 = -\mathsf{L}_{34} = -\mathsf{A}_3, \tag{15}$$

$$\mathsf{P}_0 + \mathsf{Q}_0 = \mathsf{S}_0 + \mathsf{T}_0 = -\mathsf{L}_{56} = -\Delta_3. \tag{16}$$

Легко видеть, что шесть генераторов K_3, J_3, P_0, Q_0, S_0, T_0 базиса Яо в силу соотношений (14)–(16) эмулируют подалгебру Картана $\mathfrak{K} = \{\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3, \Delta_3\}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$.

Из оставшихся 12 генераторов базиса (8)–(13) образуем генераторы Вейля посредством следующих линейных комбинаций

$$\mathsf{J}_\pm = \mathsf{J}_1 \pm i\mathsf{J}_2, \quad \mathsf{P}_\pm = \mathsf{P}_1 \pm i\mathsf{P}_2, \quad \mathsf{S}_\pm = \mathsf{S}_1 \pm i\mathsf{S}_2,$$

$$\mathsf{K}_\pm = \mathsf{K}_1 \pm i\mathsf{K}_2, \quad \mathsf{Q}_\pm = \mathsf{Q}_1 \pm i\mathsf{Q}_2, \quad \mathsf{T}_\pm = \mathsf{T}_1 \pm i\mathsf{T}_2. \tag{17}$$

Изучение явного вида и корневой структуры генераторов Вейля в зависимости от различных подалгебр алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ выходит за ограниченные рамки данной статьи и будет рассмотрено в следующей работе.

Литература

1. Scerri E. Periodic Table: its story and its significance. New York: Oxford University Press, 2019.
2. Hakala R. The periodic law in mathematical form // J. Phys. Chem. 1952. Vol. 56. P. 178–181.
3. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа Spin(4) и таблица Менделеева // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 203–209.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968.
5. Ostrovsky V.N. What and how physics contributes to understanding the periodic law // Foundations of Chemistry. 2001. Vol. 3. P. 145–182.
6. Karapetoff V. A chart of consecutive sets of electronic orbits within atoms of chemical elements // J. Franklin Inst. 1930. Vol. 210. P. 609–614.
7. Фок В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Изв. АН СССР. Сер. VII. Отделение мат. и естеств. наук. 1935. № 2. С. 169–179.
8. Конопельченко Б.Г. Группа $SO(2,4) + R$ и таблица Менделеева: препринт. Новосибирск: СО РАН СССР, Ин-т ядерной физики, 1972.
9. Barut A.O. Group Structure of the Periodic System // The Structure of Matter: Rutherford Centennial Symposium / Ed. by B.G. Wybourne. Christchurch, New Zeland: University of Canterbury Press, 1972. P. 126–136.
10. Ostrovsky V.N. Group theory and periodic system of elements // AIP Conference Proceedings. 1996. Vol. 365. P. 191–216.
11. Wulfman C.E. Dynamical Groups in Atomic and Molecular Physics // Recent Advances in Group Theory and Their Application to Spectroscopy / Ed. by J.C. Donini. New York: Plenum Press, 1978. P. 329–403.
12. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика. I: Основные определения // Математические структуры и моделирование. 2020. № 2 (54). С. 4–23.
13. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика. II: S-матрица // Математические структуры и моделирование. 2021. № 1 (57). С. 3–24.
14. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика. III: Вопросы интерпретации // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3 (59). С. 4–26.
15. Варламов В.В. Алгебраическое квантование и спинорная структура // Математические структуры и моделирование. 2022. № 1 (61). С. 5–25.
16. Novaro O., Berrondo M. Approximate symmetry of the periodic table // J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. 1972. Vol. 5. P. 1104–1110.
17. Berrondo M., Novaro O. On a geometrical realization of the Aufbau scheme // J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. 1973. Vol. 6. P. 761–769.
18. Löwdin P.-O. Some Comments on the Periodic System of the Elements // Int. J. Quant. Chem. 1969. Vol. 3. P. 331–334.
19. Thyssen P., Ceulemans A. Shattered Symmetry: Group Theory from the Eightfold Way to the Periodic Table. New York: Oxford University Press, 2017.
20. Кораблева Т.П., Корольков Д.В. Теория периодической системы. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
21. Scerri E. The Electronic Configuration Model, Quantum Mechanics and Reduction // Brit. J. Phil. Sci. 1991. Vol. 42. P. 309–325.
22. Lombardi O., Labarca M. The ontological autonomy of the chemical world // Foundations of Chemistry. 2005. Vol. 7. P. 125-–148.

23. Sanderson R.T. An Explanation of Chemical Variations within Periodic Major Groups // J. Amer. Chem. Soc. 1952. Vol. 74, Iss. 19. P. 4792–4794.
24. Neubert D. Double Shell Structure of the Periodic System of the Elements // Zeitschrift für Naturforschung. 1970. Vol. 25a. P. 210–217.
25. Odabasi H. Some Evidence about the Dynamical Group SO(4,2). Symmetries of the Periodic Table of Elements // Int. J. Quant. Chem. 1973. Vol. 7, Suppl. 7. P. 23–33.
26. Novaro O. Group Theoretical Aspects of the Periodic Table of the Elements // Journal of Molecular Structure. 1989. Vol. 199. P. 103–118.
27. Pauli W. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik // Z. Phys. 1926. Vol. 36. P. 336–363.
28. Fock V. Zur Theorie des Wasserstoffatoms // Z. Phys. 1935. Vol. 98.3. P. 145–154.
29. Bargmann V. Zur Theorie des Wasserstoffatoms // Z. Phys. 1936. Vol. 99.7. P. 576–582.
30. Fet A.I. The System of Elements from the Group-Theoretic Viewpoint. Новосибирск, 1979. 45 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние ИНХ СО РАН СССР; № 1).
31. Fet A.I. The Madelung Numbers and the System of Chemical Elements // Теоретико-групповые методы в физике: тр. междунар. семинара, Звенигород, 1979. М.: Наука, 1980. Т. 1. С. 327.
32. Ostrovsky V.N. Dynamic symmetry of atomic potential // J. Phys. B: At. Mol. Phys. 1981. Vol. 14. P. 4425–4439.
33. Fet A.I. The System of Elements from the Group-Theoretic Viewpoint // R. Hefferlin. Periodic Systems and their Relations to the Systematic Analysis of Molecular Data. Lewiston; N.Y.: Edwin Mellen Press, 1989. P. 41–86.
34. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск: Наука, 2010.
35. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 5–23.
36. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. II: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1 (49). С. 5–21.
37. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. III: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3 (51). С. 5–20.
38. Varlamov V.V., Pavlova L.D, Babushkina O.S. Group Theoretical Description of the Periodic System // Symmetry. 2022. Vol. 14. Art. 137.
39. Дынкин Е.Б. Классификация простых групп Ли // Матем. сб. 1946. Т. 60. С. 347—352.
40. Mazurs E.G. Graphic Representations of the Periodic System During One Hundred Years. Tuscaloosa: University of Alabama Press, 1974.
41. van Spronsen J.W. The Periodic System of Chemical Elements. Amsterdam; New York: Elsevier, 1969.
42. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. Vol. 14. P. 81–168.
43. Thomas L.H. On unitary representations of the group of de Sitter space // Ann. Math. 1941. Vol. 42. P. 113–126.
44. Murai Y. On the Group of Transformations in Six-dimensional Space // Progr. Theor. Phys. 1953. Vol. 9. P. 147–168.
45. Murai Y. On the Group of Transformations in Six-dimensional Space, II // Progr. Theor. Phys. 1954. Vol. 11. P. 441–448.

46. Kihlberg A., Müller V.F., Halbwachs F. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2) // Commun. Math. Phys. 1966. Vol. 3. P. 194–217.
47. Yao T. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2). I // J. Math. Phys. 1967. Vol. 8. P. 1931–1954.
48. Yao T. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2). II // J. Math. Phys. 1968. Vol. 9. P. 1615–1626.
49. Yao T. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2). III. Reduction with Respect to an IsoPoincaré Subgroup // J. Math. Phys. 1971. Vol. 12. P. 315–342.
50. Adams B.G., Čižek, Paldus J. Representation Theory of SO(4,2) for the Perturbation Treatment of Hydrogenic-Type Hamiltonians by Algebraic Methods // Int. J. Quant. Chem. 1982. Vol. 21. P. 153–171.
51. Варламов В.В. О системе аксиом нелокальной квантовой теории // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4 (44). С. 5–25.

GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS. IV: GROUP ALGEBRA

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The structure of the group algebra of a conformal group (the group underlying the group-theoretic description of the periodic system of chemical elements) is considered within the framework of a twofold covering. The hydrogen realization of the Cartan subalgebra and Weyl generators of the group algebra is studied.

Keywords: periodic law, Mendeleev table, conformal group, group algebra, Cartan subalgebra, Weyl generators.

Дата поступления в редакцию: 29.11.2023