Математические структуры и моделирование
2024. № 2 (70). С. 21–28

УДК 514.765+512.812.4
DOI 10.24147/2222-8772.2024.2.21-28

САМОПОДОБНОЕ ОДНОРОДНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ ЛИ $SE(1, 1)$

М.Н. Подоксёнов
канд. физ.-мат. наук, доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
М.В. Линкевич
студент, e-mail: maksimlinkevic@gmail.com

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается трёхмерная группа Ли $SE(1, 1)$ — связная группа движений плоскости Минковского, сохраняющих ориентацию плоскости. Найдена единственная с точностью до изометрии левоинвариантная лоренцева метрика, вместе с которой данная группа Ли является самоподобным многообразием. Получены формулы, описывающие действие существенной однопараметрической группы подобий относительно естественных координат, связанных с матричным представлением группы Ли. Эта группа подобий порождается однопараметрической группой автоподобий соответствующей алгебры Ли, снабжённой лоренцевым скалярным произведением.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, лоренцева метрика, подобие, самоподобное многообразие.

1. Постановка задачи

Преобразование $f : M \to M$ риманова или лоренцева многообразия (M, g) называется подобием с коэффициентом e^{ν} ($\nu = \text{const}$), если для любой точки $p \in M$ и для любых векторов $X, Y \in T_pM$ выполнено $g(f_*X, f_*Y)_{f(p)} = e^{2\nu} g(X, Y)_p$. Однопараметрическая группа подобий называется *существенной*, если она не сводится к группе изометрий для некоторой метрики, конформно эквивалентной g. Риманово или лоренцево многообразие (M, g) называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий.

Пусть $\mathcal{G}$ — алгебра Ли, снабжённая евклидовым или лоренцевым скалярным произведением. Назовём линейное преобразование $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ *автоподобием*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно скалярного произведения. Назовём алгебру Ли $\mathcal{G}$ *самоподобной*, если она допускает однопараметрическую группу автоподобий, которая не является группой изометрий.

Пусть g – левоинвариантная метрика на связной группе Ли G. Любое подобие $h : G \to G$ однородного пространства (G, g) раскладывается в композицию $L_a \circ f$, где f – подобие, оставляющее единичный элемент $e \in G$ на месте, а L_a – левый сдвиг,

$a \in G$. Поэтому задача поиска подобий однородного пространства (G, g) сводится к поиску подобий, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли. Если группа Ли G является экспоненциальной, то такие подобия определяются автоподобиями соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$ [1].

В данной работе мы рассмотрим трёхмерную группу Ли $G_3 = SE(1,1)$, которая представляет собой компоненту связности единичного элемента группы $E(1,1)$ движений плоскости Минковского и состоит из движений, сохраняющих ориентацию плоскости. Алгебру Ли этой группы обозначим $\mathcal{G}_3 = \mathcal{E}(1,1)$. Эта алгебра Ли разрешима.

В работе [2] найдены однопараметрические группы автоподобий для всех разрешимых трёхмерных алгебр Ли, снабжённых лоренцевым скалярным произведением, в том числе и для алгебры Ли $\mathcal{G}_3$. В данной работе мы покажем, что группа Ли G_3 может быть самоподобным многообразием относительно левоинвариантной лоренцевой метрики. Введём координаты, связанные с матричным представлением данной группы Ли, укажем вид метрического тензора в этих координатах и выпишем формулы, по которым действует существенная однопараметрическая группа подобий.

Две левоинвариантные метрики на одной группе Ли мы будем относить к одному классу, если соответствующие однородные многообразия изометричны. Покажем, что существует только один класс левоинвариантных лоренцевых метрик, превращающих рассматриваемую группу Ли в самоподобное многообразие.

2. Матричное представление

Группа Ли G_3 и алгебра Ли $\mathcal{G}_3$ могут быть представлены как состоящие соответственно из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x_1 & \mathrm{sh}x_1 & x_2 \\ \mathrm{sh}x_1 & \mathrm{ch}x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$(u_i \in \boldsymbol{R}, i = 1,2,3; x_j \in \boldsymbol{R}, j = 1,2,3)$ с операциями умножения матриц и коммутатора матриц. В алгебре Ли $\mathcal{G}_3$ можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3), состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться равенствами

$$[E_1, E_2] = E_3, [E_1, E_3] = E_2, [E_2, E_3] = \vec{0}.$$

Каноническим будем называть базис (V_1, V_2, V_3), в котором операция скобки задаётся равенствами

$$[V_1, V_2] = -V_2, [V_1, V_3] = V_3, [V_2, V_3] = \vec{0},$$

Например, это может быть базис

$$V_1 = E_1, V_2 = E_2 - E_3, V_3 = E_2 + E_3. \tag{2}$$

Подпространства $I_1 = \boldsymbol{R}V_1, I_2 = \boldsymbol{R}V_2$ являются одномерными идеалами. Обозначим $\langle X_1, ..., X_n\rangle$ – линейную оболочку векторов $X_1, ..., X_n$. Алгебра Ли $\mathcal{G}_3$ содержит двумерный коммутативный идеал $\mathcal{H} = \langle E_2, E_3\rangle = \langle V_2, V_3\rangle$, который является производной алгебры Ли: $\mathcal{G}_3^{(2)} = [\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_3]$. Вектор $V_1 = E_1$ действует на $\mathcal{H}$ с помощью преобразования $\mathrm{ad}(E_1)$.

Припишем матрицам (1) соответственно координаты (x_1, x_2, x_3) и (u_1, u_2, u_3). Тогда запись отображения $\exp : \mathcal{G}_3 \to G_3$ в выбранных координатах выглядит так:

$$\exp(u_1, u_2, u_3) = \left(u_1, \frac{u_2}{u_1}\mathrm{sh}u_1 + \frac{u_3}{u_1}(\mathrm{ch}u_1 - 1), \frac{u_3}{u_1}\mathrm{sh}u_1 + \frac{u_3}{u_1}(\mathrm{ch}u_1 - 1)\right).$$

Заметим, что в этих формулах имеется устранимая неопределённость при $u_1 = 0$. Необходимо определить $\exp(0, u_2, u_3) = (0, u_2, u_3)$. Тогда формулы показывают, что группа Ли G_3 является экспоненциальной (т. е. образ экспоненциального отображения совпадает со всей группой G_3).

Запись отображения $\exp^{-1} : G_3 \to \mathcal{G}_3$ в выбранных координатах:

$$\exp^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2 \mathrm{sh}x_1}{2(\mathrm{ch}u_1 - 1)} - \frac{x_1 x_3}{2}, \frac{x_1 x_3 \mathrm{sh}x_1}{2(\mathrm{ch}u_1 - 1)} - \frac{x_1 x_2}{2}\right).$$

Здесь также имеем устранимую неопределённость, и надо добавить $\exp^{-1}(0, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$. Образ данного отображения совпадает со всей алгеброй Ли. Тем самым экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом.

Операции умножения в группе Ли G_3 и нахождения обратного элемента имеют следующие записи в координатах:

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2\mathrm{ch}x_1 + y_3\mathrm{sh}x_1, x_3 + y_2\mathrm{sh}x_1 + y_3\mathrm{ch}x_1), \tag{3}$$

$$(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, -x_2\mathrm{ch}x_1 + x_3\mathrm{sh}x_1, x_2\mathrm{sh}x_1 - x_3\mathrm{ch}x_1).$$

Заметим, что формулы (3) могут быть получены без использования матричного представления группы Ли G_3, как следствие результатов, полученных С.П. Гавриловым в работе [3], где рассматривался общий случай групп Ли произвольной размерности, содержащих коммутативную подгруппу коразмерности 1. Там же найдена каноническая форма левоинвариантного метрического тензора для таких групп, но в весьма общем виде.

В дальнейшем запись $[F]$ означает матрицу преобразования F, а запись $[g(X)]$ означает матрицу метрического тензора $g(X)$ в точке X.

Используя формулы (3), находим матрицу дифференциала $(L_X)_* : T_Y G_3 \to T_{XY} G_3$ левого сдвига на элемент $X(x_1, x_2, x_3)$ и обратную к ней матрицу (в базисе, составленном из координатных векторных полей):

$$[(L_X)_*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}x_1 & \mathrm{sh}x_1 \\ 0 & \mathrm{sh}x_1 & \mathrm{ch}x_1 \end{pmatrix}, W = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}x_1 & -\mathrm{sh}x_1 \\ 0 & -\mathrm{sh}x_1 & \mathrm{ch}x_1 \end{pmatrix}.$$

Они постоянны, т. е. не зависят от элемента $Y(y_1, y_2, y_3)$.

В работе [4] найдено, что в подходящем каноническом базисе однопараметрическая группа автоподобий $F_t : \mathcal{G}_3 \to \mathcal{G}_3$ действует по формулам:

$$V_1' = V_1, V_2' = e^{\mu t} V_2, V_3' = e^{2\mu t} V_3, \mu > 0, t \in \boldsymbol{R}$$

при условии, что матрица Грама скалярного произведения имеет вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Положение базисных векторов и идеалов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 1.

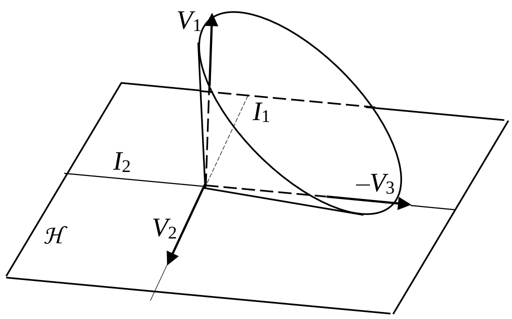

Рис. 1. Положение базисных векторов

Полная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}_3$ несвязна и определяется в каноническом базисе матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \delta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \delta & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}, \gamma, \delta \neq 0. \tag{5}$$

Другими словами, матрица перехода от одного канонического базиса (V_1, V_2, V_3) к другому каноническому базису (V_1', V_2', V_3') – это одна из матриц (5). Будем делить автоморфизмы алгебры Ли $\mathcal{G}_3$ на два рода: к первому отнесём те, которые задаются матрицей A_1, а ко второму – те, которые задаются матрицей A_2.

Мы можем определить левоинвариантный метрический тензор на группе Ли G_3 с помощью матрицы Грама (4), используя первый или второй канонический базис. Тогда мы получим изометричные многообразия. Будем называть две такие метрики на группе Ли эквивалентными и относить их к одному классу.

Итак, мы будем исходить из канонического базиса (2). Как уже отмечалось в работе [4], в каноническом базисе формулы экспоненциального отображения и обратного к нему отображения выглядят сложнее, чем в базисе (E_1, E_2, E_3). Именно поэтому в работе [4] мы рассчитали матрицу Грама и матрицу однопараметрической группы автоподобий в базисе (E_1, E_2, E_3):

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[F_t]' = e^{3\nu t} \begin{pmatrix} e^{-3\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\nu t & \mathrm{sh}\nu t \\ 0 & \mathrm{sh}\nu t & \mathrm{ch}\nu t \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0, t \in \boldsymbol{R}$ (мы сделали замену $\mu = 2\nu$).

3. Основной результат

Теорема 1. 1. *На группе Ли $G_3 = SE(1,1)$ существует единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, при которых она допускает существенную однопараметрическую группу подобий, оставляющую инвариантным единичный элемент группы. Матрица метрического тензора и формулы, по которым действует указанная однопараметрическая группа подобий, имеют следующий вид относительно естественных координат:*

$$[g(X)] = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\nu x_1} & e^{-\nu x_1} \\ e^{-\nu x_1} & e^{2\nu x_1} & -e^{2\nu x_1} \\ e^{-\nu x_1} & -e^{2\nu x_1} & e^{2\nu x_1} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$f_t(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, e^{3\nu t}(x_2 \mathrm{ch}\nu t + x_3 \mathrm{sh}\nu t), e^{3\nu t}(x_2 \mathrm{sh}\nu t + x_3 \mathrm{ch}\nu t)\right). \qquad (8)$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0, t \in \boldsymbol{R}$.

2. *Полная группа подобий полученного многообразия является связной, четырёхмерной, и состоит из преобразований, действующих по формулам*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + h_1, \\ x_2' = h_2 + e^{3\nu t} x_2 \mathrm{ch}(h_1 + \nu t) + e^{3\nu t} x_3 \mathrm{sh}(h_1 + \nu t), \\ x_3' = h_3 + e^{3\nu t} x_2 \mathrm{sh}(h_1 + \nu t) + e^{3\nu t} x_3 \mathrm{ch}(h_1 + \nu t), \end{cases} \qquad (9)$$

где $H(h_1, h_2, h_3)$ - произвольный элемент группы Ли G_3, $\nu = \mathrm{const} > 0, t \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. 1. Левоинвариантная метрика на группе Ли G_3 индуцирует скалярное произведение в её алгебре Ли $\mathcal{G}_3$, и, наоборот, скалярное произведение в $\mathcal{G}_3$ однозначно определяет левоинвариантную метрику на G_3.

Матрицу метрического тензора g_{ij} в точке $X(x_1, x_2, x_3)$ находим по формуле

$$[g(X)] = W^T(X)\Gamma'(X)W,$$

в соответствии с методикой, описанной в работе [5]. Для рассматриваемого случая получаем матрицу (7).

Обозначим $F_t : \mathcal{G}_3 \to \mathcal{G}_3$ однопараметрическую группу автоподобий алгебры Ли $\mathcal{G}_3$. Тогда подобия однородного пространства (G, g) будем строить по правилу (рис. 2):

$$f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1} : G_3 \to G_3.$$

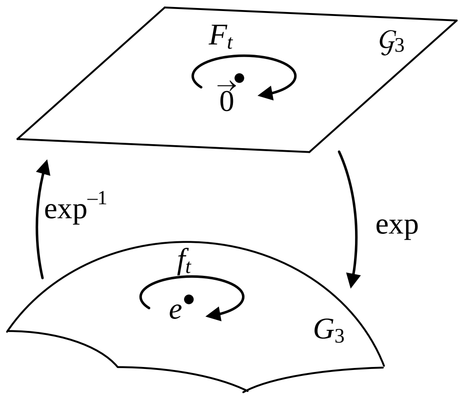

Рис. 2. Построение однопараметрической группы подобий

Непосредственным вычислением убеждаемся, что однопараметрическая группа, состоящая из подобий $f_t, t \in \boldsymbol{R}$, действует по формулам (7).

Убедимся, что полученные преобразования действительно являются подобиями при любом значении t. При каждом фиксированном значении t дифференциал $(f_t)_*$ преобразования относительно координатных векторных полей $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ задаётся в точности матрицей (6). Обратная к ней матрица I_t имеет вид

$$I_t = e^{-3\nu t} \begin{pmatrix} e^{3\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\nu t & -\mathrm{sh}\nu t \\ 0 & -\mathrm{sh}\nu t & \mathrm{ch}\nu t \end{pmatrix}.$$

Матрицу тензора $(((f_t)^* g)(X))$ находим из равенства

$$[(f_t)^* g(X)] = I_t^T [g(X)] I_t.$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$[((f_t)^*g)(x)] = e^{-4\nu t} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\nu x_1} & e^{-\nu x_1} \\ e^{-\nu x_1} & e^{2\nu x_1} & -e^{2\nu x_1} \\ e^{-\nu x_1} & -e^{2\nu x_1} & e^{2\nu x_1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $X' = f_t(X)$. Сравнивая последнюю матрицу с матрицей (7), мы видим, что выполнено

$$[((f_t)^*g)(X)] = e^{-2\mu t}[g(X')].$$

Это значит, что однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (8), действительно является существенной однопараметрической группой подобий.

2. Произвольное подобие мы можем представить как композицию $L_H \circ f_t$, где H – произвольный элемент группы. Формулы (3) означают, что левый сдвиг на элемент $H(h_1, h_2, h_3)$ задаётся формулой

$$L_H(x_1, x_2, x_3) = (h_1 + x_1, h_2 + x_2\mathrm{ch}h_1 + x_3\mathrm{sh}h_1, h_3 + x_3\mathrm{ch}h_1 + x_2\mathrm{sh}h_1).$$

Подставляя сюда формулы (8), получаем (9). Поскольку автоморфизмы второго рода алгебры Ли $\mathcal{G}_3$ не относятся к изометриям для нашего скалярного произведения, то полная группа изометрий оказывается связной.

■

Замечание 1. В работе [6] была описана разработка рабочей книги Excel для вычисления тензора кривизны левоинвариантных метрик на четырёхмерных группах Ли. Был вычислен тензор кривизны для четырёх самоподобных однородных многообразий четырёхмерных групп Ли. Было доказано, что такие многообразия не обязательно являются плоскими. Мы разработали методику применения этой рабочей книги к левоинвариантным метрикам на трёхмерных группах Ли и вычислили тензор кривизны построенного в этой работе многообразия. Относительно канонического базиса (V_1, V_2, V_3) из числа операторов $R(V_i, V_j), i, j = 1, 2, 3$ ненулевым оказались только $R(V_1, V_2)$ и $R(V_2, V_1)$. Они определяются матрицей

$$-[R(V_2, V_1)] = [R(V_1, V_2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Что касается тензора кривизны типа (4.0), то единственными ненулевыми компонентами являются $R_{1212} = 1,5$ и получающиеся из неё перестановкой индексов.

Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2011. № 5. С. 10–15.

2. Подоксёнов М.Н. Гомотетические автоморфизмы трёхмерных алгебр Ли // Учёные записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова»: сборник научных трудов. Т. 8. Витебск: Изд-во ВГУ, 2009. С. 203–211.
3. Гаврилов С.П. Левоинвариантные метрики на односвязных группах, содержащих абелеву подгруппу коразмерности 1 // Гравитация и теория относительности. 1984. Вып. 21. С. 13–48.
4. Podoksenov M.N., Linkevich M.V. Self-similar lie group $E(1,1)$ // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов XI Международной научной конференции (Омск, 15 марта 2024 г.). Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2024. С. 27–29.
5. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трёхмерной группе Ли II типа Бианки // Гравитация и теория относительности. 1982. Вып. 19. С. 37–47.
6. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Тензор кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых четырёхмерных групп Ли // Математические структуры и моделирование. 2023. № 2 (67) С. 16–22.

SELF-SIMILAR HOMOGENEOUS LORENTZIAN MANIFOLD OF LIE GROUP $SE(1,1)$

M.N. Podoksenov
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
M.V. Linkevich
Student, e-mail: maksimlinkevic@gmail.com

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. We consider the four-dimensional Lie group $SE(1,1)$ – a connected group of motions of the Minkowski plane that preserve the orientation of the plane. A unique, up to isometry, left-invariant Lorentzian metric is found, together with which the given Lie group is a self-similar manifold. Formulas are obtained that describe the action of an essential one-parameter similarity group with respect to natural coordinates associated with the matrix representation of the Lie group. This similarity group is generated by the one-parameter self-similarity group of the corresponding Lie algebra, equipped with a Lorentz scalar product.

Keywords: Lie group, Lie algebra, Lorentzian metric, similarity, self-similar manifold.

Дата поступления в редакцию: 03.04.2024