

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 3 (71)
2024**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 3 (71)

Омск
2024

Редакционная коллегия

- А. К. Гуц** главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, профессор кафедры информационных технологий и математики Сочинского государственного университета, г. Сочи
- Н. Ф. Богаченко** зам. гл. редактора, технический редактор, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой компьютерных технологий и сетей Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, г. Омск
- Д. Н. Лавров** зам. гл. редактора, выпускающий редактор, канд. техн. наук, доцент, проректор по образовательной деятельности и информатизации Нижневартковского государственного университета, г. Нижневартовск
- В. В. Варламов** доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк
- В. П. Голубятников** доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
- С. И. Горлов** доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета, г. Нижневартовск
- А. Г. Гринь** доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры информационной безопасности Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, г. Омск
- В. А. Еровенко** доктор физ.-мат. наук, профессор, г. Минск, Республика Беларусь
- В. Zilber** Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, United Kingdom
- А. Н. Кабанов** канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры компьютерных технологий и сетей Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, г. Омск
- А. В. Копыльцов** доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры информационных систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург
- А. Г. Коробейников** доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, г. Санкт-Петербург
- П. А. Корчагин** доктор техн. наук, профессор, и.о. ректора Омского государственного технического университета, г. Омск
- V. Kreinovich** Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA
- В. А. Плетюхов** доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь
- Л. Б. Соколинский** доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой системного программирования Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета), г. Челябинск
- А. А. Fedorenko** Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France
- A. Jadczyk** Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France, and Ronin Institute, Montclair, New Jersey, USA

Учредитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Реестровая запись ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 11.10.2024.

Тираж 25 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале», «Mathematical Reviews» (США), «Zentralblatt für Mathematik» (Германия) и в РИНЦ (elibrary.ru). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, входящих в Международные реферативные базы данных (МРБД) и системы цитирования (Список от 31.12.2023, № 769), в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25.07.2014 № 793). Имеет категорию К1.

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в Сети:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

aguts@mail.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

dmtrl@ya.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

- В.В. Варламов. *Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. V: Весовая диаграмма* 4
- А.К. Гуц. *Телекоммуникации между прошлыми и настоящей историческими эпохами* 19
- М.Н. Подоксёнов, Г. Ян. *Полная группа изометрий специальной трёхмерной группы Ли* 33
- А.В. Сказочкин. *О некоторых аспектах инженерного решения задачи о трисекции угла: история и новый алгоритм решения* 44

Прикладная математика и моделирование

- А.В. Архипенко. *Анализ режимов вибротранспортирования одномассной упруго-вязкопластичной модели слоя груза при прямолинейных гармонических колебаниях грузонесущего органа* 60
- А.К. Гуц. *Управление оползневыми процессами в рамках теории дифференциальных игр* 74
- С.Н. Чуканов, И.С. Чуканов, С.В. Лейхтер. *Дифференциальная игра «преследование–уклонение» на основе обучения с подкреплением* 84

Компьютерные науки

- Т.Е. Болдовская, И.В. Берсенев. *Применение моделей машинного обучения для контроля качества вибродиагностических данных* 94

История математики

- А.К. Гуц. *Геометры и топологи Новосибирского университета в 1960-е годы* 106

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ. V: ВЕСОВАЯ ДИАГРАММА

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Анализируется корневая структура подалгебр групповой алгебры конформной группы в рамках двулистного накрытия. На основе проведённого анализа определяется базис Картана–Вейля групповой алгебры. Строятся корневая и весовая диаграммы. Вводится массовая формула, ассоциированная с каждым узлом весовой диаграммы.

Ключевые слова: конформная группа, групповая алгебра, группа Лоренца, подалгебра Картана, генераторы Вейля, корневая структура, весовая диаграмма, массовая формула.

1. Введение

В настоящей статье, являющейся продолжением серии работ [1–5], завершается изучение структуры групповой алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ конформной группы $SO(4, 2)$, начатое в статье [5].

Несмотря на то, что структура алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, соответствующей типу A_3 по классификации Киллинга–Картана, хорошо изучена (см. [6, 7]), в настоящем исследовании делается акцент на физическом приложении общих алгебраических методов к изучению периодической системы химических элементов. В связи с этим, исходным пунктом исследования является водородная реализация алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, т. е. представление Барута [8], рассмотренное в [5]. Далее представление Барута формулируется в базисе Яо [9] для группы $SU(2, 2)$, являющейся двулистным накрытием конформной группы $SO(4, 2)$. В п. 2 рассматривается подалгебра $\mathfrak{so}(3, 1) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, соответствующая физической важной подгруппе (группа Лоренца) $SO(3, 1) \subset SO(4, 2)$. Для алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ определяется подалгебра Картана, базис Картана–Вейля, а также строятся корневая и весовая диаграммы. Приводится массовая формула, непосредственно связанная с каждым узлом весовой диаграммы. Аналогичное рассмотрение для подалгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2, 2)$ проводится в п. 3 и 4. По результатам проведённого анализа корневой структуры подалгебр $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2, 2))$ в п. 5 строится корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$. Весовая диаграмма ($SO(4, 2)$ -башня) алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ определяется в п. 6. Показывается, что весовые диаграммы алгебр Ли второго ранга $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2, 2)$ являются проекциями $SO(4, 2)$ -башни на координатные плоскости, образованные генераторами Картана алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. Приводится массовая формула, непосредственно связанная с каждым узлом $SO(4, 2)$ -башни.

2. Подалгебра $\mathfrak{so}(3, 1)$

Подгруппа Лоренца $SO(3, 1)$ в рамках конформной группы $SO(4, 2)$ в представлении Барута (см. пп. 3.1 в [5]) может быть образована двумя группами генераторов: $L_1, L_2, L_3, B_1, B_2, B_3$ или $L_1, L_2, L_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Возьмём первую группу. Коммутационные соотношения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} [L_1, L_2] &= -iL_3, & [L_2, L_3] &= -iL_1, & [L_3, L_1] &= -iL_2, \\ [B_1, B_2] &= iL_3, & [B_2, B_3] &= iL_1, & [B_3, B_1] &= iL_2, \\ [L_1, B_1] &= 0, & [L_2, B_2] &= 0, & [L_3, B_3] &= 0, \\ [L_1, B_2] &= -iB_3, & [L_1, B_3] &= iB_2, \\ [L_2, B_3] &= -iB_1, & [L_2, B_1] &= iB_3, \\ [L_3, B_1] &= -iB_2, & [L_3, B_2] &= iB_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Генераторы \mathbf{L} и \mathbf{B} образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3, 1) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Введём следующие линейные комбинации:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + i\mathbf{B}), \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - i\mathbf{B}). \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -iX_3, & [X_2, X_3] &= -iX_1, & [X_3, X_1] &= -iX_2, \\ [Y_1, Y_2] &= -iY_3, & [Y_2, Y_3] &= -iY_1, & [Y_3, Y_1] &= -iY_2, \\ [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что генераторы \mathbf{X} и \mathbf{Y} образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ изоморфна прямой сумме (так называемый «унитарный трюк» Вейля, см. [10, p. 28])

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2). \quad (3)$$

Определим теперь подалгебру Картана \mathfrak{K} и соответствующую диаграмму Вейля для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. С этой целью необходимо перейти от базиса комплексной оболочки $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$ к базису Картана–Вейля. Первым шагом является определение максимального подмножества взаимно коммутирующих генераторов алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Поскольку в прямой сумме (3) каждая подалгебра $\mathfrak{su}(2)$ является алгеброй Ли ранга 1, то естественно ожидать, что алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ содержит не более двух коммутирующих генераторов. Из девяти возможных пар коммутирующих генераторов $\{X_i, Y_j\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) выберем пару $\{X_3, Y_3\}$, удовлетворяющую условию $[\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_j] = 0$ (см. формулу (1) в [5]), т. е.

$$[X_3, Y_3] = 0. \quad (4)$$

Множество $\{X_3, Y_3\}$ образует подалгебру Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. X_3 и Y_3 – генераторы Картана, а размерность подалгебры \mathfrak{K} , равная 2, определяет ранг алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Далее, с целью определить *генераторы Вейля* из оставшихся генераторов X_1, X_2, Y_1, Y_2 образуем следующие линейные комбинации (*повышающие* и *понижающие* операторы):

$$\left. \begin{aligned} X_+ &= X_1 + iX_2, & X_- &= X_1 - iX_2, \\ Y_+ &= Y_1 + iY_2, & Y_- &= Y_1 - iY_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Четыре генератора Вейля (5), наряду с двумя генераторами Картана X_3 и Y_3 , составляют *базис Картана–Вейля* алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$\{X_3, Y_3, X_+, X_-, Y_+, Y_-\}.$$

Генераторы Вейля $\mathbf{E}_\alpha = \{X_\pm, Y_\pm\}$ и генераторы $\mathbf{H}_i = \{X_3, Y_3\}$ подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (2) и (3) в [5], где $\forall i, j = 1, 2; \alpha = 1 \rightarrow 4$:

$$[X_3, X_+] = -X_+, \quad [X_3, X_-] = X_-, \quad [X_+, X_-] = -2X_3, \quad (6)$$

$$[Y_3, Y_+] = -Y_+, \quad [Y_3, Y_-] = Y_-, \quad [Y_+, Y_-] = -2Y_3. \quad (7)$$

В этом случае коммутатор $[\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_{-\alpha}] = [X_+, X_-]$ даёт корни ± 2 . Таким образом, в согласии с формулой (4) в [5] имеем четыре различных корня: $\alpha = \pm 1, \pm 2$.

Поскольку $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ является алгеброй Ли ранга 2, то из теоремы Рака (см. [5]) следует, что существуют два независимых *инварианта Казимира* \mathbf{C}_μ , которые коммутируют со всеми генераторами алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, включая два элемента Картана \mathbf{H}_i :

$$[\mathbf{C}_\mu, \mathbf{H}_i] = 0, \quad \forall \mu = 1 \rightarrow 2; i = 1 \rightarrow 2. \quad (8)$$

Инварианты Казимира для алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &\equiv \mathbf{X}^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{AB}), \\ \mathbf{C}_2 &\equiv \mathbf{Y}^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 - 2i\mathbf{AB}). \end{aligned}$$

В рамках комплексной оболочки алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ эти инварианты, более известные как *операторы Лапласа–Бельтрами*, приводят к дифференциальным уравнениям класса Фукса для гиперсферических функций (см. [11]). Операторы Лапласа–Бельтрами содержат операторы Казимира $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ и \mathbf{AB} группы Лоренца как части комплекснозначной функции.

В силу (4) и (8) в собственном подпространстве \mathbf{H}_E оператора энергии H определено полное множество состояний, которые одновременно являются собственными состояниями операторов $\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2, X_3$ и Y_3 . Составим кет-вектор $|l, \dot{l}; m, \dot{m}\rangle$. Следует отметить, что l и \dot{l} не являются квантовыми числами, а только *задают* их, настоящими квантовыми числами, т. е. собственными значениями операторов Казимира \mathbf{X}^2 и \mathbf{Y}^2 , являются $l(l+1)$ и $\dot{l}(\dot{l}+1)$ согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 |l, \dot{l}; m, \dot{m}\rangle &= l(l+1) |l, \dot{l}; m, \dot{m}\rangle, \\ \mathbf{Y}^2 |l, \dot{l}; m, \dot{m}\rangle &= \dot{l}(\dot{l}+1) |l, \dot{l}; m, \dot{m}\rangle, \end{aligned}$$

где $l, \dot{l} \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$. Каждое подпространство H_E имеет размерность $(2l + 1)(2\dot{l} + 1)$, откуда следует, что

$$X_3 \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle = m \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle, \quad (9)$$

$$Y_3 \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle = \dot{m} \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \quad (10)$$

с $m \in \{-l, -l + 1, \dots, l - 1, l\}$ и $\dot{m} \in \{-\dot{l}, -\dot{l} + 1, \dots, \dot{l} - 1, \dot{l}\}$. Собственные значения m и \dot{m} являются весами генераторов Картана X_3 и Y_3 .

В основе построения диаграммы Вейля группы $SL(2, \mathbb{C})$ лежит подалгебра Картана $\mathfrak{K} = \{X_3, Y_3\}$, где генераторы X_3 и Y_3 образуют базис двумерной ортогональной системы координат. На этих диаграммах веса m и \dot{m} используются в качестве координат для построения каждого состояния $SL(2, \mathbb{C})$ -мультиплета в плоскости (X_3, Y_3) , т. е. они образуют компоненты двумерного весового вектора $\mathbf{h} = (m, \dot{m})$, который выходит из начала системы координат до состояния $\left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle$. Генераторы Вейля $\mathbf{E}_\alpha = \{X_\pm, Y_\pm\}$ позволяют нам перемещаться между состояниями $SL(2, \mathbb{C})$ -мультиплета, сдвигая собственные значения m и \dot{m} любого кет-вектора $\left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle$ на величину, которая задаётся корнями α_1 и α_2 этого генератора Вейля относительно генераторов Картана X_3 и Y_3 :

$$\mathbf{E}_\alpha \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m + \alpha_1, \dot{m} + \alpha_2 \right\rangle.$$

В качестве примера рассмотрим действие генератора X_+ на состояние $\left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle$.

В силу $[\mathbf{H}_i, \mathbf{E}_\alpha] = \alpha_i \mathbf{E}_\alpha$, (6) и (9) получим

$$\begin{aligned} X_3 X_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle &= ([X_3, X_+] + X_+ X_3) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= (X_+ + m X_+) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= (m + 1) X_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, X_+ повышает собственное значение m на величину $+1$, которая равна корню генератора X_+ относительно генератора Картана X_3 согласно (6). Аналогично, используя (10), получим

$$\begin{aligned} Y_3 X_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle &= ([Y_3, X_+] + X_+ Y_3) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= (0 + \dot{m} X_+) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= \dot{m} X_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle, \end{aligned}$$

где генератор X_+ оставляет собственное значение \dot{m} неизменным. Следовательно,

$$X_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m + 1, \dot{m} \right\rangle.$$

Действия остальных трёх генераторов Вейля определяются аналогично:

$$X_- \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m - 1, \dot{m} \right\rangle,$$

$$Y_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} + 1 \right\rangle,$$

$$Y_- \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} - 1 \right\rangle.$$

Покажем графически действия генераторов \mathbf{E}_α на *корневой диаграмме*. С этой целью возьмём корни α_1 и α_2 каждого элемента Вейля \mathbf{E}_α в качестве компонент двумерного *корневого вектора* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и поместим их в двумерное *весовое пространство*, образованное плоскостью (X_3, Y_3) . Это даёт корневую диаграмму алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, как показано на рис. 1, где для простоты мы обозначили различные корневые векторы α соответствующим символом генератора Вейля \mathbf{E}_α .

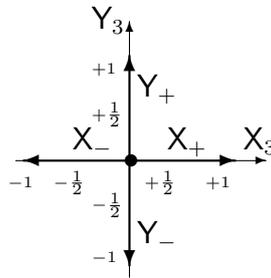


Рис. 1. Корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Действие каждого генератора Вейля показано в (X_3, Y_3) -плоскости

Очевидно, что генераторы X_- и X_+ (корни $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = +1$) позволяют перемещаться на один шаг *влево* и *вправо* соответственно, в то время как перемещения *вверх* и *вниз* задаются генераторами Y_+ и Y_- . Таким образом, состояния $SL(2, \mathbb{C})$ -мультиплета переводятся друг в друга посредством повторного действия этих лестничных операторов. С генераторами алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, расположенными на рис. 1, сразу становится очевидным, что они соответствуют двум разным многообразиям: генераторы X_3, X_+ и X_- (образующие первую подалгебру $\mathfrak{su}(2)$ в (3)) соответствуют многообразию $(1, 0)$, тогда как генераторы Y_3, Y_+ и Y_- (вторая подалгебра $i\mathfrak{su}(2)$), как видно, образуют многообразие $(0, 1)$ на весовой диаграмме. Диаграммы Вейля для первых трёх $SL(2, \mathbb{C})$ -мультиплетов показаны на рис. 2.

Расширенная диаграмма Вейля для (l, \dot{l}) -многообразия представлена на рис. 3. С каждым узлом весовой диаграммы ассоциирована массовая формула [12]

$$m = 2m_e \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(\dot{l} + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

где m_e – масса покоя электрона. Формула (11) описывает спектр масс элементарных частиц с точностью до 0,41 % (см. [13–16]). Решения релятивистских волновых уравнений [17–19] для произвольных спиновых цепочек $((l, \dot{l})$ -многообразий весовой диаграммы на рис. 3) определяются в виде рядов по гиперсферическим функциям на группе Лоренца [11].

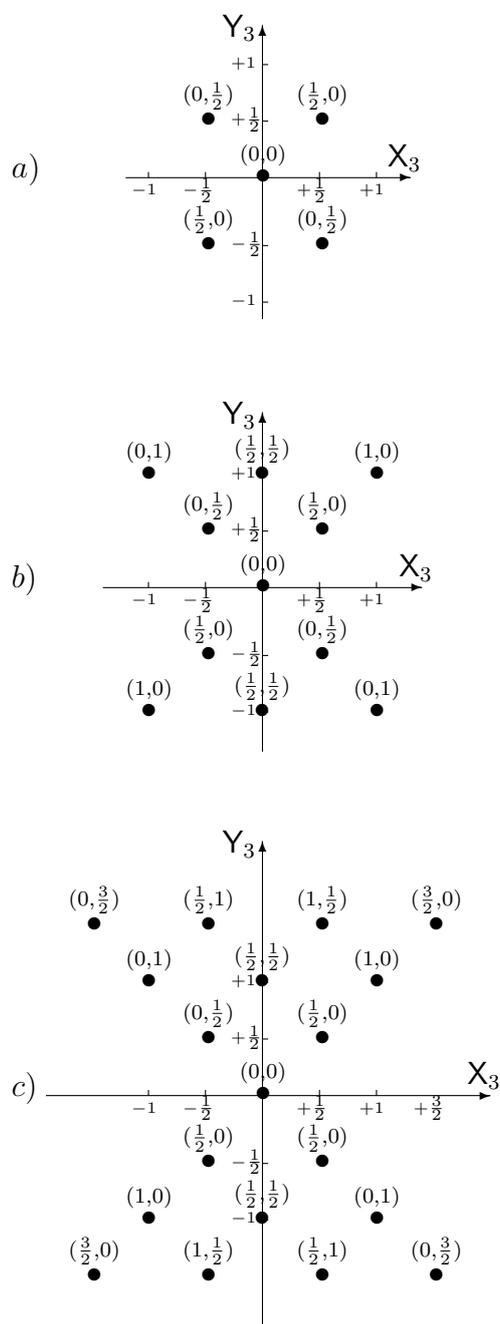


Рис. 2. Первые три весовые диаграммы (диаграммы Вейля) алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:
 а) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -мультиплет; б) $(1, 1)$ -мультиплет; в) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ -мультиплет

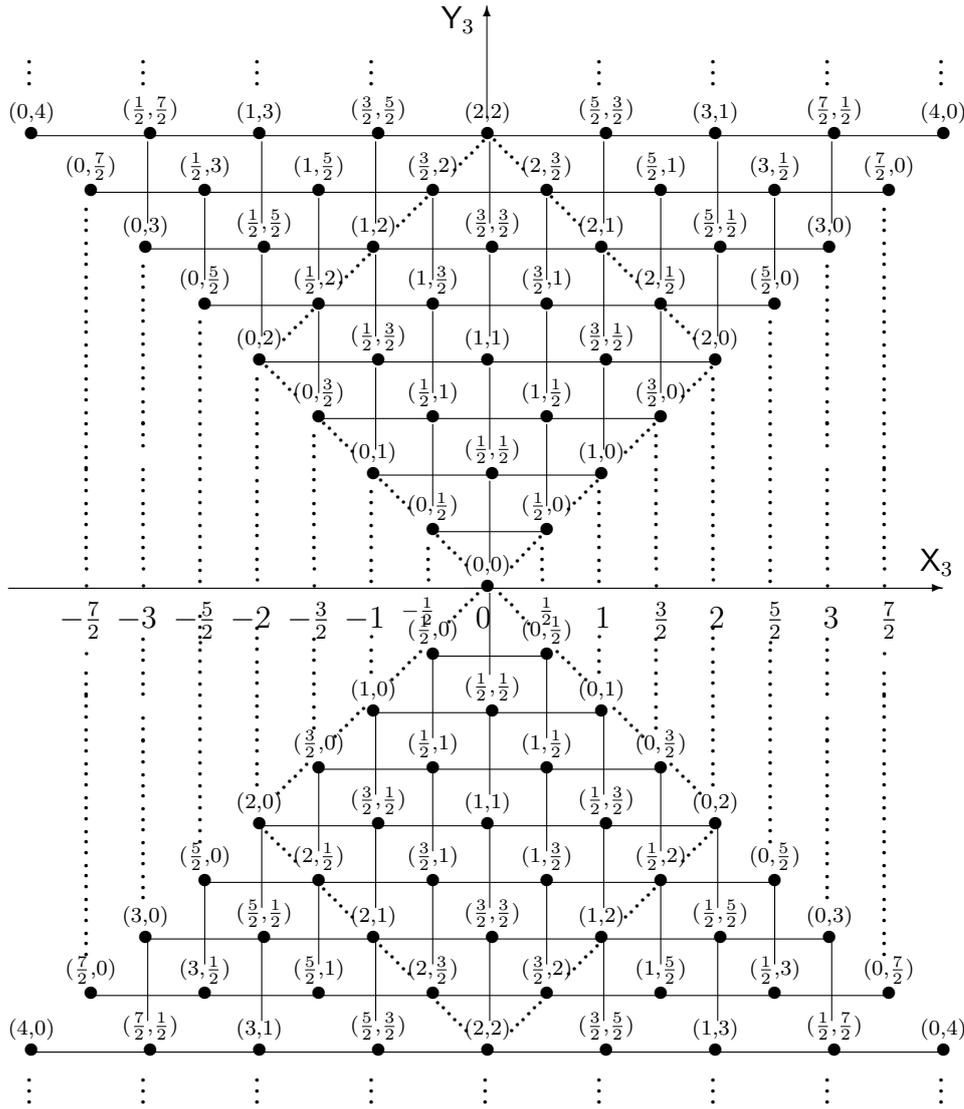


Рис. 3. Расширенная диаграмма Вейля алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. С каждым узлом (l, i) диаграммы ассоциировано состояние, масса которого определяется формулой (11)

3. Подалгебра $\mathfrak{so}(4)$

Для каждого генератора подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 2)$ существуют шесть генераторов, которые не имеют с ним общих индексов. Например, для \mathbf{L}_{56} (Δ_3) этими генераторами являются \mathbf{L}_{12} , \mathbf{L}_{23} , \mathbf{L}_{31} , \mathbf{L}_{14} , \mathbf{L}_{24} и \mathbf{L}_{34} . В силу перестановочных соотношений для алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$ (см. формулу (6) в [5]) все эти генераторы коммутируют с \mathbf{L}_{56} и, следовательно, могут быть позиционированы в горизонтальной плоскости корневой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. Они соответствуют компонентам L_i и A_i вектора углового момента \mathbf{L} и вектора Лапласа–Рунге–Ленца \mathbf{A} .

Вводя линейные комбинации

$$\mathbf{K}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{23} + \mathbf{L}_{14}), \quad \mathbf{K}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{31} + \mathbf{L}_{24}), \quad \mathbf{K}_3 = 1/2 (\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_{34}), \quad (12)$$

$$\mathbf{J}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{23} - \mathbf{L}_{14}), \quad \mathbf{J}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{31} - \mathbf{L}_{24}), \quad \mathbf{J}_3 = 1/2 (\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{34}) \quad (13)$$

(см. генераторы (8) и (9) базиса Яо в [5]), получим

$$[\mathbf{K}, \mathbf{J}] = 0,$$

а также

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathbf{K}_k, \quad [\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathbf{J}_k.$$

Откуда следует, что генераторы \mathbf{K} и \mathbf{J} образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ группы $SO(4)$ изоморфна прямой сумме

$$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \quad (14)$$

Соответственно, это значит, что группа $SO(4)$ изоморфна прямому произведению $SO(3) \otimes SO(3)$.

Легко видеть, что генераторы \mathbf{K}_3 и \mathbf{J}_3 образуют подалгебру Картана алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{so}(4)} = \{\mathbf{K}_3, \mathbf{J}_3\}$. Из оставшихся генераторов в (12), (13) составим четыре генератора Вейля

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_+ &= \mathbf{K}_1 + i\mathbf{K}_2, & \mathbf{K}_- &= \mathbf{K}_1 - i\mathbf{K}_2, \\ \mathbf{J}_+ &= \mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2, & \mathbf{J}_- &= \mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2, \end{aligned}$$

Тогда базис Картана–Вейля подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ примет вид

$$\{\mathbf{K}_3, \mathbf{J}_3, \mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-, \mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-\}. \quad (15)$$

Генераторы базиса (15) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_+] &= \mathbf{K}_+, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_-] &= -\mathbf{K}_-, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-] &= 2\mathbf{K}_3, \\ [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_+] &= \mathbf{J}_+, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_-] &= -\mathbf{J}_-, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] &= 2\mathbf{J}_3, \\ [\mathbf{K}_i, \mathbf{J}_j] &= 0 \quad (i, j = +, -, 3). \end{aligned} \quad (16)$$

Из соотношений (16) следует, что корневая структура генераторов \mathbf{K}_{\pm} и \mathbf{J}_{\pm} аналогична корневой структуре генераторов Вейля X_{\pm} и Y_{\pm} подалгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Корневая диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ представлена на рис. 4. Соответствующая весовая

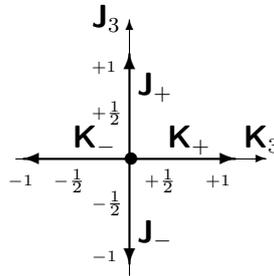


Рис. 4. Корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$. Действие каждого генератора Вейля показано в $(\mathbf{K}_3, \mathbf{J}_3)$ -плоскости

диаграмма аналогична диаграмме на рис. 3 с заменой генераторов Картана X_3 и Y_3 на \mathbf{K}_3 и \mathbf{J}_3 .

4. Подалгебра $\mathfrak{so}(2, 2)$

Для следующего генератора \mathbf{L}_{34} (A_3), входящего в подалгебру $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 2)$, имеем шесть генераторов $\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{15}, \mathbf{L}_{25}, \mathbf{L}_{16}, \mathbf{L}_{26}, \mathbf{L}_{56}$, у которых нет с \mathbf{L}_{34} общих индексов. Эти генераторы соответствуют «водородным операторам» $L_3, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_3$ и тем самым могут быть позиционированы в плоскости (L_3, Δ_3) . Эти шесть генераторов образуют линейные комбинации базиса Яо:

$$\mathbf{T}_1 = 1/2(-\mathbf{L}_{15} - \mathbf{L}_{26}), \quad \mathbf{T}_2 = 1/2(\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}), \quad \mathbf{T}_0 = 1/2(-\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}), \quad (17)$$

$$\mathbf{S}_1 = 1/2(-\mathbf{L}_{15} + \mathbf{L}_{26}), \quad \mathbf{S}_2 = 1/2(-\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}), \quad \mathbf{S}_0 = 1/2(\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}) \quad (18)$$

(см. формулы (10) и (11) в [5]). Легко видеть, что компоненты генераторов \mathbf{T} и \mathbf{S} взаимно коммутируют,

$$[\mathbf{T}, \mathbf{S}] = 0. \quad (19)$$

При этом компоненты \mathbf{T} образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$:

$$[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = i\mathbf{T}_0, \quad [\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_0] = -i\mathbf{T}_1, \quad [\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1] = -i\mathbf{T}_2.$$

Аналогично для \mathbf{S} :

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\mathbf{S}_0, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_0] = -i\mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1] = -i\mathbf{S}_2.$$

В силу (19) обе алгебры полностью разделены. По аналогии с алгеброй $\mathfrak{so}(4)$ (плоскость (L_3, A_3)), которая допускает разложение в прямую сумму двух алгебр $\mathfrak{su}(2)$, в данном случае получим алгебру Ли $\mathfrak{so}(2, 2)$, которая локально изоморфна прямой сумме двух алгебр $\mathfrak{so}(2, 1)$:

$$\mathfrak{so}(2, 2) \simeq \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(2, 1).$$

В силу этой аналогии корневая диаграмма для алгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$ будет подобна диаграмме для $\mathfrak{so}(4)$ на рис. 4. Далее, два коммутирующих генератора \mathbf{T}_0 и \mathbf{S}_0 могут быть взяты в качестве базиса $\{\mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0\}$ для подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(2, 2)$. Из оставшихся генераторов $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{S}_1$ и \mathbf{S}_2 сформируем следующие линейные комбинации:

$$\mathbf{T}_+ = \mathbf{T}_1 + i\mathbf{T}_2, \quad \mathbf{T}_- = \mathbf{T}_1 - i\mathbf{T}_2,$$

$$\mathbf{S}_+ = \mathbf{S}_1 + i\mathbf{S}_2, \quad \mathbf{S}_- = \mathbf{S}_1 - i\mathbf{S}_2,$$

которые образуют линейно независимое множество *генераторов Вейля* алгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$. Таким образом, базис Картана–Вейля подалгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$ имеет вид

$$\{\mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0, \mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-, \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-\}. \quad (20)$$

Генераторы базиса (20) удовлетворяют соотношениям

$$[\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_+] = -\mathbf{T}_+, \quad [\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_-] = \mathbf{T}_-, \quad [\mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-] = -2\mathbf{T}_0,$$

$$[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_+] = -\mathbf{S}_+, \quad [\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_-] = \mathbf{S}_-, \quad [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-] = -2\mathbf{S}_0,$$

$$[\mathbf{T}_i, \mathbf{S}_j] = 0 \quad (i, j = +, -, 0).$$

Корни генераторов Вейля $\mathbf{T}_\pm, \mathbf{S}_\pm$ образуют компоненты 2-мерного корневого вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, который может быть позиционирован в 2-мерном весовом пространстве, образованном плоскостью $(\mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0)$. Для данной реализации подалгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$ корневые векторы имеют вид

$$\alpha(\mathbf{T}_+) = (1, 0), \quad \alpha(\mathbf{T}_-) = (-1, 0),$$

$$\alpha(\mathbf{S}_+) = (0, 1), \quad \alpha(\mathbf{S}_-) = (0, -1).$$

Легко видеть, что корневая и весовая диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$ аналогичны соответствующим диаграммам алгебр $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{so}(4)$ (см. рис. 1–4).

В свою очередь, с \mathbf{L}_{12} (\mathbf{L}_3) не имеют общих индексов следующие элементы: $\mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{35}, \mathbf{L}_{36}, \mathbf{L}_{45}, \mathbf{L}_{46}$ и \mathbf{L}_{56} , соответствующие генераторам $A_3, B_3, \Gamma_3, \Delta_2, \Delta_1$ и Δ_3 . Поскольку все эти генераторы коммутируют с \mathbf{L}_3 , все они могут быть позиционированы в (A_3, Δ_3) -плоскости. Эти генераторы образуют линейные комбинации

$$\mathbf{P}_1 = 1/2(-\mathbf{L}_{35} - \mathbf{L}_{46}), \quad \mathbf{P}_2 = 1/2(\mathbf{L}_{45} - \mathbf{L}_{36}), \quad \mathbf{P}_0 = 1/2(-\mathbf{L}_{34} - \mathbf{L}_{56}), \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_1 = 1/2(\mathbf{L}_{35} - \mathbf{L}_{46}), \quad \mathbf{Q}_2 = 1/2(\mathbf{L}_{45} + \mathbf{L}_{36}), \quad \mathbf{Q}_0 = 1/2(\mathbf{L}_{34} - \mathbf{L}_{56}) \quad (22)$$

(см. генераторы (12) и (13) базиса Яо в [5]). Легко проверить, что

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = i\mathbf{P}_0, \quad [\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_0] = -i\mathbf{P}_1, \quad [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1] = -i\mathbf{P}_2,$$

$$[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] = i\mathbf{Q}_0, \quad [\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_0] = -i\mathbf{Q}_1, \quad [\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1] = -i\mathbf{Q}_2,$$

$$[\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

Отсюда следует, что генераторы \mathbf{P}_i и \mathbf{Q}_i взаимно коммутируют и образуют две независимые алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$. Как и в предыдущем случае (плоскость (\mathbf{L}_3, Δ_3)), имеем изоморфизм $\mathfrak{so}(2, 2) \simeq \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(2, 1)$. В свою очередь, для плоскости (A_3, Δ_3) имеем два генератора Картана \mathbf{P}_0 и \mathbf{Q}_0 , образующих базис $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0\}$ подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(2, 2)$.

Далее, из оставшихся генераторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_1$ и \mathbf{Q}_2 образуем следующие линейные комбинации:

$$\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_1 + i\mathbf{P}_2, \quad \mathbf{P}_- = \mathbf{P}_1 - i\mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{Q}_+ = \mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{Q}_- = \mathbf{Q}_1 - i\mathbf{Q}_2,$$

определяющие генераторы Вейля для данной реализации алгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$ (плоскость (A_3, Δ_3)). Базис Картана–Вейля в этом случае имеет вид

$$\{\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-, \mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-\}. \quad (23)$$

Как и в предыдущем случае, генераторы базиса (23) удовлетворяют соотношениям

$$[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_+] = -\mathbf{P}_+, \quad [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_-] = \mathbf{P}_-, \quad [\mathbf{P}_+, \mathbf{T}_-] = -2\mathbf{P}_0,$$

$$[\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_+] = -\mathbf{Q}_+, \quad [\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_-] = \mathbf{Q}_-, \quad [\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-] = -2\mathbf{Q}_0,$$

$$[\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j] = 0 \quad (i, j = +, -, 0).$$

Откуда для корневых векторов в плоскости $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0)$ получим

$$\alpha(\mathbf{P}_+) = (1, 0), \quad \alpha(\mathbf{P}_-) = (-1, 0),$$

$$\alpha(\mathbf{Q}_+) = (0, 1), \quad \alpha(\mathbf{Q}_-) = (0, -1).$$

Соответствующая корневая структура тождественна предыдущей реализации алгебры $\mathfrak{so}(2, 2)$ с заменой генераторов $\mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0, \mathbf{T}_\pm, \mathbf{S}_\pm$ на $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_\pm, \mathbf{Q}_\pm$.

5. Корневая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$

Проведённый выше анализ корневой структуры подалгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2, 2)$ алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ в каждой из ортогональных плоскостей (L_3, A_3) , (L_3, Δ_3) и (A_3, Δ_3) позволяет теперь собрать вместе все результаты и построить *корневую диаграмму* для алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$.

Полное число генераторов подалгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2, 2)$ равно 18. Однако генераторы $\mathbf{K}_3, \mathbf{J}_3, \mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0, \mathbf{P}_0$ и \mathbf{Q}_0 не являются линейно независимыми, поскольку удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3 = \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3 = \mathbf{S}_0 - \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}_0 + \mathbf{T}_0. \quad (24)$$

Следовательно, совокупность 18 генераторов задаёт избыточную систему, из которой можно получить базис алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, исключив три генератора L_3, A_3, Δ_3 с помощью (24). Это сводит число генераторов до 15, как и должно быть для алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$.

Как уже отмечалось выше, три коммутирующих генератора L_3, A_3 и Δ_3 являются *генераторами Кармана* подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 2)$, $\mathfrak{K} = \{L_3, A_3, \Delta_3\}$. Они образуют базис трёхмерной ортогональной системы и располагаются в начале координат корневой диаграммы. Наряду с оставшимися 12 *генераторами Вейля* $\mathbf{K}_\pm, \mathbf{J}_\pm, \mathbf{T}_\pm, \mathbf{S}_\pm, \mathbf{P}_\pm, \mathbf{Q}_\pm$ они образуют *базис Кармана–Вейля* для алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$:

$$\{L_3, A_3, \Delta_3, \mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-, \mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-, \mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-, \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-, \mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-, \mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-\}.$$

Пусть общими символами \mathbf{H}_i ($i = 1 \rightarrow 3$) и \mathbf{E}_α ($\alpha = 1 \rightarrow 12$) обозначены различные генераторы Кармана и Вейля алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. В порядке расположения различных генераторов \mathbf{E}_α на корневой диаграмме *корни* α_i каждого \mathbf{E}_i должны определяться относительно трёх генераторов Кармана согласно общему определению

$$[\mathbf{H}_i, \mathbf{E}_\alpha] = \alpha_i \mathbf{E}_\alpha, \quad \forall i = 1, 2; \quad \alpha = 1 \rightarrow 4.$$

В предыдущих параграфах корни определялись относительно $\mathbf{K}_3, \mathbf{J}_3, \mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0$ и $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0$, а не относительно L_3, A_3 и Δ_3 . Следовательно, новые *корневые векторы* имеют вид

$$\alpha(\mathbf{K}_+) = (+1, +1, 0), \quad \alpha(\mathbf{S}_+) = (+1, 0, +1), \quad \alpha(\mathbf{P}_+) = (0, +1, +1),$$

$$\alpha(\mathbf{K}_-) = (-1, -1, 0), \quad \alpha(\mathbf{S}_-) = (-1, 0, -1), \quad \alpha(\mathbf{P}_-) = (0, -1, -1),$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{J}_+) &= (+1, -1, 0), & \alpha(\mathbf{T}_+) &= (+1, 0, -1), & \alpha(\mathbf{Q}_+) &= (0, +1, -1), \\ \alpha(\mathbf{J}_-) &= (-1, +1, 0), & \alpha(\mathbf{T}_-) &= (-1, 0, +1), & \alpha(\mathbf{Q}_-) &= (0, -1, +1), \\ \alpha(\mathbf{L}_3) &= (0, 0, 0), & \alpha(\mathbf{A}_3) &= (0, 0, 0), & \alpha(\Delta_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Очевидно, что четыре генератора $\mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-, \mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-$ приводят к корневой диаграмме алгебры $\mathfrak{so}(4)$ с вершинными точками $(\pm 1, \pm 1)$ в (L_3, A_3) -плоскости (соответственно $(\mathbf{K}_3, \mathbf{J}_3)$ -плоскости). Аналогично генераторы $\mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-, \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-$ и $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-, \mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-$ приводят к подобным корневым диаграммам алгебр $\mathfrak{so}(2, 2)$ в плоскостях (L_3, Δ_3) (соответственно $(\mathbf{T}_0, \mathbf{S}_0)$) и (A_3, Δ_3) (соответственно $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0)$).

Таким образом, представление 15 генераторов на корневой диаграмме алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ состоит из трёх генераторов Картана и трёх квадратов в трёх перпендикулярных плоскостях, образованных генераторами Вейля. На Рис. 5 для наглядности вершины этих трёх квадратов совмещены с осями $\mathbf{X} = \mathbf{K}_3 - \mathbf{T}_0 + \mathbf{P}_0 \rightarrow L_3$, $\mathbf{Y} = -\mathbf{J}_3 - \mathbf{P}_0 + \mathbf{S}_0 \rightarrow A_3$, $\mathbf{Z} = -\mathbf{S}_0 - \mathbf{Q}_0 + \mathbf{K}_3 \rightarrow \Delta_3$. При повороте на 45° относительно друг друга эти вершины (генераторы Вейля) образуют кубоктаэдр (см. [7, 20]).

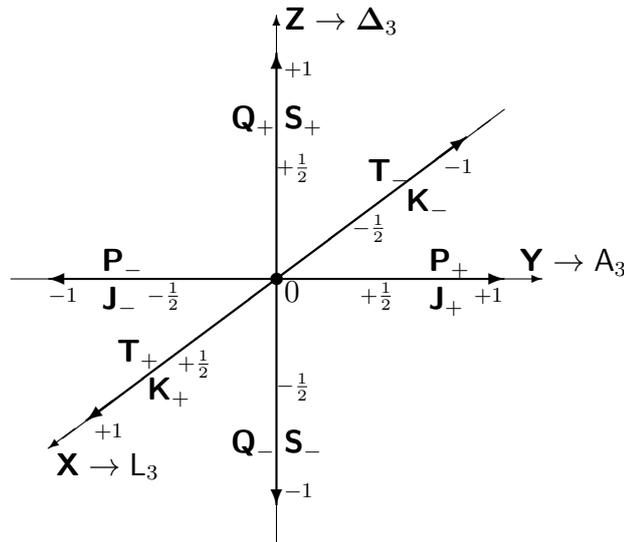


Рис. 5. Корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$

6. Весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$

Перейдём к построению *весовой диаграммы* алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. Весовое пространство определяется тремя генераторами Картана L_3, A_3 и Δ_3 , которые служат базисом трёхмерной ортогональной системы координат. Горизонтальная плоскость, образованная генераторами L_3 и A_3 , включает различные $SO(4)$ -многообразия. В п. 3 эти многообразия определяются относительно генераторов \mathbf{K}_3 и \mathbf{J}_3 , которые в настоящей диаграмме соответствуют диагональным направлениям в силу их определения, следующего из (12), (13):

$$\mathbf{K}_3 = \frac{1}{2} (L_3 + A_3), \quad \mathbf{J}_3 = \frac{1}{2} (L_3 - A_3).$$

представления $\tau_{l,i,n}$ группы $SO(4, 2)$ реализуются в симметрических пространствах $\text{Sym}_{(k,r,p)}$ размерности

$$\dim \text{Sym}_{(k,r,p)} = (k + 1)(r + 1)(p + 1).$$

С каждым узлом весовой диаграммы на рис. 6 ассоциирована следующая массовая формула:

$$m = 2m_{\text{H}} \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(i + \frac{1}{2} \right) \left(\nu + \frac{1}{2} \right), \quad (25)$$

где m_{H} – относительная атомная масса водорода. Вывод формулы (25) аналогичен выводу массовой формулы (11), см. [15, 16], которая является частным случаем (25) при $\nu = 0$ и $m_{\text{H}} \rightarrow m_e$, т. е. при редукции конформной группы $SO(4, 2)$ к её подгруппе Лоренца $SO(3, 1)$.

Литература

1. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 5–23.
2. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. II: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1 (49). С. 5–21.
3. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. III: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3 (51). С. 5–20.
4. Varlamov V.V., Pavlova L.D, Babushkina O.S. Group Theoretical Description of the Periodic System // Symmetry. 2022. Vol. 14. Art. 137.
5. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. IV: Групповая алгебра // Математические структуры и моделирование. 2024. № 1 (69). С. 18–31.
6. Humphreys J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. New York; Berlin: Springer, 1978.
7. Hall B. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. New York; Berlin: Springer, 2015.
8. Barut A.O. Group Structure of the Periodic System // The Structure of Matter: Rutherford Centennial Symposium / Ed. by B.G. Wybourne. Christchurch, New Zeland: University of Canterbury Press, 1972. P. 126–136.
9. Yao T. Unitary Irreducible Representations of $SU(2,2)$. I // Journal of Mathematical Physics. 1967. Vol. 8. P. 1931–1954.
10. Knapp A.W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton: Princeton University Press, 1986.
11. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2006. Vol. 39. P. 805–822.
12. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. Vol. 54. P. 3533–3576.
13. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2 (42). С. 11–28.

14. Varlamov V.V. Lorentz Group and Mass Spectrum of Elementary Particles // arXiv. 2017. arXiv:1705.02227.
15. Варламов В.В. О квантовании массы // Метафизика. 2023. № 1 (47). С. 115–134.
16. Varlamov V.V. Group Theory and Mass Quantization // arXiv. 2023. arXiv:2311.16175.
17. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations // International Journal of Theoretical Physics. 2003. Vol. 42. P. 583–633.
18. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations II: Arbitrary Spin Chains // International Journal of Theoretical Physics. 2007. Vol. 46. P. 741–805.
19. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // International Journal of Theoretical Physics. 2016. Vol. 55. P. 5008–5045.
20. Thyssen P., Ceulemans A. Shattered Symmetry: Group Theory from the Eightfold Way to the Periodic Table. New York: Oxford University Press, 2017.

GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS. V: WEIGHT DIAGRAM

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The root structure of the subalgebras of the group algebra of a conformal group in the framework of a twofold covering is analyzed. Based on the analysis, the Cartan–Weyl basis of the group algebra is determined. The root and weight diagrams are constructed. A mass formula associated with each node of the weight diagram is introduced.

Keywords: conformal group, group algebra, Lorentz group, Cartan subalgebra, Weyl generators, root structure, weight diagram, mass formula.

Дата поступления в редакцию: 10.04.2024

ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ МЕЖДУ ПРОШЛЫМИ И НАСТОЯЩЕЙ ИСТОРИЧЕСКИМИ ЭПОХАМИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Теория абсолютного пространства-времени, известная как общая теория относительности, постулирует равное бытие как прошлого, так и настоящего, и будущего. Это является основанием реальности построения машины времени, позволяющей перемещать тела из настоящего в прошлое и обратно. В статье описываются способы передачи сообщений между человеком, переместившимся в прошлое, и людьми, находящимися в настоящем.

Ключевые слова: машина времени, передача сообщений, информационная связь между прошлым и настоящим.

Введение

На сегодня мы не можем с полной уверенностью заявить, что постройка машины времени возможна. Однако мы располагаем несколькими проектами конструирования такой машины [1]. Предположим, что она построена и перебросила человека в прошлое. Нас интересует: можно ли организовать обмен сообщениями между ним и теми в настоящем, кто отправил его в прошлое?

Ответ утвердительный. Посылка информации, сообщений в прошлое обеспечит квантовая машина времени Светличного [1]. А сообщения из прошлого в настоящее обеспечиваются либо естественным образом – написал, положил в «ящик» с такими-то географическими координатами, и ящик откроют в настоящем, хотя и в повреждённом состоянии, либо с использованием квантового устройства, способного устанавливать квантовую сцепленность во времени (temporal entanglement).

Рассмотрим работу описанной «почты» более подробно¹. Однако предварительно необходимо ознакомиться с устройством Вселенной на квантовом уровне, т. е. с квантовой космологией Уилера.

1. Квантовая космология Уилера

Мир существует в форме исторических эпох (параллельных вселенных).

Каждая историческая эпоха – это Ψ -волна амплитуды вероятности 3-геометрий ⁽³⁾ \mathcal{G} в суперпространстве Уилера всех 3-мерных геометрий.

¹ Данная статья основывается на двух публикациях автора [2, 3], в каждой из которых общение с прошлым изложено отдельно. Здесь мы их объединяем с некоторыми изменениями.

Пространство-время Вселенной M^4 в квантовой космологии Уилера–ДеВитта появляется как интерференция когерентной квантовой суперпозиции, или волнового пакета:

$$\Psi^{[4]\mathcal{G}} = \int_K c_k \Psi_k^{[3]\mathcal{G}} d\mu(k), \quad c_i \in \mathbb{C},$$

где $\Psi_k^{[3]\mathcal{G}}$ – частная волновая функция, являющаяся функционалом от 3-мерной римановой геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G} = (M^3, h_{\alpha\beta})$ и удовлетворяющая функциональному уравнению Уилера–ДеВитта [4].

1.1. Порождение и склейка исторических эпох

Интерференция даёт цепи «горных пиков» – исторические последовательности = пространства-времени с линейным временем t .

Классическое пространство-время – это цепь горных пиков (чёрные точки на рис. 1 слева), образовавшихся при интерференции двух исторических эпох с Ψ -волнами $\Psi_k^{[3]\mathcal{G}}$ и $\Psi_{k'}^{[3]\mathcal{G}}$.

Таким образом, имеем систему Ω , т. е. Вселенную, которая может находиться в состояниях Ω_k , $k \in K$ с амплитудой вероятности $\Psi_k^{[3]\mathcal{G}}$. **Каждая историческая эпоха – это состояние Ω_k .**

Историческая эпоха – это волна стационарности (волна неизменности, «замороженности») в абстрактном бесконечномерном историческом пространстве, имеющая вид

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega_k) &\equiv \Psi_\alpha({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) = \\ &= A_k \left(\begin{array}{l} \text{медленно меняющаяся} \\ \text{амплитудная функция} \end{array} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} S_k({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu)}. \end{aligned}$$

Историческая эпоха – это «замороженное» бытие людей, *гештальт* Гёте. Изменения в жизни отсутствуют в каждой конкретной исторической эпохе на протя-

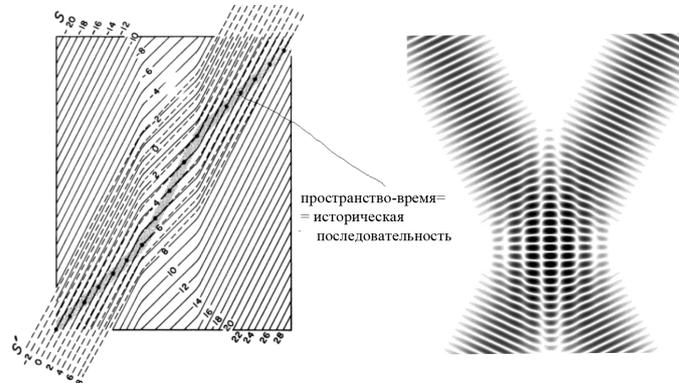


Рис. 1. Интерференция в суперпространстве Уилера

жении всего времени её существования, точнее, всей длительности эпохи.

Историческая эпоха – это «настоящее», имеющее длительность.

1.2. Мир исторических эпох

Исторические эпохи *существуют одновременно*. Внешние наблюдатели находятся не вне этой суперпозиции исторических эпох, а внутри – внутри каждой исторической эпохи, для которых собственная историческая эпоха представляется истинной объективной реальностью.

Таким образом, мы вместо аксиомы Минковского о том, что Мир состоит из событий и является абсолютным пространством-временем, вводим следующую аксиому:

АКСИОМА. Мир существует в форме исторических эпох. Каждая историческая эпоха – это волна стационарности 3-геометрий $\mathcal{G}^{(3)}$ в Суперпространстве Уилера.

Благодаря наличию интерференционной картины – цепи «горных пиков» – существует классическое пространство-время, которое видится живущим в нём наблюдателям как «эволюционирующее», поскольку содержит вклады всех исторических эпох.

1.3. Склейка исторических эпох

Это видно в случае полуклассического приближения волнового пакета: если взять

$$\Psi_k[\mathcal{G}^{(3)}] = A_k[\mathcal{G}^{(3)}]e^{\frac{i}{\hbar}S_k(\mathcal{G}^{(3)})},$$

то

$$\int_K c_k \Psi_k[\mathcal{G}^{(3)}] d\mu(k) = \left(\int_K c_k A_k[\mathcal{G}^{(3)}] d\mu(k) \right) e^{\frac{i}{\hbar}S_0}, \quad (1)$$

где

$$\forall k(S_k(\mathcal{G}^{(3)}) = S_0 = const)$$

– условие интерференции. Из (1) видно, как цепи «горных пиков» складываются из разных интерферирующих эпох.

Благодаря этому втиснутые в единое пространство-время наблюдатели рассуждают о наблюдаемых сменах исторических эпох, помнят своих предков, раскапывают исторические артефакты и пр. При этом каждый из этих наблюдателей принадлежит конкретной исторической эпохе Ω_k , поскольку состояниями квантовой системы Ω являются эпохи, а не интерференция в форме пространства-времени (цепи «горных пиков»).

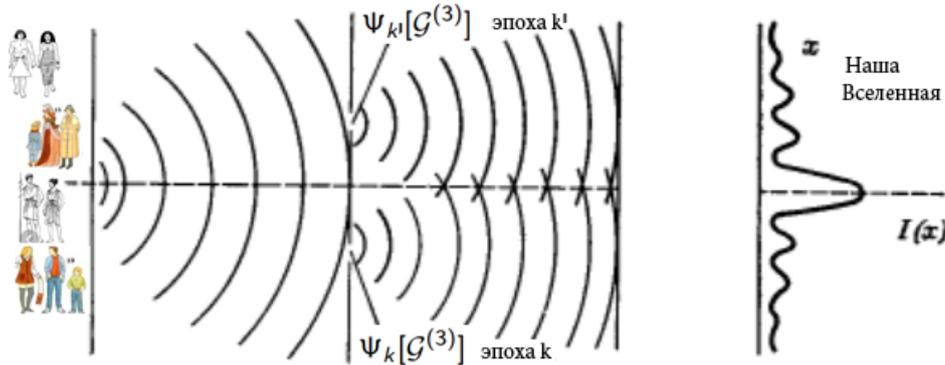


Рис. 2. Исторические эпохи

1.4. Интерференция исторических эпох порождает историческую последовательность

Эпохи формируют поколения людей – это волны $\Psi_k[G^{(3)}]$. Эпохи интерферируют (см. (1)). Получается историческая последовательность как смесь эпох = **Наша Вселенная**. Их может быть не одна, т. е. возможны параллельные вселенные (рис. 2).

1.5. Межвременные переходы

Переходы между различными эпохами возможны благодаря сцеплению (запутыванию) материи этих эпох [5]. При этом образуются кротовые норы, ведущие из одной эпохи в другую [6].

Квантовая машина времени есть локальное сцепление двух состояний Ω_k и $\Omega_{k'}$ (рис. 3).

1.6. Как осуществляется сцепление эпох

Как происходит локальное сцепление? *Вещество-призрак* в нашей Вселенной – это *теневое вещество Дойча*, т. е. оно состоит из частиц параллельной вселенной и в нашей Вселенной имеет нулевой тензор энергии-импульса. Но оно может иметь квантовую связь (сцепленность) с нашим веществом [8].

Сцепление, макроскопическое сцепливание, организуются между веществом-призраком и «нашим» веществом.

Такая машина времени является вероятностной – вместо визита к Пушкину можно попасть в Парк юрского периода.

2. Передача информации в Прошлое

Как пример макроскопического проявления эффектов квантовой механики можно назвать квантовую телепортацию – передачу квантовых состояний на рас-

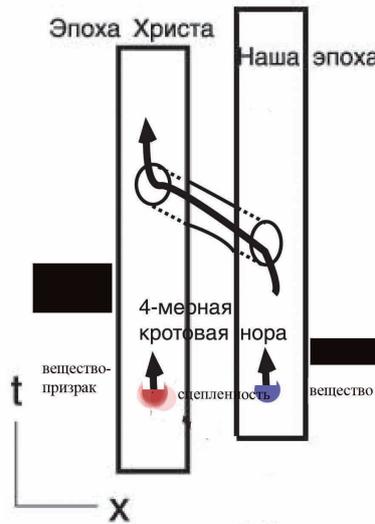


Рис. 3. Сцепление исторических эпох

стояние.

В 2009 г. Светличный² (Svetlichny) [1] предложил использовать протокол квантовой телепортации для реализации квантовой сети с обратными связями во времени для (вероятностного) моделирования временных петель (СТС). В частности, он продемонстрировал возможность телепортации квантового состояния в прошлое.

Рассмотрим этот механизм передачи сигналов в Прошлое.

2.1. Квантовая телепортация (передача) кубита

Изучим механизм квантовой телепортации кубитов в прошлое. Пусть Алиса обладает частицей 1, находящейся в **неизвестном** квантовом состоянии, описываемом кубитом

$$|\psi\rangle_1 = c_1|0\rangle_1 + c_2|1\rangle_1, \quad (2)$$

где индекс 1 помечает частицу 1. Алиса не может переслать Бобу свою частицу, у неё нет возможности переслать частицу 1 как физическую материальную вещь. Тогда остаётся только одно – сообщить Бобу информацию о квантовом состоянии частицы 1, т. е. передать состояние кубита (2).

Рассмотрим четырёхмерное гильбертово пространство \mathcal{H}^4 всех 2-кубитов, состоящее из тензоров вида

$$|x\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle.$$

²George Svetlichny – американский физик. Получил степень доктора философии в Принстонском университете. Специалист в области квантовой физики, общей теории относительности и квантовой гравитации. В настоящее время полный профессор Pontificia Universidade Catylica do Rio de Janeiro, Бразилия.

Однако можно задать ортонормированный базис в \mathcal{H}^4 из четырёх сцепленных состояний Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle], \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle - |11\rangle], \quad (3)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle + |10\rangle], \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle] \quad (4)$$

– базис Белла, и тогда любое 2-кубитовое чистое квантовое состояние представимо в виде

$$|x\rangle = \beta_{00}|\Phi^+\rangle + \beta_{01}|\Psi^+\rangle + \beta_{11}|\Psi^-\rangle + \beta_{11}|\Phi^-\rangle.$$

Шаг 1. Мы предполагаем, что Алиса и Боб имеют в распоряжении, соответственно, частицы 2 и 3, находящиеся в сцепленном³ (запутанном) состоянии. Для определённости скажем: это 2-кубит

$$|\Phi^+\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_2 |0\rangle_3 + |1\rangle_2 |1\rangle_3 \right], \quad (5)$$

где индексы 2, 3 помечают частицы 2 и 3 соответственно. Данный 2-кубит представлен заранее некоей третьей стороной, способной создавать сцепленные состояния.

Прошлая эпоха, Прошлое – это параллельная вселенная Эверетта, замороженная стационарная волна в суперпространстве Уилера [2,4]. Её частицы в нашей эпохе, в Настоящем, являются частицами-призраками [5], т. е. имеют нулевой тензор энергии-импульса.

Частицу 2 берём в Настоящем, частица 3 – суть частица-призрак из Прошлого. Их сцепление эквивалентно образованию 3-мерной кротовой норы между 3-пространствами Прошлого и Настоящего [6].

Шаг 2. Квантовое состояние системы из всех трёх частиц 1, 2 и 3 (рис. 4) имеет вид

$$|\psi\rangle_{123} = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi^+\rangle_{23}.$$

Шаг 3. На этом шаге Алиса может произвести измерение (белловских) состояний частиц 1 и 2, которые находятся в её распоряжении, т. е. применить к состоянию оператор проектирования:

$$|\Phi^+\rangle_{12} \langle \Phi^+|, \quad (6)$$

и получить такой результат:

$$|\Phi^+\rangle_{12} \langle \Phi^+| (|\psi\rangle_{123}) = |\Phi^+\rangle_{12} \otimes [c_1|0\rangle_3 + c_2|1\rangle_3].$$

Это означает, что сразу *после измерения* в силу квантовой корреляции частица 3, находящаяся у Боба, оказывается в состоянии

$$c_1|0\rangle_3 + c_2|1\rangle_3.$$

³Сцепленная пара часто называется ЭПР-парой.

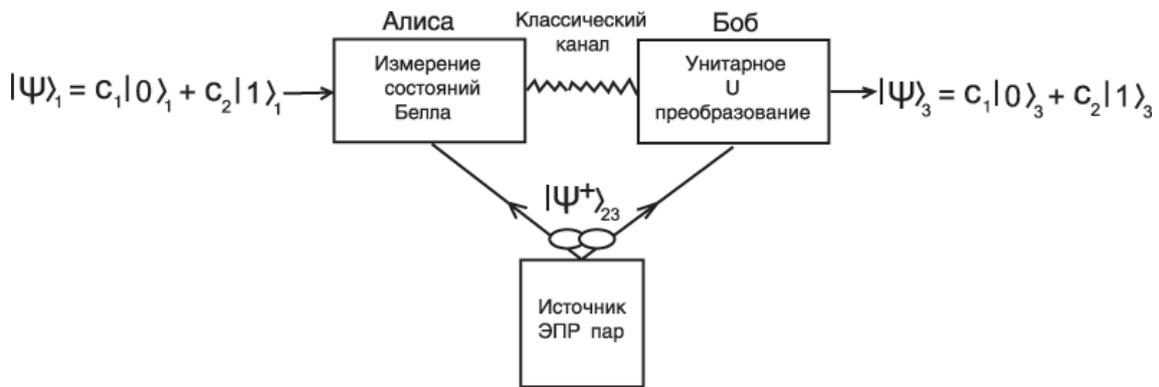


Рис. 4. Схема квантовой телепортации

Но это в точности то же состояние, что и у частицы 1.

Шаг 4. Алиса по классическому каналу связи (по e-mail) сообщает Бобу, какой оператор проектирования она применяла.

Шаг 5. Боб, узнав от Алисы об использованном операторе проектирования, применяет к своей частице 3 унитарное преобразование \hat{U} , а точнее, одно из четырёх $\hat{I}, \hat{\sigma}_1, i\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$, отвечающих одному из использованных операторов проектирования⁴. В данном случае это следующее преобразование $\hat{U} = \hat{\sigma}_1$:

$$\hat{U}[c_1|1\rangle_3 + c_2|0\rangle_3] = c_1|0\rangle_3 + c_2|1\rangle_3.$$

Совершение унитарного преобразования – это прогонка кубита через некоторый гейт, т. е. он подвергается некоторому (физического) воздействию. В результате частица 3 принимает исходное квантовое состояние частицы 1, что и хотела сделать Алиса. Телепортация завершена.

Удивительно то, что частица 3 из сцепленной пары 23 фактически «превращается» в частицу 1. При этом кубит Алисы – частица 1 – после измерения (6) теряет своё исходное состояние (2), так как сцепляется (перепутывается) с частицей 2. Это происходит в полном соответствии с теоремой о запрете клонирования квантового состояния.

Телепортация происходит мгновенно. В этом процессе квантовая информация перемещается от Алисы к Бобу.

2.2. Эффективный телеграф Светличного в Прошлое

Передача в Прошлое проявляется, если изначально сцепить (запутать) частицы 2 и 3 в форме

$$|\Phi^+\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_2|1\rangle_3]. \quad (7)$$

⁴ I – тождественный оператор, $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ – матрицы Паули.

Тогда преобразование Боба \hat{U} будет тождественным, т. е. $\hat{U} = I$. В этом случае Бобу не нужно выполнять никаких преобразований для получения состояния Алисы $|\psi\rangle_1$. В некотором смысле Боб обладает неизвестным состоянием частицы 1 **даже до того, как Алиса осуществит телепортацию**, т. е. делает шаг 3 с оператором проектирования

$$|\Phi^+\rangle_{12} \langle\Phi^+|. \quad (8)$$

Следствие имеет место во времени до появления причины! Частица 3 в данном случае может рассматриваться как частица 1, **вернувшаяся назад, в прошлое**. Более того, независимо от того, что Алиса могла бы делать с частицей 2, сцепленная с ней частица 3 упорно сохраняет в прошлом по отношению ко времени манипуляций Алисы в будущем состояние частицы 1 (рис. 5).

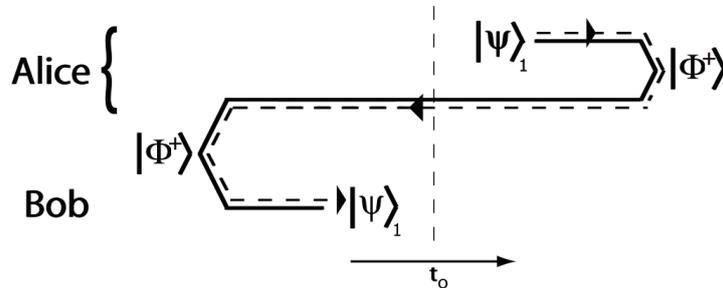


Рис. 5. Когда результат измерения телепортации совпадает с состоянием Белла сцепленной пары 23 в состоянии ввода, тогда частица 3 Боба должна находиться в состоянии $|\psi\rangle$ прежде, чем Алиса решила его телепортировать. Это порождает мысль о том, что кубит путешествует во времени с помощью измерения Белла и ЭПР-пары Белла. Пунктирная линия со стрелкой представляет временной поток во временной системе отсчёта кубита; от момента образования ЭПР-пары до измерения время кубита течёт против времени внешнего наблюдателя (t_0). Однако эта интерпретация зависит от результата измерения, поэтому следует говорить об «условном перемещении назад во времени» [7]

Бобу не нужно выполнять никаких преобразований для получения состояния Алисы $|\psi\rangle_1$. При этом то, каким было состояние частицы 3 до *передачи информации*, осуществлённой Алисой на шаге 3, узнать совершенно невозможно.

Поэтому можно заявить, что Боб обладал неизвестным состоянием частицы 1 **даже до того, как Алиса осуществила телепортацию**, т. е. сделала шаг 3.

Светличный пишет: «То, что мы имеем в случае проекции на Ψ_{00} , является эффективным путешествием во времени. После того как произошло измерение M , нет эмпирического способа опровергнуть утверждение о том, что кубит в точке A действительно переместился назад во времени в точку B , но это не является истинным путешествием во времени. Под истинным путешествием во времени я подразумеваю такое, отрицание которого может быть опровергнуто эмпирическими данными. Однако можно спросить, существуют ли в этом случае какие-либо предполагаемые эффекты и преимущества предполагаемого истинного путешествия во времени. Неожиданный ответ – да, но, очевидно, те, которые не могут привести к парадоксам путешествия во времени. В этих случаях путешествие во времени –

это интерпретация ситуации, которую в противном случае можно было бы проанализировать в обычных квантово-механических терминах, но такое прочтение концептуально облегчает понимание этого процесса, и поэтому я воспользуюсь этой метафорой. Таким образом, я буду использовать такие выражения, как "отправить назад во времени без кавычек, понимая, что действую в ограниченном контексте этой статьи. Я рассматриваю только системы с несколькими кубитами, поскольку расширение до более высоких измерений было бы простым» [1, р. 2].

Иначе говоря, *поскольку утверждения квантовой механики носят вероятностный характер, то известные парадоксы путешествия во времени исчезают*, если внимательно рассмотреть в деталях предложенный Светличным квантово-механический переход в прошлое.

Сделаем три важных замечания:

1. В своих измерениях (шаг 3, (6)) Алиса не получает никакой информации о телепортируемом состоянии: во время телепортации коэффициенты c_1 и c_2 остаются неизвестными. Иначе говоря, состояние частицы 1, которой она располагала, остаётся для Алисы неизвестным. Алиса всего лишь передала Бобу *само квантовое состояние* своей частицы 1. Более того, Боб, поскольку он не производил никаких измерений, также ничего не знает о новом состоянии своей частицы 3.

2. Квантовая машина времени Светличного передаёт в прошлое только информацию, и никоим образом не физический материальный объект.

3. Эксперименты на квантовом информационном процессоре ЯМР в жидком состоянии, проведённые Лафорестом, Баухом и Лафламме, согласуются с интерпретацией, что информация может рассматриваться как текущая назад во времени через сцепление (запутывание) [7].

Истинен для Светличного такой способ путешествия во времени, невозможность которого можно экспериментально или как-то иначе опровергнуть. Для своей машины времени он такого не видит и поэтому называет её эффективной.

2.3. Передача информации в Прошлое по типу азбуки Морзе

Пока мы показали, как в прошлое можно передать неизвестное квантовое состояние $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Однако это ещё не говорит о том, как слать конкретные сообщения [10]. Непосредственный механизм передачи сообщений по типу азбуки Морзе продемонстрировал Ральф [11].

Покажем как это делается, на примере передачи сообщения $|1\rangle_A$.

Пусть Алиса и Боб обладают парой

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B|1\rangle_A + |1\rangle_B|0\rangle_A).$$

R-СТС задаётся сцепленным 2-кубитом, реализованным на двух частицах 1 и 2:

$$|\phi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2).$$

Формируем состояние

$$|\psi\rangle_{AB} \otimes |\phi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B|1\rangle_A + |1\rangle_B|0\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2).$$

Применяем к этому состоянию гейт \widehat{CNOT}_{A1} по частицам А, 1:

$$\widehat{CNOT} : |xy\rangle \rightarrow |x(x+y)\rangle.$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \widehat{CNOT}_{A1}(|\psi\rangle_{AB} \otimes |\phi\rangle_{12}) = \\ & = \frac{1}{2}|0\rangle_B|1\rangle_A \otimes (|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2) + \frac{1}{2}|1\rangle_B|0\rangle_A \otimes (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2). \end{aligned}$$

Пропустим это состояние через гейт \widehat{SWAP}_{A2} :

$$\begin{aligned} & \widehat{SWAP}|00\rangle = |00\rangle, \quad \widehat{SWAP}|01\rangle = |10\rangle, \quad \widehat{SWAP}|10\rangle = |01\rangle, \quad \widehat{SWAP}|11\rangle = |11\rangle, \\ & \widehat{SWAP}_{A2}\{\widehat{CNOT}_{A1}(|\psi\rangle_{AB} \otimes |\phi\rangle_{12})\} = \\ & = \frac{1}{2}|0\rangle_B|0\rangle_A \otimes |1\rangle_1|1\rangle_2 + \frac{1}{2}|0\rangle_B|1\rangle_A \otimes |0\rangle_1|1\rangle_2 + \frac{1}{2}|1\rangle_B|0\rangle_A \otimes |0\rangle_1|0\rangle_2 + \frac{1}{2}|1\rangle_B|1\rangle_A \otimes |1\rangle_1|0\rangle_2. \end{aligned}$$

Алиса проецирует часть этого тензора, относящуюся к частицам А, 1, на $|\phi\rangle_{A1}$, т. е. применяет оператор

$$|\phi\rangle_{A1} \langle \phi|.$$

Получается $|1\rangle_B|0\rangle_2$. Иначе говоря, Боб получил сигнал 1.

Аналогично передаётся в прошлое сигнал 0. Имея возможность передавать 0 и 1, мы можем предавать любое сообщение, закодированное в алфавите $\{0, 1\}$. Иначе говоря, можно наладить передачу телеграфных сообщений в Прошлом.

3. Передачи информации из Прошлого в Настоящее

Сообщение – это совокупность знаков, или, иначе, букв x из некоторого алфавита \mathcal{X} . Это *код*, с помощью которого представлена *информация*. Передача сообщения из одной точки пространства-времени в другую осуществляется либо с помощью материального носителя (вещи), либо посредством некоторого физического процесса. Физический процесс, несущий сообщение, осуществляющий передачу сообщения, называется *сигналом* [12, с. 7].

3.1. Классический канал связи

Для передачи сообщения (письма, вещи, кода) из Прошлого в Настоящее естественно воспользоваться устройством нашей Реальности в форме исторической последовательности, получаемой при интерференции исторических эпох [2], когда вещи из прошлого так или иначе доходят до нас. Для наших целей нужно, чтобы путешественник в прошлое помещал своё письмо в определённое место, в известный ему и нам «почтовый ящик».

Вещь, которую мы видим, ощущаем, передана нам из прошлого посредством времени. По Козыреву время – это физический процесс. Следовательно, мы имеем *сигналы из Прошлого*. И можно попытаться применить для описания передачи сигналов из Прошлого теоремы *теории сигналов*.

Вещь из прошлого достаётся нам одряхлевшей, с повреждениями, потускневшей, разрушающейся. Но ведь в то время, когда она была создана, она была новенькой, совершенной и яркой. Почему вещь доходит до нас состарившейся? Почему в музеях мы видим древние вещи?

Вещь – это материализация информации – числового кода, – посредством которого она была изготовлена и может быть изготовлена. По коду её можно напечатать на 3D-принтере. Следовательно, вещь как информация, как числовой код, **посылается** нам как код из Прошлого *с искажениями, с ошибками*.

В пространстве-времени жизнь вещи представлена как 4-мерное тело W , ограниченное двумя 3-мерными телами V_0 и V_1 на двух пространственно-подобных гиперплоскостях S_0 и S_1 , первая из которых отвечает моменту времени t_0 , а вторая – t_1 , $t_0 < t_1$.

Посмотрим на время как на канал передачи информации, который посылает, передаёт код вещи V_0 из прошлого t_0 в будущее t_1 , где принятый код, раскодируется органами чувств историка как вещь V_1 . Данный канал связывает одну историческую эпоху, относимую к прошлому, с другой, относимой к настоящему.

Бордизм между V_0 и V_1 – это пространственно-временная 4-мерная область W , край которой состоит из несвязной суммы 3-мерных областей V_0 и V_1 . Геометрия области W описывается с помощью уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса T_{ik} . Этот тензор характеризует всплески энергии, перемещения масс и конфигурации различных физических полей во временном отрезке $[t_0, t_1]$. Всё это рассматриваем как всевозможные помехи (шумы), мешающие передаче кода вещи по каналу связи, именуемом временем.

Напомним, что канал связи – это совокупность технических средств, с помощью которых осуществляется передача сообщений. *В нашем случае канал связи – это, как было сказано выше, устройство нашей Реальности в форме исторической последовательности, получаемой при интерференции исторических эпох, в том числе и прошлых.*

Любой канал связи обладает такой характеристикой, как *пропускная способность* C . Это максимальное количество информации, которое может быть передано по каналу связи в единицу времени [12, с. 27]. Размерность $[C] = \text{бит/сек}$.

По теории времени Козырева [13, с. 292], причина формирует следствие не сразу, а через длительность δt , и их разделяет расстояние δx . Они задают универсальную константу

$$c_2 = \frac{\delta x}{\delta t},$$

характеризующую скорость превращения причины в следствие.

Время передаёт пространственные вещи из одной исторической эпохи в другую; вещи для передачи кодируем – это некоторое количество битов. Как их найти? Поскольку вещи мы характеризуем их типичным линейным размером в пространстве, то предполагаем, что есть фундаментальная связь между линейным размером вещи и сопоставляемым ей объёмом битов. Иначе говоря, постулируем формулу

$$1_{км} = k_0 \cdot 1_{бит}, \quad k_0 = const > 0.$$

В таком случае очевидно, что $C = c_2/k_0$. Козырев оценивал значение величины c_2 как 700 км/с [13, с. 303].

Источником A передаваемых сообщений, информации, по рассматриваемому каналу связи является конкретная историческая эпоха, а сообщением – вещь a , находящаяся в данной эпохе. Мы эту вещь видели в прошлом, видим её и в настоящем, до нас доходит свет от неё.

Информация $i(a)$, соответствующая сообщению a , передаётся источником A с вероятностью⁵ $P(a)$.

Согласно Шеннону [12, с. 71],

$$i(a) = -\log P(a) = \log \frac{1}{P(a)},$$

а сам источник характеризуется *энтропией* [12, с. 72], определяемой как математическое ожидание:

$$H(A) = \mathbf{M} \left(\frac{1}{P(a)} \right).$$

Считая, что передача сообщений из прошлой эпохи в настоящую идет с постоянной скоростью, с затратой времени в среднем T на каждое сообщение, определяем *производительность источника A* как суммарную энтропию за единицу времени [12, с. 75]:

$$H'(A) = \frac{1}{T} H(A) \text{ (бит/сек)}.$$

Производительность – это скорость передачи сообщений. Мы знаем только одну фундаментальную физическую величину, которая характеризует скорость и «вморожена» в структуру пространства-времени – это скорость света c . Наш канал связи – время. Поэтому естественно принять, что в нашем исследовании

$$H'(A) = c/k_0.$$

По доказанной Шенноном теореме [12, с. 112], *если производительность источника меньше пропускной способности канала связи, т. е. $H'(A) < C$, то информация может быть передана со сколь угодно малой ошибкой*. Иначе говоря, историк увидит вещь новенькой, несостарившейся. Но если $H'(A) > C$, то передача кода без ошибок невозможна.

В нашем случае $H'(A) = c/k_0 > c_2/k_0 = C$.

Поэтому код вещи a передаётся из прошлого в настоящее с неконтролируемыми ошибками. По нему трудно воссоздать вещь a в настоящем такой, какой она была в прошлом. Вещь из прошлого доходит до нас потрескавшейся, потускневшей, старой, разрушающейся; сохранность письма зависит от материала, из которого оно произведено.

Время как коммуникационный канал связывает одну историческую эпоху, относимую к прошлому, с другой, относимой к настоящему. В силу сказанного при

⁵ Не каждое сообщение может быть передано с абсолютной достоверностью, и это определяет многовариантность Прошлого для живущих в Настоящем, определяет неопределённость восстановления картины Прошлого [2].

раскопках мы с неизбежностью обнаруживаем вещи прошлых эпох постаревшими. С вещами всё понятно, а куда исчезают люди прошлого при раскопках? Очевидно, их тела – материальные носители сознания – при передаче их кода по данному каналу разрушаются полностью, т. е. их код забивается шумами.

Вопрос, что происходит с сознанием, которым были наделены исчезнувшие в канале связи (во времени) тела людей? Сознание человека, его личность – это цифровой код, записанный с помощью димеров, из которых состоят микротрубочки клеток организма. Как показано в [14, 15] с использованием квантовой механики, цифровой код человека сохраняется после смерти человека. Неясно только, что или кто становится его носителем и материален ли этот носитель.

3.2. Квантовый канал связи

Упоминание квантовой механики заставляет задуматься о возможных квантовых поправках к сказанному о передаче сообщений из Прошлого в Настоящее.

Если обратиться к квантовой теории информации [16], то первое, о чём она говорит, так это о кодировании с помощью векторов состояния S_x в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Важное отличие от классики состоит в том, что квантовая информация содержится в неизвестных состояниях. Впрочем, с этим мы уже имели дело при рассмотрении передачи сообщений в Прошлом. Тем не менее механизм Ральфа даёт надежду на воспринимаемую передачу сигналов.

Важное сходство с классикой состоит в том, что квантовый аналог теоремы Шеннона имеет ту же структуру и говорит также о том, что в случае если $H'(A) > C$, то передача кода без ошибок невозможна. Имеется формула для вычисления пропускной способности C для квантового канала связи. Думается, с учётом квантовой корреляции во времени не исключено, что $H'(A) < C$. Следовательно, по квантовому каналу связи передача сообщений из Прошлого в Настоящее может быть осуществлена с контролируемой точностью.

4. Заключение

Мы представили возможные способы передачи сообщений между людьми, являющимися путешественниками во времени. В каждом из направлений передачи сообщений есть неясные места. О передаче сообщений в прошлое говорил ещё Светличный (точно ли в прошлое уходит сигнал? – см. [3]). А в случае передачи сигналов в настоящее у нас нет строго доказанного аналога теоремы Шеннона применительно к рассматриваемому специфическому каналу связи, называемому временем. Однако ничего иного пока нет – всё на уровне интуиции и идей, и с многим предстоит ещё серьёзно разбираться.

Литература

1. Svetlichny G. Effective Quantum Time Travel. URL: <https://arxiv.org/pdf/0902.4898.pdf> (дата обращения: 01.07.2024).

2. Гуц А.К. Время. Машина времени. Параллельные вселенные. Изд. 4, испр. и сущ. доп. М.: URSS. 2019.
3. Гуц А.К. Квантовая машина времени // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 3. С. 20–44.
4. Уилер Дж. Предвидение Эйнштейна. М.: Мир, 1970.
5. Guts A.K. Ghost Particles, Entanglement of Historical Epochs and Time Machine. 2022. URL: <https://arxiv.org/pdf/2302.10173.pdf> (дата обращения: 01.07.2024).
6. Maldacena J., Susskind L. Cool horizons for entangled black holes. URL: <https://arxiv.org/pdf/1306.0533.pdf> (дата обращения: 01.07.2024).
7. Laforest M., Baugh J., Laflamme R. Time-reversal formalism applied to maximal bipartite entanglement: Theoretical and experimental exploration // Physical Review A. 2006. Vol. 73. Art. 032323.
8. Гуц А.К. Частицы-призраки, сцепленность исторических эпох и машина времени // Математические структуры и моделирование. 2020. № 3 (55). С. 12–21.
9. Juan Yin, Yuan Cao and others. Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers // Science. 2017. Vol. 356, Iss. 6343. P. 1140–1144.
10. Ghosh S., Adhikary A., Goutam P. Quantum Signaling to the Past Using P-CTCS. URL: <https://arxiv.org/pdf/1708.03521.pdf> (дата обращения: 01.07.2024).
11. Ralph T. Problems with modelling closed timelike curves as post-selected teleportation. URL: <https://arxiv.org/pdf/1107.4675v1> (дата обращения: 01.07.2024).
12. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., Финк Л.М. Теория передачи сигналов. М.: Связь, 1980.
13. Козырев Н.А. Избранные труды. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
14. Гуц А.К. Основы квантовой кибернетики. Изд. 2, испр. и доп. М.: УРСС, 2016. 216 с.
15. Гуц А.К. КиберГород и КиберЛюди // Визуальные образы современной культуры. Человек в современном городе: облик, образ, образование: сб. науч. ст. по материалам V Всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием (Омск, 17–18 мая 2016 г.). Омск: изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. С. 11–23.
16. Холево А.С. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002.

TELECOMMUNICATIONS BETWEEN PAST AND PRESENT HISTORICAL EPOCHES

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. The theory of absolute space-time, known as general relativity, postulates the equal existence of the past, present, and future. This is the basis for the reality of constructing a time machine, which allows you to move bodies from the present to the past and back. The article describes the methods to transmit messages between a person who has moved into the past and people in the present.

Keywords: time machine, message transmission, information connection between past and present.

Дата поступления в редакцию: 10.07.2024

ПОЛНАЯ ГРУППА ИЗОМЕТРИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксёнов

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

Г. Ян

магистрант, e-mail: guoliangyang355@gmail.com

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается специальная трёхмерная алгебра Ли $S_3 V$ типа Бианки. Найдено матричное представление данной алгебры Ли и соответствующей связной односвязной группы Ли S_3 и введены естественные координаты, которые определяются матричным представлением. Найдены формулы экспоненциального отображения относительно естественных координат. Выписаны полные группы автоизометрий специальной алгебры Ли относительно евклидова или лоренцева скалярного произведения. Найдены левоинвариантная риманова метрика на группе Ли S_3 и полная группа изометрий полученного однородного многообразия. Это многообразие оказалось пространством постоянной кривизны Риччи.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, левоинвариантная метрика, изометрия, кривизна Риччи.

1. Постановка задачи

Пусть \mathcal{G} – алгебра Ли, снабжённая евклидовым или лоренцевым скалярным произведением. Линейное преобразование $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ называется *автоизометрией*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и изометрией относительно скалярного произведения. Это преобразование называется *автоподобием*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно скалярного произведения.

Пусть g – левоинвариантная метрика на связной группе Ли G . Любая изометрия $h : G \rightarrow G$ однородного пространства (G, g) раскладывается в композицию $L_a \circ f$, где f – изометрия, оставляющая единичный элемент $e \in G$ на месте, а L_a – левый сдвиг, $a \in G$. Поэтому для того, чтобы найти полную группу изометрий однородного пространства (G, g) , мы сначала найдём изометрии, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли. Если группа Ли G является экспоненциальной, то такие изометрии определяются автоизометриями соответствующей алгебры Ли \mathcal{G} .

Согласно классификации Дж. Милнора [1] существует с точностью до изоморфизма 6 унимодулярных трёхмерных алгебр Ли и бесконечное семейство неунимодулярных алгебр Ли. Все неунимодулярные трёхмерные алгебры Ли разреши-

мы и содержат двумерный коммутативный идеал \mathcal{L} , который является унимодулярным ядром. Если мы выберем базис (E_1, E_2, E_3) в такой алгебре Ли так, что $E_2, E_3 \in \mathcal{L}$, то операция $[\cdot, \cdot]$ будет полностью определяться матрицей преобразования $(\text{ad}E_1)|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$.

Среди всех неунимодулярных трёхмерных алгебр Ли особое место занимает алгебра Ли, относящаяся к V типу по классификации Бианки. Для неё при подходящем выборе вектора E_1 преобразование $(\text{ad}E_1)|_{\mathcal{L}}$ является тождественным. Такую алгебру Ли будем называть *специальной* и обозначать её через \mathcal{S}_3 . Соответствующую ей связную односвязную группу Ли обозначим S_3 , и тоже будем называть *специальной*.

В данной работе мы найдём матричное представление алгебры Ли \mathcal{S}_3 и группы Ли S_3 , введём координаты в \mathcal{S}_3 и S_3 , связанные с матричным представлением, найдём формулы, по которым действуют левый сдвиг, экспоненциальное отображение и обратное к нему отображение. После этого мы определим канонический вид матрицы Грама евклидова и лоренцева скалярного произведения в алгебре Ли \mathcal{S}_3 и найдём формулы, по которым действуют однопараметрические группы автоподобий алгебры Ли.

В евклидовом случае мы определим вид левоинвариантного метрического тензора в выбранной системе координат и найдём полную группу изометрий группы Ли S_3 .

Две левоинвариантные метрики на одной группе Ли мы будем относить к одному классу, если соответствующие однородные многообразия изометричны.

2. Матричное представление

В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3) операция $[\cdot, \cdot]$ в алгебре Ли \mathcal{S}_3 задаётся формулами

$$[E_1, E_2] = E_2, [E_1, E_3] = E_3, [E_2, E_3] = \vec{0}. \quad (1)$$

В работе [2] отмечено, что этим требованиям удовлетворяют линейно независимые матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, алгебра Ли \mathcal{S}_3 может быть представлена как состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}.$$

В базисе (E_1, E_2, E_3) эта матрица имеет координаты (u_1, u_2, u_3) . Обозначим $X = \exp U$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}x_1 & 0 & \operatorname{sh}x_1 & x_2 \\ 0 & e^{x_1} & 0 & x_3 \\ \operatorname{sh}x_1 & 0 & \operatorname{ch}x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$x_1 = u_1, x_2 = \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), x_3 = \frac{u_3}{u_1}(e^{u_1} - 1). \quad (4)$$

Тем самым связная односвязная группа Ли S_3 , которая соответствует алгебре Ли \mathcal{S}_3 , может быть представлена как состоящая из матриц вида (3) с обычной операцией умножения матриц. Мы припишем матрице (3) координаты (x_1, x_2, x_3) . Будем называть введённые нами координаты в S_3 и \mathcal{S}_3 *естественными*. Тогда (4) – это формулы, по которым действует экспоненциальное отображение $\exp : \mathcal{S}_3 \rightarrow S_3$ относительно естественных координат. Формулы обратного отображения $\exp^{-1} : S_3 \rightarrow \mathcal{S}_3$:

$$u_1 = x_1, u_2 = \frac{x_1 x_2}{(e^{x_1} - 1)}, x_3 = \frac{x_1 x_3}{(e^{x_1} - 1)}.$$

Эти формулы показывают, что группа Ли является экспоненциальной, а отображение $\exp : \mathcal{S}_3 \rightarrow S_3$ является гомеоморфизмом. Заметим, что в этих формулах имеется устранимая неопределённость при $x_1 = 0$. Необходимо определить $\exp^{-1}(0, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$. Аналогично, в формулах (4) имеется устранимая неопределённость при $u_1 = 0$, и необходимо определить $\exp(0, u_2, u_3) = (0, u_2, u_3)$.

Групповая операция и обратный элемент:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3), \quad (5)$$

$$(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, e^{-x_1} x_2, e^{-x_1} x_3).$$

Заметим, что формулы (5) могут быть получены без использования матричного представления группы Ли S_3 , как следствие результатов, полученных С.П. Гавриловым в работе [3], где рассматривался класс групп Ли произвольной размерности, содержащих коммутативную подгруппу коразмерности 1. Там же найдена каноническая форма левоинвариантного метрического тензора для групп такого класса, но в весьма общем виде.

Любой базис, в котором коммутационные соотношения имеют вид (1), будем называть *каноническим*. Полная группа автоморфизмов алгебры Ли \mathcal{S}_3 является шестимерной, и в каноническом базисе она определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a_{22} & a_{23} \\ \beta & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}, a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \neq 0. \quad (6)$$

В дальнейшем запись $[F]$ означает матрицу преобразования F , а запись $[g(X)]$ означает матрицу метрического тензора $g(X)$.

3. Однопараметрические группы автоизометрий и автоподобий алгебры Ли \mathcal{S}_3

Пусть в алгебре Ли \mathcal{S}_3 введено скалярное произведение. Мы определим, к какому виду можно привести матрицу Грама данного скалярного произведения и выпишем однопараметрическую группу автоизометрий.

Случай 1. Пусть в алгебре Ли \mathcal{S}_3 введено евклидово скалярное произведение. Тогда, учитывая вид (6) автоморфизмов алгебры Ли, мы можем выбрать канонический базис (E'_1, E'_2, E'_3) так, что $E'_1 \perp \mathcal{L}$, а E'_2, E'_3 образуют ортонормированный базис (E'_2, E'_3) в \mathcal{L} . Тогда матрица Грама примет вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $k > 0$.

Если мы хотим сделать наш базис ортонормированным (т. е. сделать матрицу Грама единичной), нам нужно дополнительно умножить E'_1 на число $m = 1/\sqrt{k}$. В новом базисе, составленном из векторов $V_1 = mE'_1, V_2 = E'_2, V_3 = E'_3$, операция $[\cdot, \cdot]$ задаётся равенствами

$$[V_1, V_2] = mV_2, [V_1, V_3] = mV_3, [V_2, V_3] = \vec{0}, m > 0. \quad (8)$$

Относительно любого из двух базисов (V_1, V_2, V_3) или (E'_1, E'_2, E'_3) произвольная однопараметрическая группа автоизометрий задаётся матрицей вида

$$[F_t^{(1)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos at & -\sin at \\ 0 & \sin at & \cos at \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, a = \text{const} \neq 0. \quad (9)$$

Случай 2. Пусть в \mathcal{S}_3 задано лоренцево скалярное произведение так, что индуцированное скалярное произведение в идеале \mathcal{L} положительно определено. Единственное отличие от первого случая состоит в том, что в матрице (7) имеет место $k < 0$. Положение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 1, а.

Случай 3. Пусть в \mathcal{S}_3 задано лоренцево скалярное произведение так, что в идеале \mathcal{L} индуцируется знаконеопределённое скалярное произведение. Тогда в подходящем каноническом базисе мы имеем матрицу Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k > 0.$$

Для однопараметрической группы автоизометрий имеем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} at & \operatorname{sh} at \\ 0 & \operatorname{sh} at & \operatorname{ch} at \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, a = \operatorname{const} \neq 0.$$

Положение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 1, б.

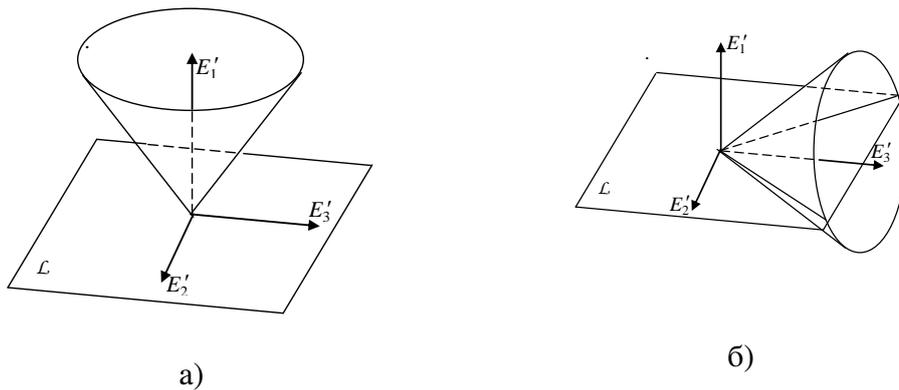


Рис. 1. Расположение базисных векторов

Случай 4. Пусть в S_3 задано лоренцево скалярное произведение так, что индуцированное скалярное произведение в идеале \mathcal{L} вырождено. Тогда мы можем привести матрицу Грама в каноническом базисе к виду

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 2.

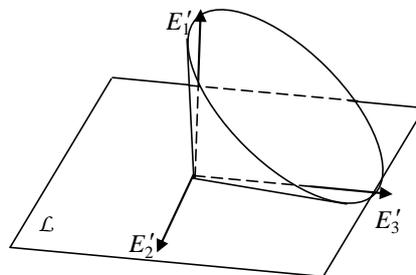


Рис. 2. Расположение базисных векторов

Следующая матрица задаёт однопараметрическую группу изометрий:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}, \mu = \text{const} > 0, t \in \mathbf{R},$$

однако эта группа не является группой автоморфизмов. Существует ещё одна однопараметрическая группа изометрий, которая определяется в каноническом базисе матрицей

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R},$$

и она является группой автоморфизмов.

Алгебра Ли \mathcal{S}_3 допускает аналог симметрии, который сохраняет операцию $[\cdot, \cdot]$ и скалярное произведение, но только в случаях 1 и 2. Это преобразование, которое переводит канонический базис (E'_1, E'_2, E'_3) в базис (E'_1, E'_3, E'_2) . Новый базис тоже будет каноническим. Композиция преобразований $F_t^{(1)}$ и симметрии задаётся матрицей

$$[F_t^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin at & \cos at \\ 0 & \cos at & -\sin at \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, a = \text{const} \neq 0. \quad (10)$$

Такие преобразования не образуют однопараметрической группы.

Отметим, что только в случае 4 алгебра Ли \mathcal{S}_3 допускает однопараметрическую группу автоподобий, которая задаётся в каноническом базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\nu t} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

4. Основной результат

Для построения левоинвариантного метрического тензора и однопараметрической группы изометрий, оставляющей единичный элемент группы Ли \mathcal{S}_3 на месте, мы можем использовать любой канонический базис в алгебре Ли \mathcal{S}_3 . При этом многообразия, которые у нас получатся, будут изометричны, и мы их относим одному классу. Поэтому будем исходить из того, что координаты в группе Ли и в алгебре Ли определяются именно базисом, составленным из матриц (2).

Теорема 1. *Любой левоинвариантный риманов метрический тензор на группе Ли \mathcal{S}_3 может быть приведен к следующему виду относительно естественных координат:*

$$[g(X)] = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x_1} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Однопараметрическая группа изометрий, оставляющая единичный элемент группы Ли S_3 на месте, действует по формулам:

$$f_t^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 \cos at - x_3 \sin at, x_2 \sin at + x_3 \cos at), \quad (12)$$

$a = \text{const} \neq 0, t \in \mathbf{R}$.

2. Полная группа изометрий полученного многообразия является связной, четырёхмерной и состоит из преобразований, действующих по формулам

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + h_1 \\ x'_2 = (x_2 \cos at - x_3 \sin at)e^{h_1} + h_2, \\ x'_3 = (x_2 \sin at + x_3 \cos at)e^{h_1} + h_3, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + h_1 \\ x'_2 = (x_2 \sin at + x_3 \cos at)e^{h_1} + h_2, \\ x'_3 = (x_2 \cos at - x_3 \sin at)e^{h_1} + h_3, \end{cases} \quad (14)$$

где $H(h_1, h_2, h_3)$ – произвольный элемент группы Ли $S_3, a = \text{const} \neq 0, t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. 1. Формулы (5) можем переписать в виде

$$L_X(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3),$$

где $L_X : S_3 \rightarrow S_3$ – левый сдвиг на элемент $X(x_1, x_2, x_3)$. Находим матрицу дифференциала $(L_X)_* : T_Y G_3 \rightarrow T_{XY} G_3$ и обратную к ней матрицу:

$$[(L_X)_*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_1} \end{pmatrix}; \quad W(X) = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_1} \end{pmatrix}.$$

Они постоянны, т. е. не зависят от элемента $Y(y_1, y_2, y_3)$.

Матрицу метрического тензора g в точке $X(x_1, x_2, x_3)$ находим по формуле

$$[g(X)] = W^T(X)GW(X)$$

в соответствии с методикой, описанной в работе [4]. Для рассматриваемого случая получаем матрицу (11).

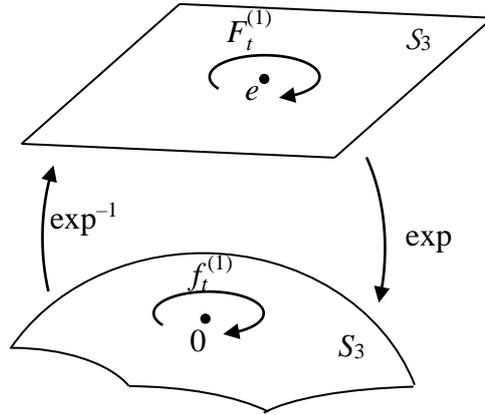


Рис. 3. Построение однопараметрической группы подобий

Пусть $F_t^{(1)} : \mathcal{S}_3 \rightarrow \mathcal{S}_3$ – однопараметрическая группа автоизометрий алгебры Ли \mathcal{S}_3 . Тогда подобия группы Ли \mathcal{S}_3 будем строить по правилу (рис. 3):

$$f_t^{(1)} = \exp \circ F_t^{(1)} \circ \exp^{-1} : \mathcal{S}_3 \rightarrow \mathcal{S}_3.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что однопараметрическая группа, состоящая из изометрий $f_t^{(1)}$, действует по формулам (12).

Убедимся, что полученные преобразования действительно являются изометриями при любом значении t . При каждом фиксированном значении t дифференциал $(f_t^{(1)})_*$ преобразования относительно координатных векторных полей $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ задаётся в точности матрицей (9). Обратная матрица I_t имеет вид

$$I_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos at & \sin at \\ 0 & -\sin at & \cos at \end{pmatrix}.$$

Матрицу тензора $(f_t^{(1)})^*g(X)$ находим из равенства

$$[(f_t^{(1)})^*g(X)] = I_t^T [g(X)] I_t.$$

Непосредственным вычислением получаем, что $[(f_t^{(1)})^*g(X)] = g(X')$, где $X' = f_t(X)$. Это значит, что однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (12), действительно является группой изометрий.

2. С помощью точно таких же вычислений мы найдём ещё одно множество изометрий построенного нами однородного многообразия:

$$f_t^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 \sin at + x_3 \cos at, x_2 \cos at - x_3 \sin at), \quad (15)$$

$a = \text{const} \neq 0, t \in \mathbf{R}$. Произвольную изометрию мы можем представить, как композицию $L_H \circ f_t^{(1)}$ или $L_H \circ f_t^{(2)}$, где H – произвольный элемент группы. Левый сдвиг на элемент $H(h_1, h_2, h_3)$ задаётся формулой

$$L_H(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + h_1, x_2 e^{h_1} + h_2, x_3 e^{h_1} + h_3).$$

Подставляя сюда формулы (12) или (15) получим формулы (13) или (14). ■

Замечание 1. Полученное в этой работе однородное риманово многообразие является многообразием постоянной положительной кривизны Риччи.

В работе [5] была описана разработка рабочей книги Excel для вычисления тензора кривизны левоинвариантных метрик на четырёхмерных группах Ли. Существует несложная методика применения этой рабочей книги и в трёхмерном случае. Мы вычислили тензор кривизны и тензор Риччи для полученного в этой работе однородного многообразия вручную и проверили результаты с помощью рабочей книги.

Вычисления удобнее проводить в ортонормированном базисе (V_1, V_2, V_3) , а в нём операция $[\cdot, \cdot]$ задаётся формулами (8). Матрицы операторов $R(V_1, V_2), R(V_1, V_3), R(V_2, V_3)$ имеют, соответственно, вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -m^2 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевыми являются следующие компоненты тензора кривизны типа (4.0):

$$R_{1221} = R_{1331} = R_{2332} = -m^2$$

и получающиеся из них в результате известных перестановок индексов. В соответствии с [1] кривизна Риччи в направлении единичного вектора X вычисляется по формуле $r(X) = \langle \sum_i R(X, V_i)X, V_i \rangle$, где \langle, \rangle означает метрический тензор. В результате кривизна Риччи в направлении всех базисных векторов получается равной:

$$r(V_1) = r(V_2) = r(V_3) = 2m^2.$$

Это означает, что и для любого единичного вектора $r(X) = 2m^2$.

5. Матричное представление связной группы изометрий

Мы выяснили, что полная группа изометрий группы Ли S_3 , снабжённая римановой левоинвариантной метрикой, состоит из преобразований, которые действуют по формулам (13) или (14) относительно канонических координат, будем их называть изометриями первого и второго рода соответственно. Полную группу изометрий обозначим $I_s(S_3)$, а преобразования первого рода образуют связную группу – компоненту связности единичного элемента группы $I_s(S_3)$. Мы обозначим её $I_{s_e}(S_3)$.

Если рассмотреть представление группы Ли S_3 в виде вектор-столбцов с компонентами $(x_1, 1, x_2, x_3, 1)$, то действие преобразований из $I_{s_e}(S_3)$ может быть представлено в виде матрицы

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{h_1} \cos at & -e^{h_1} \sin at & 0 \\ 0 & 0 & e^{h_1} \sin at & e^{h_1} \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \text{const} > 0, t \in \mathbf{R}.$$

Припишем такому элементу группы $Is_e(S_3)$ координаты (t, h_1, h_2, h_3) . Координата t является циклической: (t, h_1, h_2, h_3) и $(t + \frac{2\pi k}{a}, h_1, h_2, h_3)$, $k \in \mathbf{Z}$, определяют одну и ту же точку.

Нетрудно вычислить, что групповая операция в $Is_e(S_3)$ задаётся формулами

$$(t_1, h_1, h_2, h_3) \cdot (t_2, g_1, g_2, g_3) = \\ = (t_1 + t_2, h_1 + g_1, e^{h_1}(g_2 \cos t_1 - g_3 \sin t_1) + h_2, e^{h_1}(g_2 \sin t_1 + g_3 \cos t_1) + h_3).$$

Обратный элемент:

$$(t, h_1, h_2, h_3)^{-1} = (-t, -h_1, -e^{-h_1}(h_2 \cos at + h_3 \sin at), e^{-h_1}(h_2 \sin at - h_3 \cos at)).$$

Преобразования второго рода также можно представить в виде матрицы, но произведение двух преобразований второго рода является преобразованием первого рода, и поэтому преобразования второго рода группу не образуют.

Заметим, что

$$(t_1, h_1, 0, 0) \cdot (t_2, g_1, 0, 0) = (t_1 + t_2, h_1 + g_1, 0, 0).$$

$$(0, 0, h_2, h_3) \cdot (0, 0, g_2, g_3) = (0, 0, h_2 + g_2, h_3 + g_3).$$

Это значит, элементы, для которых $t = h_1 = 0$, образуют коммутативную подгруппу, и элементы, для которых $h_2 = h_3 = 0$, тоже образуют коммутативную подгруппу. Нетрудно проверить, что эти подгруппы являются нормальными; обозначим их G_1 и G_2 соответственно, и их элементам будем приписывать две координаты, отбрасывая нули.

Каждому элементу $(t_1, h_1) \in G_1$ поставим в соответствие преобразование

$$\varphi(t, h_1) : G_2 \rightarrow G_2,$$

действующее по формуле:

$$\varphi(t, h_1)(h_2, h_3) = (e^{h_1}(h_2 \cos t_1 - h_3 \sin t_1), e^{h_1}(h_2 \sin t_1 + h_3 \cos t_1)).$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \varphi(t_1 + t_2, h_1 + g_1)(h_2, h_3) &= (\varphi(t_1, h_1) \circ \varphi(t_2, g_1))(h_2, h_3) = \\ &= (\varphi(t_2, g_1) \circ \varphi(t_1, g_2))(h_2, h_3). \end{aligned}$$

Поскольку каждое преобразование $\varphi(t, h_1)$ является линейным, то оно является автоморфизмом группы G_2 . Тем самым мы имеем отображение

$$\varphi : G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2),$$

которое является гомоморфизмом.

Из этого можно сделать вывод, что группа $Is_e(S_3)$ является полупрямым произведением групп G_1 и G_2 : $Is_e(S_3) = G_2 \triangleleft_{\varphi} G_1$.

Литература

1. Milnor J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups // *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
2. Podoksenov M.N., Yang G. Special three-dimensional Lie algebra and its group of autoisomorphisms // *Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов XI Междунар. науч. конф. (Омск, 15 марта 2024 г.)*. Омск: Изд-во Ом. гос. ун., 2024. С. 28–30.
3. Гаврилов С.П. Левоинвариантные метрики на односвязных группах, содержащих абелеву подгруппу коразмерности 1 // *Гравитация и теория относительности*. 1984. Вып. 21. С. 13–48.
4. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трёхмерной группе Ли II типа Бианки // *Гравитация и теория относительности*. 1982. Вып. 19. С. 37–47.
5. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Тензор кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых четырёхмерных групп Ли // *Математические структуры и моделирование*. 2023. № 2 (67) С. 16–22.

COMPLETE GROUP OF ISOMETRIES OF THE SPECIAL THREE-DIMENSIONAL LIE GROUP

M.N. Podoksenov

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

G. Yang

Master's Degree Student, e-mail: guoliangyang355@gmail.com

Vitebsk State University named after P.M. Masherov, Vitebsk, Belarus'

Abstract. We consider a special three-dimensional Lie algebra \mathcal{S}_3 of Bianchi type V. A matrix representation of this Lie algebra and the corresponding connected simply connected Lie group S_3 is found and natural coordinates are introduced, which are determined by the matrix representation. Formulas for exponential mapping with respect to natural coordinates are found. Complete groups of autoisometries of the special Lie algebra with respect to the Euclidean or Lorentz scalar product are written out. The left-invariant Riemannian metric of the Lie group S_3 and the complete group of isometries of the resulting homogeneous manifold are found. This manifold turned out to be a space of constant Ricci curvature.

Keywords: Lie group, Lie algebra, left invariant metric, isometry, Ricci curvature.

Дата поступления в редакцию: 03.04.2024

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ИНЖЕНЕРНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА: ИСТОРИЯ И НОВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

А.В. Сказочкин

к.ф.-м.н., к.т.н., e-mail: avskaz@rambler.ru

ООО «Криокон», Калуга, Россия

Аннотация. Статья посвящена истории формулирования и решения задачи о трисекции угла: разделении угла на три равные части при помощи циркуля и линейки, – имеющей более чем 2,5-тысячелетнюю историю. Традиционно истоки задачи связывали с практической деятельностью мастеров и ремесленников Древней Греции, однако известно, что при помощи простых практических приёмов или небольших допущений в исходной формулировке задача вполне разрешима. Показано, что в основе задачи о трисекции угла лежит не практический интерес, а более глубокие основания, связанные с мировоззрением философов и математиков Эллады и историческим ходом развития математики, в частности с методологической работой представителей школы Пифагора, создавших геометрическую алгебру с объектами в виде прямых, окружностей и инструментами для их построения – циркулем и линейкой. С другой стороны, инженерный подход, истоки которого находятся тоже в Древней Греции, допускающий в процессе решения использовать, помимо циркуля и линейки, засечки, шкалу, дополнительные кривые и любой чертёжный инструмент, создающий конечную толщину проводимых линий, позволяет решить задачу о трисекции угла. В качестве примера инженерного подхода к задаче о трисекции угла приведено оригинальное решение автора статьи, используя циркуль, линейку и предмет для черчения, имеющий конечную толщину. Предложенный алгоритм позволяет математически решить задачу о трисекции угла с любой точностью. В историческом плане удивительным является то, что традиция формулировать поиск решения задачи о трисекции угла только при помощи циркуля и линейки, отклоняя при этом многочисленные возможности инженерного подхода, осталась и была поддержана всеми последующими поколениями математиков на протяжении 2,5 тысячелетий вплоть до сегодняшнего дня.

Ключевые слова: трисекция угла, математика в Древней Греции, школа Пифагора, геометрическая алгебра, мировоззрение, история математики, инженерный подход, механический способ, циркуль, линейка, биссектриса, алгоритм, решение задачи о трисекции угла.

Введение

Несмотря на то, что хорошо известно о неразрешимости исторической задачи о делении заданного угла на три равные части при помощи циркуля и линейки – так называемой задачи о трисекции угла, – попытки решить её в классической формулировке до сих пор не оставляют самых разных людей: от пенсионеров и студентов¹ до профессиональных учёных². Если о первых из упомянутых с удовольствием пишут газеты и научно-популярные журналы, то статьи о различных аспектах задачи о трисекции угла – математиков [1], инженеров [2] и учёных различных научных направлений [3, 4], публикуют профессиональные журналы и издания, индексируемые в национальных и глобальных базах данных. Более того, обосновывая практической необходимостью, попытки поиска приближенного решения этой задачи в настоящее время даже финансируют из государственных научных фондов [5]. Не исключено, что эти поиски отчасти стимулирует кажущаяся простота задачи – ведь как делить угол на две равные части знает каждый школьник, а инструмент для решения находится в любой готовальне. Однако можно отметить и то, что заниматься поиском решения задачи, над которой трудились не только философы-математики Древней Греции, но и Ньютон, Гаусс и многие другие выдающиеся учёные, предлагать новые варианты решения наверняка доставляет особое удовольствие.

С другой стороны, огромную роль в популяризации нескольких «великих задач древности» и стимулировании интереса к математике, геометрии, истории науки, сделало в своё время государство, создав в 1950–1980-е гг. условия для публикации ряда хорошо известных книг для школьников и студентов, посвящённых этой теме [6, 7]. Широкое информирование будущих исследователей и инженеров о существовании «неразрешимых задач» [8], стимулирование поиска их решений, играет особую роль в развитии науки и образования, так как обозначение проблемных тем ориентирует пассионарных молодых людей и зачастую даёт направление в науке и жизни. Учитывая, что для поиска решения задачи о трисекции угла необходима комбинация пространственного воображения, способности к аналитике, знание некоторых разделов математики и простой набор для черчения – такая задача является отличным объектом для творческого развития любой категории людей.

Попытки решений задачи о трисекции угла математическими методами хорошо известны. Быть может, это одна из наиболее известных исторических задач, о которых рассказывают на лекциях по математике и в популярной литературе по геометрии. Историки математики называют задачу о трисекции угла «второй древнейшей знаменитой задачей» [7, с. 225–231]. История возникновения задачи и различные

¹Бывшая учительница математики предложила решение нерешаемой задачи // Российская газета. 29 апр. 2020. URL: <https://rg.ru/2020/04/29/reg-urfo/byvshaia-uchitelnica-matematiki-predlozhila-reshenie-nereshaemoj-zadachi.html> (дата обращения: 25.10.2023); Задача Евклида // Газета Труд. 25 апр. 2002. URL: https://www.trud.ru/article/25-04-2002/39911_zadacha_evklida.html (дата обращения: 25.12.2023); Трисекция угла // Юный техник. 1994. № 12. URL: <http://nanoworld2003.narod.ru/01/DATA/TEXTS.RUS/9960228.htm> (дата обращения: 25.12.2023).

²Доллежалъ А.Н. Трисекция угла // Наука и жизнь. 1998. № 33. URL: <https://www.nkj.ru/archive/articles/10478/> (дата обращения: 25.12.2023).

варианты её решения, собранные воедино, представлены, помимо указанных выше, в нескольких монографиях [9, 10], брошюрах [11] и статьях [12, 13]. Отметим, что большинство авторов публикаций на тему трисекции угла напрямую связывают возникновение задачи с потребностями архитектуры и строительной техники [6, 14]. Декларировалось и до сих пор считается, что составление рабочих чертежей орнаментов, симметричных украшений, строительных деталей, имеющих много граней или красивых геометрических фигур, потребовало геометрического решения задачи деления угла на три равные части именно при помощи циркуля и линейки [14, с. 79–80]. Однако есть вполне обоснованное сомнение в таком историческом подходе к этой задаче, поскольку при помощи простых практических приёмов или небольших допущений к исходной формулировке, задача о трисекции угла вполне разрешима. Поэтому можно предположить, что в основе формулировки задачи лежит не практический или хозяйственный интерес, а более глубокие основания, в частности, связанные с мировоззрением философов и математиков Древней Греции и историческим ходом развития математики. Отчасти поэтому настоящая статья посвящена как истории задачи, так и некоторым другим аспектам инженерного подхода при решении задачи о трисекции угла, в том числе описанию предложенного автором алгоритма для решения задачи о трисекции угла с любой точностью.

1. Краткая история задачи и её решений

Считается, что формулирование задачи произошло в Древней Греции, примерно в V в. до н. э. В исторических хрониках зафиксировано, что греки Эллады выяснили как при помощи циркуля и линейки можно легко разделить прямой угол на три равные части – решение сводится к построению внутри угла двух равносторонних треугольников [6, с. 35–36]. Аналогичным образом и теми же средствами можно разделить на три равные части угол в 45° . Однако разделить на три части произвольный угол при помощи циркуля и линейки им не удавалось. Поэтому греческие философы-математики для решения задачи трисекции угла добавили к циркулю и линейке другие вспомогательные средства. Это не были инструменты для строительства, и, судя по её описанию и предложенной процедуре, трисекция угла не осуществлялась для иных хозяйственных целей. Считается, что первым из греков, давшим строгое решение задачи о трисекции любого острого угла, был Гиппий из Элиды (V в. до н. э.). Он изобрёл и использовал квадратрису – кривую, получаемую при движении точки по сложной дуге [8, с. 95–97]. Оказалось, что абсциссы точек квадратрисы пропорциональны соответствующим углам и простыми построениями при помощи линейки и квадратрисы можно разделить угол на три равные части. Отметим, что одновременно Гиппием был построен простой механизм для черчения этой кривой, позволявший легко делить угол на три части на практике. Продолжателем тенденции применения вспомогательных кривых для решения задачи о трисекции угла был Папп Александрийский (II в. н. э.), который в процессе решения использовал другую замечательную кривую – конхоиду Никомеда [10, с. 123–126].

Архимед, живший в III в. до н. э., предложил решить задачу при помощи подвижной линейки, на которой нужно сделать две засечки, расстояние между которыми равно радиусу проводимой окружности [11, с. 34–35]. Основная проблема решения

Архимеда не только в том, что делаются две отметки на линейке, но и в том, на что по какой-то причине до сих пор не обращали внимание – в результате Архимедом был построен угол, величиной равный трети от данного, но вне исходного угла. То есть, строго говоря, задача трисекции угла таким способом решена не была – ведь надо разделить именно исходный угол, а не строить угол, равный трети от величины исходного, вне угла. Однако, вполне вероятно, что предложенное решение послужило основой для метода вставки, автор которого остался истории неизвестным (вполне возможно, что это был Архимед), но сам метод стал известен из описания в «Началах» Евклида (кн. 1, постулаты 1, 2) [15, с. 332–333]. В методе вставки деление угла на три равные части осуществлено при помощи одной линейки без циркуля и делится искомый угол. Процедуры построения довольно просты, однако в процессе решения, как и в методе Архимеда, на линейку наносятся две метки. Учитывая, что в процессе решения линейку необходимо вращать до совмещения одной из меток с прямой, не исключено, что метод вставки дал импульс Паппу для создания своего способа, и в дальнейшем мог стимулировать многих учёных Нового времени искать решение задачи в этом направлении.

Попытки решить задачу трисекции угла другими способами продолжил в XV в. Джамшид ибн Масуд аль-Каши, персидский учёный, один из руководителей Самаркандской обсерватории. Аль-Каши предложил решение алгебраического уравнения трисекции угла в виде последовательной итерации [16]. Однако решение при помощи классического набора для черчения в виде циркуля и линейки Аль-Каши своим последователям не оставил [17, с. 301–304].

В Новое время свои решения задачи о трисекции угла предложили Декарт, Ньютон, Паскаль, Клеро и Шаль [10]. В какой-то степени эти решения можно считать продолжением идей Гиппия, Архимеда и Паппа, так как они основаны на поиске точек пересечения конического сечения с окружностью. Также отметим, что одна из используемых при построении кривых – «улитка Паскаля» – является универсальной кривой, позволяющей делить на три равные части любой произвольный угол [3, с. 33–34].

Можно отметить, что в различные исторические времена поиски решений задачи о трисекции угла стимулировала связанная с этой задачей проблема построения правильных многоугольников. Правильные многоугольники, у которых число сторон равняется 3, 4, 6, 8, 10, 16, при помощи линейки и циркуля древние греки строить умели. Но у них ничего не получалось при построении только этими инструментами правильных семи-, девяти- и одиннадцатиугольников [6, с. 41–44]. Вероятно, красота и привлекательность задачи в определённый исторический период была такой силы, что правильный семнадцатиугольник, после доказательства возможности его построения (теорема Гаусса–Ванцеля), начертил сам «король математиков» Иоганн Карл Фридрих Гаусс, который даже завещал высечь эту фигуру, вписанную в круг, на своей могиле³.

В определённой степени финальную точку в череде исторических попыток решить задачу о трисекции угла в её классической формулировке поставил французский математик Пьер Лоран Ванцель в 1837 г. Доказательство невозможности три-

³ Великие немецкие учёные. Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855). URL: <https://www.lgroutes.com/Famous/Scientific/Gauss.html> (дата обращения: 25.12.2023).

секции произвольного угла сводилось к анализу алгебраического уравнения и его корней [6, с. 24–26]. Ванцель также доказал, что при помощи циркуля и линейки трисекция угла возможна для бесконечного множества углов определённого вида $\frac{\pi}{2^n}$, где n – целое положительное число (теорема Гаусса–Ванцеля).

2. О практическом подходе к решению задачи

Обратимся теперь к практическому подходу при решении задачи о трисекции произвольного угла. Даже обыденный опыт нам показывает, что на практике особой проблемы деление угла на три равные части сложности не представляет – любой желающий может взять транспортир, угломер и даже гониометр, и спокойно построить нужный угол, который, с учётом погрешности измерения исходного угла и погрешности при построении угла величиной $1/3$ от данного, вполне может удовлетворить не только архитектора и конструктора, но даже исследователя. Вероятнее всего в Древней Греции подобный прибор для измерения углов был и активно использовался в различных ремёслах, прежде всего в строительстве. Один из таких инструментов был обнаружен в 1906 г. в Египте при раскопках дома архитектора – прибор представлял собой планку с диском, разделённым на одинаковые сектора⁴. Археологи оценивают возраст находки около 3400 лет. Древняя Греция, имевшая значительные культурные и торговые связи с Египтом, территория которого, выходящая к Средиземному морю, была колонизирована греками, наверняка знали о подобных устройствах, облегчавших строительство. В частности, в работе [18] даже утверждается, что транспортир был изобретён древнегреческим архитектором Феодором из Самоса в VII в. до н. э.

Как было отмечено выше, простые устройства в виде механизма Гиппия или способ Архимеда, не говоря уже об использовании транспортира, практичны и математически точно или точно в инженерном смысле (с погрешностью – используя, например, транспортир или гониометр) решают задачу трисекции произвольного угла. Поэтому можно сделать очевидный вывод, что отнюдь не профессиональные проблемы архитекторов, камнерезов, строителей и землемеров лежали в основе задачи. Дополнительным аргументом этого утверждения можно назвать и то, что решения Архимеда, Гиппия и других не были приняты греческим сообществом философов и математиков Эллады в качестве «решения классической задачи о трисекции угла», хотя решали задачу и были известны. Почему так произошло? На наш взгляд, причиной этого является то, что основа задачи о трисекции угла была, вероятно, сформулирована школой Пифагора и связана с мировоззренческими взглядами представителей этой школы.

Одним из направлений исканий и созидательной работы пифагорейцев было построение математики не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии, определив для геометрических величин все операции алгебры (создание геометрической алгебры) [15, с. 332–333]. Такое направление развития математики произошло после открытия в пифагорейской школе «несоизмеримых отрезков» –

⁴Обнаружен старейший в мире транспортир // Наука 21 век. URL: <http://nauka21vek.ru/archives/16838> (дата обращения: 25.12.2023).

таких, которые не могут быть выражены рациональными числами. Открытие несоизмеримости означало, что целых чисел и их отношений недостаточно для выражения отношений любых двух отрезков, а значит, с помощью одних только рациональных чисел нельзя строить метрическую геометрию [19, с. 56–57]. Поэтому пифагорейцы решили, что поскольку геометрические величины имеют «более общий характер» [20, с. 49], чем числа, в основу математики надо положить не арифметику, а геометрию. Геометрическая алгебра была изложена во II и частично в I книгах «Начал» Евклида, её основными объектами были точки, прямые, окружности, отрезки и прямоугольники [15, с. 259]. В школе Пифагора рассматривали часть этих объектов как абстрактные идеальные: точки – «то, что не имеет частей», линии – «длина без ширины», поверхности – «то, что имеет только длину и ширину» и т. д. [21, с. 131]. Геометрическая алгебра основывалась на античной планиметрии, представлявшей собой геометрию циркуля и линейки, которые входили в число символов «посвящённых пифагорейцев». Оперирование именно этими объектами и средствами их построения должно было, с точки зрения пифагорейцев, «построить математику» [15, с. 258]. Поэтому, с большой вероятностью, формулирование задачи о трисекции угла и обозначение набора доступных средств для её решения напрямую связано со школой Пифагора, взглядами на математику и методологической задачей, которую Пифагор и пифагорейцы себе поставили.

В качестве подтверждения того, что отнюдь не практико-ориентированная деятельность и сопутствующие задачи являются первопричиной многих математических открытий греков Эллады, можно привести известную историю о Фалесе Милетском [22]. Рассказ повествует о том, как Фалес измерил высоту пирамиды в Египте по размеру своей тени, и измерении расстояния до корабля в море. Как подчёркивает автор статьи об измерении расстояний в Древней Греции: «Оба этих измерения на первый взгляд относятся к "прикладной математике", и в этом смысле могут быть названы "практически полезными"; однако по некотором размышлении мы можем понять, что Фалес занимался ими совсем не ради извлечения практической пользы. Их ценность – иная: они призваны показать могущество человеческого разума, способного осуществить то, что кажется невыполнимым» [22, с. 326].

Отсюда можно сделать вывод, что исключительно по методологическим причинам использование некоторых объектов (линии, окружности, точки) и способов их построения (линейка и циркуль) было допущено пифагорейцами для решения задачи о трисекции угла. Другие способы, использующие помимо циркуля и линейки какие-либо вспомогательные средства, позволяющие на практике решить задачу трисекции угла, включающие использование двух отметок (способ Архимеда), различных кривых (способы Гиппия, Декарта, Паскаля, Голикова и др.), можно отнести к «механическим» способам деления угла [3, с. 32–33].

Здесь необходимо отметить, что в случае практического выполнения трисекции угла, даже в её классическом определении, всегда неявно использовался инструмент для рисования или черчения. Это может быть карандаш/ручка или стилос для черчения на бумаге или пергаменте, штихель или чертилка – металлический заострённый стержень – для рисования на металле, дереве или мраморе, сфокусированный луч лазера – для рисования в пространстве и т. п. В любом случае, «механический» способ, часто представляющий собой устройство из реек, шарниров, отвесов

и т. д. [14, с. 80–82], – это только часть, разновидность более общего инженерного подхода. Поэтому, на наш взгляд, в данном случае более точным является термин «инженерный способ» деления угла.

Таким образом, когда мы имеем дело с абстракциями при геометрических построениях – объектах математики пифагорейцев – плоскости, не имеющей кривизны, прямых линий и окружностей, не имеющих толщины, делений и меток, и проводимых при помощи линейки и циркуля – инструментов построения этих объектов, – то задача о трисекции угла не может быть решена (теорема Гаусса–Ванцеля). Однако если мы используем инженерный способ деления угла, то задача не только вполне разрешима, но имеет и математически и технически точное решение (способы Архимеда, Гиппия, Декарта, Паскаля, Голикова, Рассохина и др.).

Изменение начальных правил задачи – возможности нанесения двух меток на линейке – позволило Архимеду решить задачу. В качестве примера покажем, как использование другого фактора инженерного подхода – наличие толщины проводимой линии у любого инструмента для черчения – легко решает задачу о трисекции угла и математически, и технически (решение предложено автором настоящей статьи). Попытки решить задачу при помощи итераций предпринимались ранее в Новое время [23] и в настоящее – например, [5], – однако методологически они представляют собой довольно громоздкие конструкции из алгебраических вычислений и геометрических построений. Предложенный нами метод исключительно прост, так как при построении угла величиной $1/3$ данного используется алгоритм построения последовательности, состоящей из биссектрисы исходного угла и биссектрис новых углов, имеющих пределом искомый угол. После выполнения построения обсудим гипотетическую возможность решения задачи о трисекции угла предложенным способом философами-математиками Древней Греции.

3. Простой инженерный способ решения задачи

Методологическая простота алгоритма предлагаемого решения состоит в возможности проведения биссектрисы угла, используя только циркуль и линейку, что соответствует классической формулировке задачи о трисекции угла.

Ещё раз уточним, что «инженерность» решения состоит в реальности начертания линий циркулем и по линейке любым инструментом: карандашом, ручкой, древнегреческим стилосом, тростниковой палочкой с чернилами или любым другим способом. То есть условие «инженерности» означает, что лучи, образующие углы, имеют некоторую толщину, так как они нарисованы при помощи какого-нибудь реального инструмента. Предложенный алгоритм позволяет и математически решить задачу построения угла с любой точностью – в нашем конкретном случае предел точности задаётся параметрами устройства для черчения линий.

Сначала представим геометрические построения и математическое обоснование предлагаемого метода. Итак, рассмотрим произвольный угол величиной α , с вершиной в точке O , образованный лучами OA_1 и OA_2 .

Задача состоит в построении угла величиной в три раза меньше угла A_1OA_2 , используя только циркуль и линейку, а также любой инструмент для черчения линий. Последнее условие, всегда неявно присутствовавшее в этой задаче, сформулирован-

ной древнегреческими геометрами, будучи актуализировано, придаёт ей инженерный, а не только геометрический смысл. Процесс построения состоит из последовательности повторяющихся шагов, представленных ниже и состоящих в проведении биссектрис углов, имеющих пределом искомый угол. Количество шагов определяется свойствами устройства для черчения – мы находим приближенное решение задачи с любой точностью.

1. Из вершины угла точки O проводим окружность произвольного радиуса R . Точки пересечения лучей OA_1 и OA_2 с окружностью обозначим B_1 и B_2 . Определяем биссектрису угла A_1OA_2 простым известным способом – из точек B_1 и B_2 проводим окружности радиусом большим R (на рис. 1 обозначены фрагменты окружностей). Затем через точку пересечения этих окружностей B'_3 проводим луч OB_3 , являющийся биссектрисой угла $\angle A_1OA_2$, здесь точка B_3 – точка пересечения окружности радиусом R и проводимого луча. Соответственно, величины углов $\angle B_1OB_3$ и $\angle B_3OB_2$ равны, также равны величины дуг B_1B_3 и B_3B_2 .

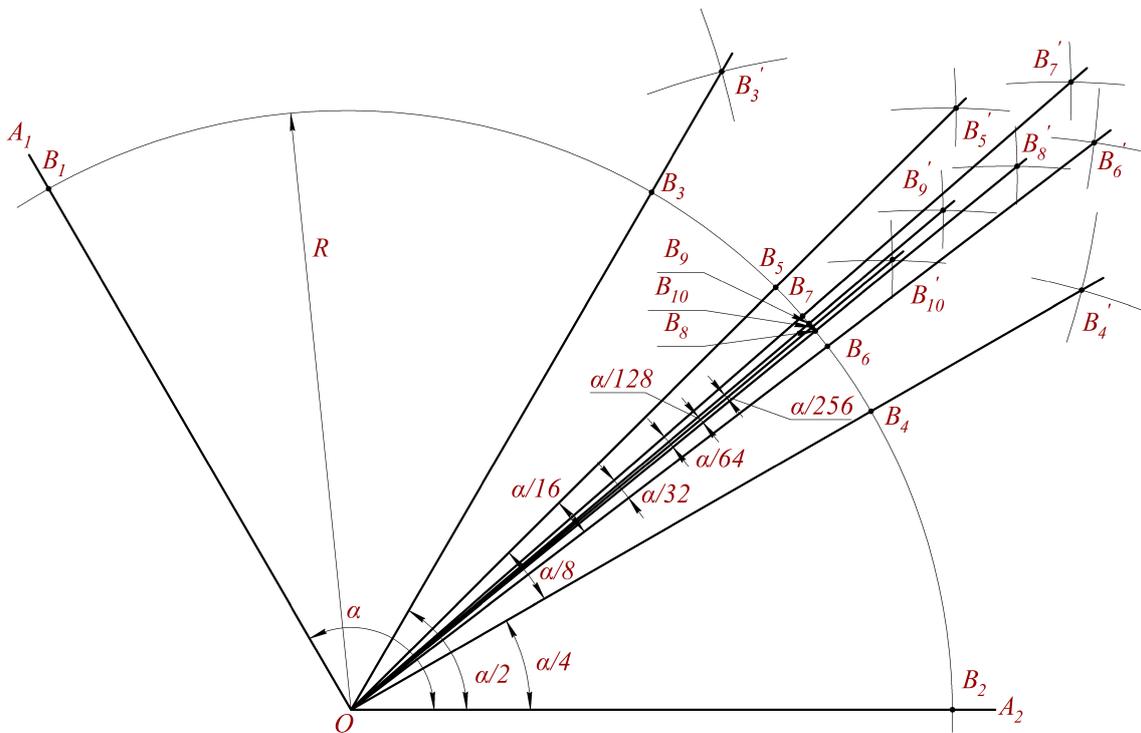


Рис. 1. Процедура построения угла в три раза меньше исходного (описание в тексте)

2. Таким же способом определяем биссектрису угла $\angle B_3OB_2$: из точек B_3 и B_2 проводим окружности (или их фрагменты), пересекающиеся в секторе B_3OB_2 ; через точку пересечения окружностей B'_4 проводим луч OB_4 , являющийся биссектрисой угла $\angle B_3OB_2$, здесь точка B_4 – точка пересечения биссектрисы этого угла с дугой B_3B_2 . Соответственно, величины углов $\angle B_3OB_4$ и $\angle B_4OB_2$ равны, равны и величины дуг B_3B_4 и B_4B_2 .

Далее по тексту при построении следующих биссектрис мы не будем указывать на вспомогательные точки $B'_4, B'_5, B'_6, B'_7, B'_8, B'_9, B'_{10}$, полученные при пересечении вспомогательных окружностей или их фрагментов, хотя они обозначены на рис. 1.

3. Третий шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_3OB_4$ с точкой B_5 – точкой пересечения биссектрисы этого угла с дугой B_3B_4 – она делит дугу B_3B_4 пополам.

4. Четвёртый шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_5OB_4$ с точкой B_6 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_5B_4 пополам.

5. Пятый шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_5OB_6$ с точкой B_7 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_5B_6 пополам.

6. Шестой шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_7OB_6$ с точкой B_8 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_7B_6 пополам.

7. Седьмой шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_7OB_8$ с точкой B_9 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_7B_8 пополам.

8. Восьмой шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_9OB_8$ с точкой B_{10} – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_9B_8 пополам.

И так далее по необходимости – последовательность процесса построения биссектрис понятна и проста. Подчеркнём ключевую особенность при построении, состоящую в том, что после проведения очередной биссектрисы выбирается левый или правый угол через один шаг, что в итоге влияет на предел последовательности, см. ниже.

Очевидно, что возможности для дальнейшего построения биссектрис и на рис. 1, и на рис. 2, представляющем собой масштабирование зоны пересечения биссектрис с окружностью R рис. 1, остаются и в дальнейшем.

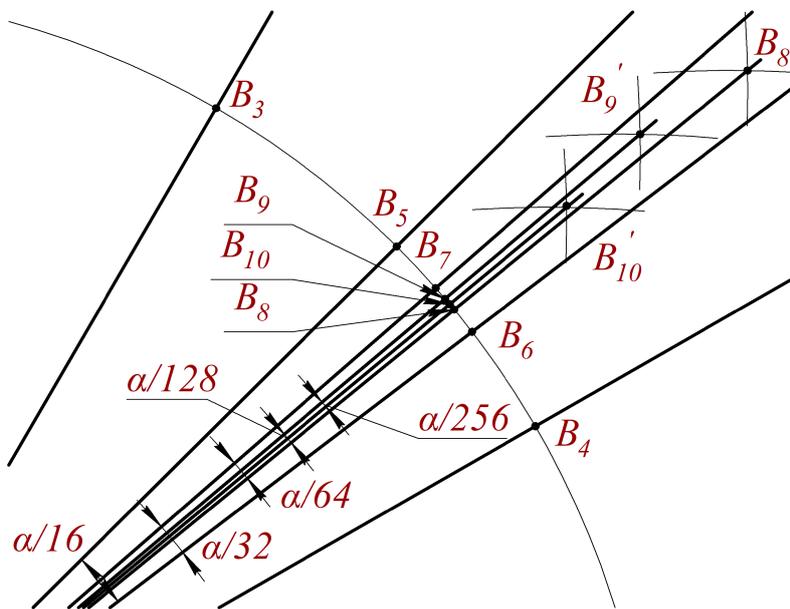


Рис. 2. Масштабирование зоны пересечения биссектрис с окружностью R рис. 1

Однако, очевидно, что все проводимые далее биссектрисы будут располагаться между точками B_9 и B_{10} , см. рис. 2 и 3. Несмотря на увеличение масштаба, видно, что на рис. 2 точки практически «соприкасаются» друг с другом. Поэтому остановимся в процессе черчения и определим величины образуемых углов и соответствующих дуг, а также предел обозначенной последовательности.

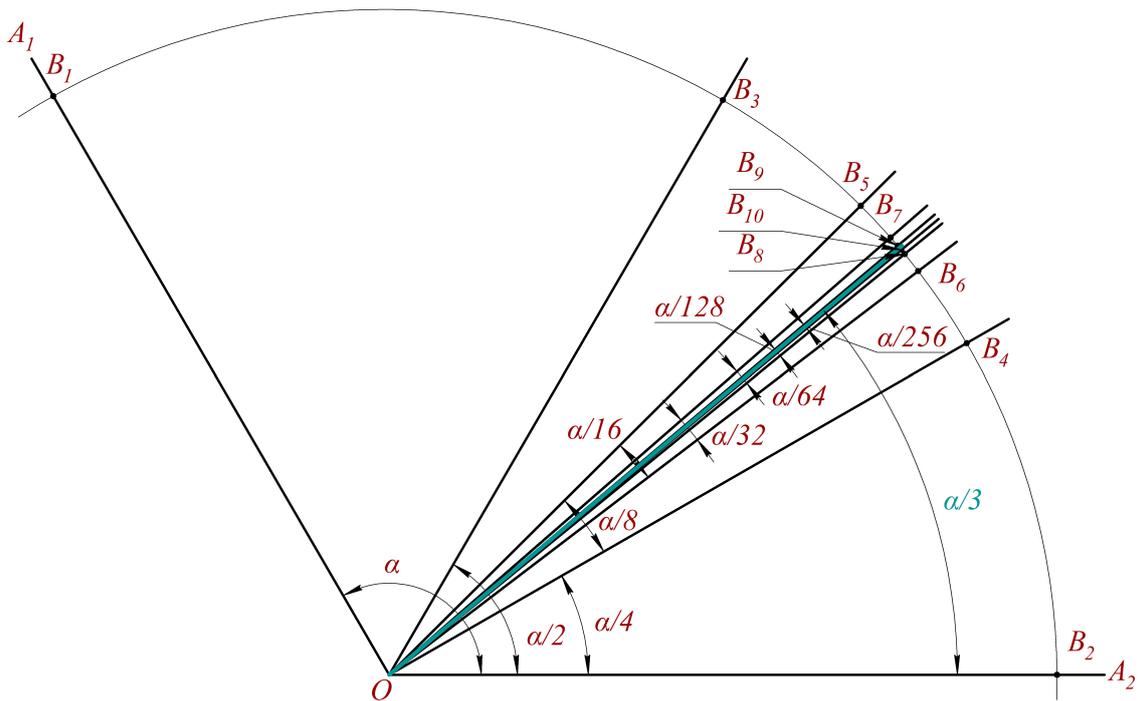


Рис. 3. Зона расположения последующих биссектрис после восьмого шага построений (расположена между точками B_9 и B_{10} , выделена зелёным цветом)

Очевидно, что исходя из процедуры построения биссектрис, делящих углы на две равные части, если принять угол $\angle B_1OB_2 = \alpha$, то угол $\angle B_3OB_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\angle B_4OB_2 = \frac{\alpha}{4}$, $\angle B_5OB_4 = \frac{\alpha}{8}$, $\angle B_5OB_6 = \frac{\alpha}{16}$, $\angle B_7OB_6 = \frac{\alpha}{32}$, $\angle B_7OB_8 = \frac{\alpha}{64}$, $\angle B_9OB_8 = \frac{\alpha}{128}$, $\angle B_9OB_{10} = \frac{\alpha}{256}$ и т. д.

Определим предел суммы последовательности величин углов, складывающихся при выполнении предложенного алгоритма построения углов, см. рис. 1 и рис. 2. Здесь необходимо учесть указанную выше ключевую особенность – при построении величины некоторых углов увеличивают суммарный угол, добавляемый к углу $\angle B_4OB_2 = \frac{\alpha}{4}$, так как берутся углы, лежащие слева от биссектрисы, образующей два новых угла.

Другие же уменьшают суммарный угол, так как берутся углы, лежащие справа от биссектрисы, образующей два новых угла, т. е. вычитаются из общей суммы. Исходя из процедуры построения, мы имеем следующую последовательность, сумму которой мы хотим вычислить, чтобы определить величину предела построения углов:

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} - \frac{\alpha}{16} + \frac{\alpha}{32} - \frac{\alpha}{64} + \frac{\alpha}{128} - \frac{\alpha}{256} \dots \tag{1}$$

Если принять $\frac{\alpha}{8} = \alpha_1$ за первый член геометрической прогрессии, и учитывая, что знаменатель прогрессии $\left(-\frac{1}{2}\right)$, то очевидно, что n -й член этой геометрической прогрессии:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ и } \alpha_n = \alpha_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad (2)$$

Соответственно, сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии [24, с. 58]

$$S_n = \alpha_1 \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}. \quad (3)$$

Очевидно, что предел S суммы членов прогрессии S_n [24, с. 58]:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha_1 \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\alpha}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{\alpha}{12}. \quad (4)$$

Итого величина предела последовательности (1) будет равна $\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{12} = \frac{4\alpha}{12} = \frac{\alpha}{3}$.

Таким образом, пределом построений будет угол, величина которого будет в три раза меньше величины исходного произвольного угла α .

Аналогичные построения и вычисления можно сделать для второй половины угла $\angle A_1OA_2$ – угла $\angle B_1OB_3$. Поэтому можно построить не только угол в три раза меньше данного, но и три равные части исходного угла $\angle A_1OA_2$.

Принимая во внимание сделанные выше расчёты и рассуждения, перейдём от геометрических построений и математических расчётов к инженерным и вычислим величины дуг, образуемых в процессе этих построений. Учитывая размер листа формата А4, вычислим величины образуемых дуг для угла 120° и радиусом $R = 100$ мм (величины взяты для простоты расчётов), а также учтём, что толщина карандаша и грифеля циркуля находится в диапазоне 0,5–1 мм. Эти размеры для построения вполне адекватны и современным, и тем более тем, что были у писцов и инженеров в Древней Греции, так как, согласно описанию Плиния, папирус греческого периода был ограничен стандартными размерами: 47 см в длину (29–33 см в среднем) и 22 см в ширину⁵ – фактически это размеры листа формата А4. Рисовали и писали заострённой расщеплённой тростниковой палочкой чернилами из сажи и масла. Сажу получалась при сжигании виноградных и плодовых косточек, мягкой древесины, виноградной лозы⁶. Толщина проводимых линий была в лучшем случае около 1 мм.

Итак, длина дуги B_1B_2 , рис. 1, опирающейся на угол $\alpha = 120^\circ$ и являющейся частью окружности радиусом $R = 100$ мм, определяется известным выражением

⁵Бумага в Древнем Египте. URL: <http://www.ktopridumal.ru/srednie-veka/bumaga/bumaga-v-drevnem-egipte/> (дата обращения: 25.12.2023).

⁶Васильев В.Г. Из истории пишущих принадлежностей. URL: http://cdokp.tstu.tver.ru/site2/site/about_books_4.htm (дата обращения: 25.12.2023).

$L = \frac{\pi R \alpha}{180}$ и равна после подстановки этих значений 209,33 мм.

После последовательного деления угла пополам, а затем ещё раз, в такой же пропорции уменьшается и длина дуги: длина дуги L_1 , опирающейся на угол $\frac{\alpha}{4}$, равна 52,33 мм (вводим нумерацию дуг для подсчёта шагов), длина дуги $L_2 \left(\frac{\alpha}{8}\right) = 26,17$ мм, и далее $L_3 \left(\frac{\alpha}{16}\right) = 13,08$ мм, $L_4 \left(\frac{\alpha}{32}\right) = 6,54$ мм, $L_5 \left(\frac{\alpha}{64}\right) = 3,27$ мм, $L_6 \left(\frac{\alpha}{128}\right) = 1,64$ мм, $L_7 \left(\frac{\alpha}{256}\right) = 0,82$ мм, $L_8 \left(\frac{\alpha}{512}\right) = 0,41$ мм.

Таким образом, уже на седьмом-восьмом шаге приближений, что было продемонстрировано на рис. 1 и 2, все дальнейшие начерченные линии в этом примере совпадают друг с другом, и мы получаем точное в инженерном смысле построение угла в три раза меньше исходного. При указанных выше параметрах чертёжного инструмента выполнить построение точнее невозможно.

Поэтому, возвращаясь к рис. 1, проведение линии, толщиной равной величине дуги B_9B_{10} , сделанное на рис. 3, и является построением угла в три раза меньше исходного произвольного угла, см. рис. 4.

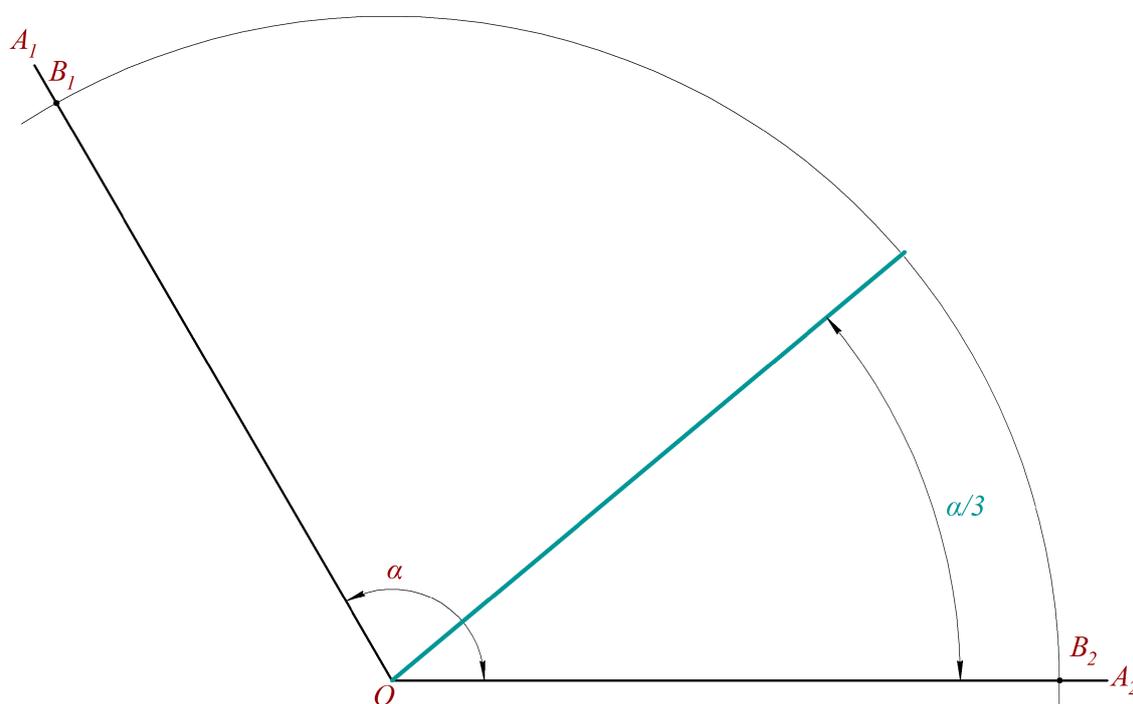


Рис. 4. Итоговый рисунок построения угла в три раза меньше данного, полученный из рис. 3 после того, как были убраны все вспомогательные построения (точки, дуги, линии)

Если же, как древнегреческие философы-математики, мы решим рисовать на песке, используя стилос, который в процессе черчения оставляет линию толщиной

1–2 мм (в реальности больше), при размерах вспомогательного радиуса 1 м и величине угла те же 120° , то начерченные линии совпадают друг с другом уже на 10-м шаге построений.

Используя современные технические средства, можно начать рисовать электронным лучом. Тогда, принимая размер классического радиуса электрона за величину $2,8 \cdot 10^{-15}$ м [24, с. 340], несложно посчитать, что для угла 120° и при величине вспомогательного круга радиусом 1 м после 50-го шага приближений дальнейшее черчение становится не нужным и даже невозможным, и мы получим сверхточное построение угла в три раза меньше данного.

Предложенный алгоритм построения угла в три раза меньшего исходного использует исключительно циркуль, линейку и предмет для черчения, имеющий конечную толщину, делит на три части именно исходный угол, применим для угла любого размера, содержит конечное число процедур. Таким образом, вопрос о построении угла в три раза меньше данного, используя линейку, циркуль и любой чертёжный инструмент, можно считать закрытым. Мы получили приближенное решение задачи о трисекции угла, которое можно выполнить при помощи циркуля и линейки с любой точностью.

Обладая небольшим навыком в черчении, заключающимся в опыте проведения линий и фрагментов окружностей, описанные выше восемь шагов алгоритма построения можно выполнить в пределах нескольких минут. Учитывая, что некоторые современные программы черчения и моделирования (например, хорошо известный отечественный программный продукт «Компас 3D», при помощи которого сделаны рис. 1–4) обладают возможностью автоматически рисовать биссектрису любого угла, процесс определения угла в три раза меньше искомого, используя предложенный выше алгоритм, можно выполнить вручную меньше чем за минуту.

4. Заключение, или Ещё раз об истории задачи

В связи с относительно несложным алгоритмом, используемым в данном случае при решении задачи, возникает вопрос: могли ли греческие философы-математики Эллады решить задачу о трисекции угла подобным образом? Ведь придуманные ими для решения задачи о трисекции угла квадратрисса и другие кривые третьего и четвёртого порядка на первый взгляд сложнее и необычнее, чем приёмы, использованные при решении этой задачи, как в данном случае, так и во многих других случаях, описанных выше. Здесь необходимо отметить, что термин «последовательность» уже был в ходу у неоплатоников и подразумевал совокупность предметов (включая числа), следующих друг за другом и «связанных отношениями порождения или изливающимися из одного источника» [15, с. 732]. Также был развит метод исчерпывания, разработку которого осуществил Евдокс Книдский (V–IV вв. до н. э.), который неявно включает понятие предела (Евклид изложил теорию метода исчерпывания в X книге «Начал»). Таким образом, математическая основа для решения задачи предложенным нами способом у греков Эллады была. Однако, на наш взгляд, отрицательную роль в процессе получения положительного результата при решении задачи о трисекции угла могла играть сформулированная пифагорейцами концепция математики, ограничивающая совокупность инструментов и приёмов при решении

задачи («слабость геометрической алгебры» [20, с. 49–50]), а также особенность используемых при этом терминов. Поясним ещё раз этот вывод подробнее.

Введение и распространение идеи доказательства в математике в целом традиционно связывают с Пифагором и его школой [21, с. 130–135]. Историки математики также считают, что в геометрию дедуктивный метод и методологию доказательства привнёс выдающийся греческий философ Фалес из Милета, который по воспоминаниям его современников, после поездки в Египет перенёс эту методологию в Грецию [15, с. 231]. Тем не менее, вероятнее всего, постановка проблемы деления заданного угла на три равные части была сформулирована в начале так называемого «Золотого века» Греции самим Пифагором или представителями школы Пифагора, когда только складывались основы формализованного языка математики (геометрии). Именно тогда стало возникать понимание, что математика оперирует идеальными объектами – возникающими в воображении человека, поэтому прямая линия не имеет толщины, плоскость – кривизны и т. п. В наиболее яркой форме эти идеи были сформулированы Платоном и его последователями [20, с. 50–55]. Возможно, что в исторический момент формулирования задачи о трисекции угла старые термины ещё использовались и были в ходу, иначе мы бы увидели в тексте формулировки задачи не термины «линейка» и «циркуль», а «прямая» и «окружность» или их аналоги.

Дополнительно может быть верным предположение, высказанное выше в тексте и состоящее в следующем. Формулирование пифагорейцами задачи о трисекции угла, вероятно, происходило после открытия несоизмеримых отрезков, которое привело к революции в их мировоззрении, пересмотру существовавших тогда концепций математики и заложило основы геометрической алгебры. Инструментами геометрической алгебры у пифагорейцев были циркуль и линейка, при помощи которых чертили объекты новой алгебры – прямые, окружности, прямоугольники и т. п. Предполагалось, что при помощи этих объектов может быть решена любая задача на построение. Поэтому, в соответствии с методологией пифагорейцев, при решении геометрической задачи необходимо использовать только эти объекты и инструменты, что, вероятно, повлияло на строгую формулировку задачи о трисекции угла и ограничения при построении. В связи с этим в историческом плане удивительно то, что традиция формулировать поиск решения задачи о трисекции угла только при помощи циркуля и линейки, отклоняя при этом многочисленные возможности инженерного подхода (использование засечек, шкалы, дополнительных кривых, толщины проводимых линий и т. п.) осталась в среде математиков и поддерживалась неизменной на протяжении последних 2,5 тысячелетий.

Благодарности

Автор благодарен старшему преподавателю Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана Александру Анатольевичу Корнееву, сделавшему рисунки.

Литература

1. Chang W.D., Gordon R.A. Trisecting angles in Pythagorean triangles // Amer. Math. Monthly. 2014. Vol. 121, № 7. P. 625–631.
2. Рассохин Г.Н., Кондаков С.Е. Способ построения хорды искомого угла при трисекции заданного // Известия Института инженерной физики. 2022. № 2 (64). С. 69–72.
3. Голиков В.П. Механический способ решения задачи трисекции угла // Двойные технологии. 2011. № 2 (55). С. 32–35.
4. Demaine E.D., O'Rourke J. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedral. Cambridge Univ. Press, 2007. P. 31–33.
5. Байбеков С.Н., Алтынбек С.А., Тургинбаева А.С. Разработка методики трисекции произвольного угла с заданной точностью // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан. 2022. № 4 (86). С. 116–129.
6. Чистяков В.Д. Три знаменитые задачи древности. М.: Гос. учеб.-пед. изд-во, 1963. 94 с.
7. Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. М.: ГИФМЛ, 1958. Вып. XI. С. 225–438.
8. Шрейдер С.Н. Три задачи древней геометрии // Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе. М.: Учпедгиз, 1955. С. 87–100.
9. История математики. С древнейших времён до начала Нового времени / под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. Т. 1. 354 с.
10. Белозёров С.Е. Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1975. 320 с.
11. Прасолов В.В. Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура куба. М.: Наука, 1992. 80 с. (Популярные лекции по математике. Вып. 62)
12. Шрубко Л.А. Трисекция угла // Известия Академии наук Казахской ССР. 1952. № 115. Серия геологическая. Вып. 12. С. 99–103.
13. Щетников А.И. Как были найдены некоторые решения трёх классических задач древности? // Математическое образование. 2008. № 4 (48). С. 3–15.
14. Храмовских М.А. Трисекция угла как хорошо забытый инструмент в строительстве и благоустройстве зданий // Материалы XI Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный Форум 2019». Физико-математические науки. Научное обозрение. 2019. № 4. С. 79–83.
15. Ловецкий Г.И. Философия и математика: высшие идеи и числа в Древнем мире и античности. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 756 с.
16. Матвиевская Г.П., Розенфельд Б.А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII–XVII вв.). Кн. 3. М.: Восточная литература, 1983. 372 с.
17. Юшкевич А.П. История математики в Средние века. М.: Физматгиз, 1961. 448 с.
18. Каргин Д.И. Очерк истории развития чертёжных инструментов // Труды Института истории естествознания и техники. М., 1959. Т. 25. С. 270–310.
19. Яшин Б.Л. Математика в контексте философских проблем: учеб. пособие. М.: МПГУ, 2012. 110 с.
20. Яшин Б.Л. Пифагореизм и платонизм в математике: история и современность // Философская мысль. 2018. № 5. С. 47–61.
21. Еровенко В.А., Михайлова Н.В. Роль Пифагора и его школы в философском идеале нового математического знания // Математические структуры и моделирование. 2022. № 4 (64). С. 129–139.

22. Щетников А.И. Измерение астрономических расстояний в Древней Греции // Философское антиковедение и классическая традиция. 2010. Т. 4. С. 325–348.
23. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: ГИФМЛ, 1960. 468 с.
24. Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Краткий физико-математический справочник. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. 368 с.

ON SOME ASPECTS OF ENGINEERING SOLUTION TO THE ANGLE TRISECTION PROBLEM: HISTORY AND NEW SOLUTION ALGORITHM

A.V. Skazochkin

PhD (Phys.-Math.), PhD (Techn.), e-mail: avskaz@rambler.ru

Kryokon LLC, Kaluga, Russia

Abstract. The article is devoted to the history of the formulation and solution of the problem of trisection of an angle - dividing an angle into three equal parts using a compass and a ruler, which has a history of more than 2.5 thousand years. Traditionally, the origins of the problem were associated with the practical activities of masters and artisans of Ancient Greece, but it is known that with the help of simple practical techniques or small assumptions in the original formulation, the problem is completely solvable. It is shown that the problem of angle trisection is based not on practical interest, but on deeper grounds related to the worldview of the philosophers and mathematicians of Hellas and the historical course of development of mathematics. In particular, with the methodological work of representatives of the Pythagorean school, who created geometric algebra with objects in the form of lines, circles and tools for their construction - compasses and rulers. On the other hand, the engineering approach, the origins of which are also located in Ancient Greece, allowing in the solution process the use, in addition to compasses and rulers, notches, scales, additional curves and any drawing tool that creates a finite thickness of drawn lines, allows us to solve the problem of trisection of an angle. As an example of an engineering approach to the problem of trisection of an angle, the original solution of the author of the article is given, using a compass, a ruler and a drawing object having a finite thickness. The proposed algorithm makes it possible to mathematically solve the problem of trisection of an angle with any accuracy. From a historical perspective, it is surprising that the tradition of formulating the search for a solution to the problem of trisection of an angle only with the help of a compass and a ruler, while rejecting numerous possibilities of the engineering approach, remained and was supported by all subsequent generations of mathematicians for 2.5 thousand years until the present day.

Keywords: trisection of an angle, mathematics in Ancient Greece, Pythagorean school, geometric algebra, worldview, history of mathematics, engineering approach, mechanical method, compass, ruler, bisector, algorithm, solution to the problem of trisection of an angle.

Дата поступления в редакцию: 20.05.2024

АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ВИБРОТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ОДНОМАССНОЙ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ СЛОЯ ГРУЗА ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ГРУЗОНЕСУЩЕГО ОРГАНА

А.В. Архипенко

к.т.н., e-mail: andrei-arhipenko@mail.ru

Международный инновационный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Рассмотрено движение упруго-вязко-пластичной модели груза по наклонному грузонесущему органу. Показано, что эффективность вибротранспортирования тонкоизмельчённых сыпучих материалов определяется не только параметрами вибрации, но и весьма существенно зависит от свойств слоя груза и внешних сопротивлений. Выявлено, что формула для определения скорости вибротранспортирования материальной частицы с полученными численными значениями коэффициента передачи горизонтальной составляющей скорости, применимая для зернистых материалов с хорошей воздухопроницаемостью, может быть использована и для определения скорости виброперемещения тонкоизмельчённых сыпучих материалов посредством введения поправочного коэффициента, учитывающего влияние упруго-гистерезисных свойств груза и аэродинамических сопротивлений на момент отрыва груза от грузонесущей поверхности и продолжительность этапа полёта.

Ключевые слова: упруго-вязко-пластичная модель, вибротранспортирование, сыпучий материал, параметры вибрации, коэффициент передачи скорости, упруго-гистерезисные свойства, аэродинамические сопротивления, массовый груз, сдвиг фаз, прямолинейные гармонические колебания, характеристическое уравнение, апериодический характер, трансцендентное уравнение, коэффициент режима работы, виброповерхность.

Экспериментальные исследования [1] показывают, что при вибротранспортировании массовых грузов значения скорости виброперемещения, полученные опытным путём, существенно отличаются от расчётных значений, вычисленных на основе представления груза в виде материальной частицы (особенно для тонкоизмельчённых сыпучих материалов). При исследованиях [2–4] было обнаружено, что при вибротранспортировании массовых грузов (большим слоем) в безотрывных режимах работы наблюдается сдвиг фаз между максимумом нормальной реакции на рабочий орган и максимумом ускорения рабочего органа. Это свидетельствует о наличии у слоя упругих и вязких свойств и, следовательно, о недопустимости исследования процессов вибротранспортирования тонкоизмельчённых сыпучих материалов, представляя груз материальной частицей.

Применение упруго-вязко-пластичной модели позволяет в качественном и количественном отношении моделировать физические процессы, происходящие при виброперемещении тонкоизмельчённых сыпучих материалов и получать при этом удовлетворительную сходимость расчётных и экспериментальных значений [5, 6].

Рассмотрим движение упруго-вязко-пластичной модели груза (рис. 1) по грузонесущему органу, наклонённому под углом α к горизонту и совершающему прямолинейные гармонические колебания по закону [7]:

$$\begin{cases} y' = A \sin (\alpha + \beta) \sin \omega t; \\ x' = A \cos (\alpha + \beta) \sin \omega t, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{y}' = A\omega \sin (\alpha + \beta) \cos \omega t; \\ \dot{x}' = A\omega \cos (\alpha + \beta) \cos \omega t, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \ddot{y}' = -A\omega^2 \sin (\alpha + \beta) \sin \omega t; \\ \ddot{x}' = -A\omega^2 \cos (\alpha + \beta) \sin \omega t, \end{cases} \quad (3)$$

где $x', y', \dot{x}', \dot{y}', \ddot{x}', \ddot{y}'$ – перемещение, скорость и ускорение грузонесущего органа по оси OX и OY соответственно; A – амплитуда колебаний, м; ω – частота колебаний; β – угол вибрации; t – текущее время, сек.

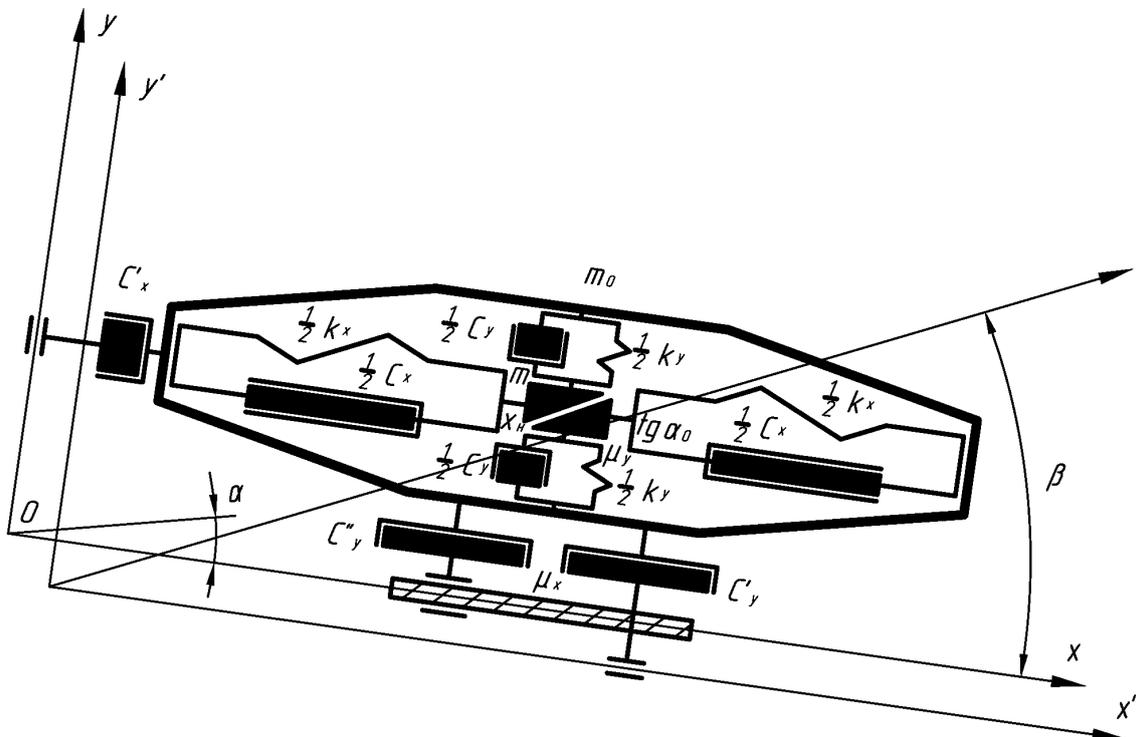


Рис. 1. Движение упруго-вязко-пластичной модели груза по грузонесущему органу: k_x, k_y – упругие элементы; C_x, C_y – внутренние вязкие элементы; C_x', C_y', C_x'' – внешние вязкие связи; m – масса ядра модели; m_0 – масса рамки модели; X_n – начальная упругая деформация; $\operatorname{tg} \alpha_0$ – параметр пористости слоя; μ_x, μ_y – коэффициенты внешнего и внутреннего трения

Дифференциальные уравнения движения модели будут:

– на участке совместного движения (*):

$$\ddot{y} + 2n_y^* \dot{y} + p_y^2 y = -g \cos \alpha + A\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_y'^* A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t; \quad (4)$$

$$\ddot{x} + 2n_x^* \dot{x} = g \sin \alpha + A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_x'^* A\omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t - \operatorname{sgn}(\dot{x}) \mu \left[p_y^2 y + 2n_y^* \dot{y} - 2n_y'^* A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t \right]; \quad (5)$$

– на участке свободного движения:

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} = -g \cos \alpha + A\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_y' A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t; \quad (6)$$

$$\ddot{x} + 2n_x \dot{x} = g \sin \alpha + A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_x' A\omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t, \quad (7)$$

где

$$2n_y^* = \frac{C_y' + C_y''^*}{m}; 2n_y'^* = \frac{C_y''^*}{m}; p_x^2 = \frac{k_x}{m}; p_y^2 = \frac{k_y}{m}; 2n_x^* = \frac{C_x' + C_x''^*}{m};$$

$$2n_x'^* = \frac{C_x''^*}{m}; 2n_y = \frac{C_y' + C_y''}{m}; 2n_y' = \frac{C_y''}{m}; 2n_x = \frac{C_x' + C_x''}{m}; 2n_x' = \frac{C_x''}{m}.$$

В зависимости от свойств груза n_y^* , $n_y'^*$ и p_y на участке совместного движения в направлении оси y будут устанавливаться различные режимы движения, и, соответственно, уравнение (4) будет иметь различные решения. Форма решения определяется соотношением параметров n_y^* , p_y и видом корней характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 2n_y^* \lambda + p_y^2 = 0. \quad (8)$$

Корни уравнения:

$$\lambda_1 = -n_y^* + \sqrt{n_y^{*2} - p_y^2}; \lambda_2 = -n_y^* - \sqrt{n_y^{*2} - p_y^2}. \quad (9)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения возможны три случая движения упруго-вязко-пластичной модели движения груза:

– если $p_y > n_y^*$ (сопротивления малы по сравнению с упругостью), движение носит колебательный характер;

– если $p_y < n_y^*$ (сопротивления преобладают над упругостью), устанавливается аperiodическое движение;

– если $p_y = n_y^*$ (сопротивления равны силам упругости), будет иметь место предельное аperiodическое движение.

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования [8], в процессе вибрационного транспортирования движение насыпных грузов вследствие

больших внутренних сопротивлений носит преимущественно аperiodический характер. Речь идёт об аperiodическом характере упругих колебаний модели слоя груза в направлении оси лишь на участке совместного движения. В целом движение груза в процессе вибротранспортирования является периодическим. Решение будем искать с учётом собственных колебаний модели. При $p_y < n_y^*$ решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = A \sin(\alpha + \beta) \left[K_1 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + K_2 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + C_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + D_1 \right]; \quad (10)$$

$$\dot{y} = A \omega \sin(\alpha + \beta) \left[\frac{\aleph_{1y}^*}{z} K_1 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + \frac{\aleph_{2y}^*}{z} K_2 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + C_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \right], \quad (11)$$

где z – коэффициент расстройки ($z = \frac{\omega}{p_y}$); ν_y^* – коэффициент демпфирования ($\nu_y^* = \frac{n_y^*}{p_y}$); K'^* – коэффициент, характеризующий удельный вклад сопротивлений, пропорциональных абсолютной и относительной скорости движения модели слоя груза ($K'^* = \frac{n'^*}{n^*}$);

$$\aleph_{1y}^* = -\nu_y^* + \sqrt{\nu_y^{*2} - 1}; \aleph_{2y}^* = -\nu_y^* - \sqrt{\nu_y^{*2} - 1}; B_1 = \frac{z^2(1-z^2) - 4\nu_y^{*2}K'^*}{(1-z^2) + 4\nu_y^{*2}z^2};$$

$$C_1 = \frac{-2\nu_y^*z[K'^*(1-z^2) + z^2]}{(1-z^2)^2 + 4\nu_y^{*2}z^2}; D_1 = -\frac{z^2}{K_p}; K_p = \frac{A\omega^2 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha}.$$

Постоянные интегрирования K_1 и K_2 определяются исходя из начальных условий совместного движения груза.

Совместное движение груза начинается при пуске вибрационной машины, т. е. в момент времени $t_H = 0$. При этом груз лежит на грузонесущем органе, сформировав упругую связь K_y на величину $y_{ст} = mg/K_y$. Таким образом, начальными условиями для первого цикла движения груза будут: $t_H = 0, y(t_H) = mg/K_y, \dot{y}(t_H) = 0$.

Для начальных условий, соответствующих второму и последующим циклам движения: $t = t_n, y(t_n) = y_n, \dot{y}(t_n) = \dot{y}_n$.

$$K_1 = \frac{-z\dot{\xi}_{ny} - (zB_1 - \aleph_{2y}^*C_1) \cos \omega t_n - (\aleph_{2y}^*B_1 + zC_1) \sin \omega t_n - \aleph_{2y}^*D_1}{\aleph_{2y}^* - \aleph_{1y}^*};$$

$$K_2 = \frac{z\dot{\xi}_{ny} - (zB_1 - \aleph_{1y}^*C_1) \cos \omega t_n + (\aleph_{1y}^*B_1 + zC_1) \sin \omega t_n - \aleph_{1y}^*D_1}{\aleph_{2y}^* - \aleph_{1y}^*},$$

где $\dot{\xi}_{ny}$ – безразмерная относительная скорость груза в направлении оси Y в момент падения на грузонесущий орган, равная

$$\dot{\xi}_{ny} = \frac{\dot{y}_n}{A\omega \sin(\alpha + \beta)}.$$

Нормальная реакция груза на поверхность грузонесущего органа:

$$N^* = mA\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \left[-\frac{1}{K_p} + u_1 \cos \omega t + u_2 \sin \omega t + u_3 e^{\frac{N_{1y}^*}{z}\omega(t-t_n)} + u_4 e^{\frac{N_{2y}^*}{z}\omega(t-t_n)} \right], \quad (12)$$

где

$$u_1 = \frac{-2\nu_y^* z [K^{1*} (1 - K^{1*}) z^2]}{(1 - z^2)^2 + 4\nu_y^{*2} z^2}; \quad u_2 = \frac{-z^2 (4\nu_y^{*2} K^{1*} - 1) + 1}{(1 - z^2)^2 + 4\nu_y^{*2} z^2};$$

$$u_3 = \frac{(2\nu_y^* N_{1y}^* + 1) \left[\frac{z^2 N_{2y}^*}{K_p} - z\dot{\xi}_{ny} + (zB_1 + N_{2y}^* C_1) \cos \omega t_n - (N_{2y}^* B_1 + zC_1) \sin \omega t_n \right]}{z^2 (N_{2y}^* - N_{1y}^*)};$$

$$u_4 = \frac{(2\nu_y^* N_{2y}^* + 1) \left[\frac{z^2 N_{2y}^*}{K_p} - z\dot{\xi}_{ny} + (zB_1 + N_{1y}^* C_1) \cos \omega t_n - (N_{1y}^* B_1 + zC_1) \sin \omega t_n \right]}{z^2 (N_{2y}^* - N_{1y}^*)}.$$

Момент отрыва от поверхности грузонесущего органа определяется из выражения:

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sin \left(\omega t_0 + \operatorname{arctg} \frac{u_1}{u_2} \right) + u_3 e^{\frac{N_{1y}^*}{z}\omega(t_0-t_n)} + u_4 e^{\frac{N_{2y}^*}{z}\omega(t_0-t_n)} = \frac{1}{K_p}. \quad (13)$$

Анализ этого выражения показывает, что момент отрыва груза от грузонесущей поверхности зависит от режима колебаний грузонесущего органа свойств и момента падения слоя транспортируемого груза, т. е., по существу, от характера движения на предшествующем этапе. Анализируя уравнение (13), можно увидеть, что второй и третий члены его левой части при достаточно больших значениях коэффициентов N_{1y}^* и N_{2y}^* резко уменьшаются с увеличением периода совместного движения груза $\omega(t_0 - t_n)$. Уменьшение этих членов по мере роста продолжительности совместного движения происходит вследствие свойств экспоненциальной функции e^t . Физически уменьшение этих членов объясняется тем, что при больших сопротивлениях, которые действуют в процессе соударения массовых грузов с грузонесущим органом, колебания, вызванные начальными возмущениями, быстро затухают. Имея ввиду, что при транспортировании массовых грузов (особенно тонкоизмельчённых) продолжительность совместного движения достаточно велика, выражение (13) можно упростить без существенного ущерба для точности получаемых результатов. Выражение для определения угла отрыва будет иметь вид:

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{K_p \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \operatorname{arctg} \frac{u_1}{u_2}. \quad (14)$$

Используя экспериментально полученные значения углов отрыва φ_0 для конкретных грузов, можно определять сочетания p и n , характеризующие слой данного груза.

Оторвавшись, груз совершает полёт в стеснённых условиях, обусловленных наличием слоя определённой высоты. Относительное движение груза в направлении оси Y при наличии сопротивлений описывается уравнением (6). Решив это уравнение при начальных условиях $t = t_0, y(t_0) = y_0$ и $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$, получим относительное перемещение и скорость груза в направлении оси Y на участке свободного движения:

$$y = A \sin(\alpha + \beta) [K_3 + K_4 e^{-N_y^* \omega(t-t_0)} + C_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + D_2 \omega t]; \quad (15)$$

$$\dot{y} = A \omega \sin(\alpha + \beta) [N_y K_4 e^{-N_y \omega(t-t_0)} + C_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + D_2], \quad (16)$$

где

$$N_y = \frac{n_y''}{\omega}; B_2 = \frac{1}{1 + N_y^2}; C_2 = \frac{N_y}{1 + N_y^2}; D_2 = \frac{1}{N_y K_p};$$

$$K_3 = \xi_{0y} + \frac{1}{N_y} \dot{\xi}_{0y} - \left(C_2 + \frac{1}{N_y} B_2 \right) \cos \omega t_0 + \left(\frac{1}{N_y} C_2 - B_2 \right) \sin \omega t_0 - D_2 \left(\omega t_0 + \frac{1}{N_y} \right);$$

$$K_4 = \frac{1}{N_y} \left(-\dot{\xi}_{0y} + B_2 \cos \omega t_0 - C_2 \sin \omega t_0 + D_2 \right);$$

$\xi_{0y}, \dot{\xi}_{0y}$ – безразмерное относительное перемещение и скорость груза в направлении оси Y в момент отрыва от грузонесущего органа.

$$\xi_{0y} = \frac{y}{A \sin(\alpha + \beta)}; \dot{\xi}_{0y} = \frac{\dot{y}}{A \omega \sin(\alpha + \beta)}.$$

Подставив в уравнения (10) и (11) значения коэффициентов K_3 и K_4 , получим выражения для определения перемещения и скорости в направлении оси Y на участке свободного движения:

$$y = A \sin(\alpha + \beta) \left[\xi_{0y} - \frac{1}{N_y} \left(B_2 \cos \omega t_0 - C_2 \sin \omega t_0 + D_2 - \dot{\xi}_{0y} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - e^{-N_y \omega(t-t_0)} \right) + C_2 (\cos \omega t - \cos \omega t_0) + B_2 (\sin \omega t - \sin \omega t_0) + \right. \\ \left. + D_2 (\omega t - \omega t_0) \right]; \quad (17)$$

$$\dot{y} = A \omega \sin(\alpha + \beta) \left[\dot{\xi}_{0y} e^{-N_y \omega(t-t_0)} + B_2 (\cos \omega t - \cos \omega t_0 e^{-N_y \omega(t-t_0)}) - \right. \\ \left. - C_2 (\sin \omega t - \sin \omega t_0 e^{-N_y \omega(t-t_0)}) + D_2 (1 - e^{-N_y \omega(t-t_0)}) \right]. \quad (18)$$

Момент падения груза на грузонесущий орган определим в результате решения трансцендентного уравнения, полученного приравнением к нулю относительного

перемещения груза на участке полёта в направлении оси Y , как наиболее близкий к ωt_0 корень

$$K_3 + K_4 e^{-N_y \omega (t_n - t_0)} + \sqrt{\frac{2}{2} + B_2^2} \sin \left(\omega t_n + \arctg \frac{C_2}{B_2} \right) + D_2 \omega t_n = 0. \quad (19)$$

Зная углы отрыва и падения, можно определить углы полёта и углы совместного движения груза.

Используя экспериментальные значения угла полёта, можно подобрать значения коэффициентов сопротивления движению груза на участке свободного движения.

Перемещение груза вдоль грузонесущего органа (в направлении оси X) исследуем, воспользовавшись уравнениями (5) и (7). Подставив в уравнение (5) значения y и \dot{y} в соответствии с равенствами (10) и (11), приведём это уравнение к удобному для решения виду:

$$\ddot{x} + 2n_x^* \dot{x} = A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \left[R_1 + R_2 \cos \omega t + R_3 \sin \omega t + R_4 e^{\frac{N_{1y}^*}{z} \omega t} + R_5 e^{\frac{N_{2y}^*}{z} \omega t} \right], \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{g}{A\omega^2 \cos(\alpha + \beta)} (\sin \alpha - \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \cos \alpha); \\ R_2 &= -\frac{\nu_x^* K_x'}{z} + \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \left(\frac{2\nu_y^*}{z} B_1 + \frac{1}{z^2} C_1 - \frac{2\nu_y^* K_x'}{z} \right); \\ R_3 &= 1 + \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{z^2} B_1 - \frac{2\nu_y^*}{z} C_1 \right); \\ R_4 &= \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \frac{1 + 2\nu_y^* N_{1y}^*}{z^2} K_1; \\ R_5 &= \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \frac{1 + 2\nu_y^* N_{2y}^*}{z^2} K_2. \end{aligned}$$

Начальными условиями в момент пуска машины будут $t_H = 0$, $x(t_H) = 0$, $\dot{x}(t_H) = 0$. При определении начальных условий для анализа последующих циклов движения груза следует исходить из возможных режимов движения в направлении оси X .

Уравнение (20) описывает движение груза на участке совместного движения только в случае, если скорость его не обращается в нуль и не меняет знак. В противном случае уравнение распадается на два самостоятельных уравнения, описывающих движение на участках с положительной и отрицательной скоростями. При этом переход от одного решения к другому сопровождается обращением скорости в нуль.

В связи с изложенным, в качестве начальных условий примем $t = (t_H)$, $x(t_H) = x_H$, $\dot{x}(t_H) = \dot{x}_H$, имея в виду, что t_H может быть моментом начала движения при пуске ($t_H = 0$), моментом начала движения после падения ($t_H = t_{\Pi}$) или моментом начала движения груза после остановки ($t_H = t_{0\pm}$). Соответствующие значения будут принимать начальные перемещения x_H и начальные скорости \dot{x}_H .

Решая уравнение (20) при принятых начальных условиях, найдём относительные перемещения и скорость движения груза в направлении оси X на участке совместного движения:

$$x = A \cos(\alpha + \beta) \left(K_5 + K_6 e^{-\frac{\nu_x^*}{z} \omega(t-t_H)} + C_3 \cos \omega t + B_3 \sin \omega t + C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} + D_3 \omega t \right); \quad (21)$$

$$\dot{x} = A \omega \cos(\alpha + \beta) \left(-\frac{\nu_x^*}{z} K_6 e^{-\frac{\nu_x^*}{z} \omega(t-t_H)} - C_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t + \frac{\aleph_{1y}^*}{z} C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + \frac{\aleph_{2y}^*}{z} B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} + D_3 \right), \quad (22)$$

где

$$B_3 = \frac{z^2 - \nu_x^{*2} K_x' - \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\nu_x^{*2} + z^2} \times \left[(1 - 2\nu_x^* \nu_y^*) B_1 - \left(-2\nu_y^* z + \frac{\nu_x^*}{z} \right) C_1 + 2\nu_x^* K_x' \right];$$

$$C_3 = \frac{z\nu_x^* (1 - K_x') - \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\nu_x^{*2} + z^2} \times \left[\left(2\nu_y^* z_y + \frac{\nu_x^*}{z} \right) B_1 + (1 - 2\nu_x^* \nu_y^*) C_1 + 2\nu_y^* K_x' z \right];$$

$$D_3 = \frac{gz [\sin \alpha + \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \cos \alpha]}{A \omega^2 \cos(\alpha + \beta) \nu_x^*};$$

$$B_4 = -\operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \frac{1 + 2\nu_y^* \aleph_{2y}^*}{\aleph_{2y}^* (\nu_x^* + \aleph_{2y}^*)} K_2;$$

$$K_5 = \xi_{Hx} + \frac{z}{\nu_x^*} \dot{\xi}_{Hx} + \left(\frac{z}{\nu_x^*} B_3 - C_3 \right) \cos \omega t_H - \left(B_3 - \frac{z}{\nu_x^*} C_3 \right) \sin \omega t_H - \left(1 + \frac{\aleph_{1y}^*}{\nu_x^*} \right) C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} - \left(1 + \frac{\aleph_{2y}^*}{\nu_x^*} \right) B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} - D_3 (1 + \omega t_H);$$

$$K_6 = -\frac{z}{\nu_x^*} \left(\dot{\xi}_{Hx} + C_3 \sin \omega t_H + B_3 \cos \omega t_H - \frac{\aleph_{1y}^*}{z} C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t_H} - \frac{\aleph_{2y}^*}{z} B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t_H} - D_3 \right),$$

где ξ_{Hx} , $\dot{\xi}_{Hx}$ – соответственно, безразмерное перемещение и скорость груза в направлении оси X в момент начала движения, равные

$$\xi_{Hx} = \frac{x_H}{A \cos(\alpha + \beta)}; \quad \dot{\xi}_{Hx} = \frac{\dot{x}_H}{A \omega \cos(\alpha + \beta)}.$$

Приравняв нулю выражение (22), получим трансцендентное уравнение, из которого можно определить момент перехода от относительного скольжения груза к относительному покою:

$$-\frac{\nu_x^*}{z} K_6 e^{-\frac{\nu_x^*}{z} \omega(t-t_H)} - C_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t + \frac{\aleph_{1y}^*}{z} C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + \frac{\aleph_{2y}^*}{z} B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} + D_3 = 0. \quad (23)$$

Трансцендентное уравнение для определения момента перехода от относительно покоя к движению будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) \left[-\sin \omega t - \frac{\nu_x^*}{z} \cos \omega t - \frac{1}{K'_p} \right] = \\ & = f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \times \left[\begin{aligned} & \left(2\frac{\nu_x^*}{z} B_1 + \frac{1}{z^2} C_1 + 2\frac{\nu_y^*}{z} \right) \cos \omega t + \\ & + \left(\frac{1}{z^2} B_1 - 2\frac{\nu_y^*}{z} C_1 \right) \sin \omega t + \\ & + \frac{1+2\nu_y^* \aleph_{1y}^*}{z^2} K_1 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + \frac{1+2\nu_y^* \aleph_{2y}^*}{z^2} K_2 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} - \frac{1}{K'_p} \end{aligned} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$K'_p = \frac{A\omega^2 \cos(\alpha + \beta)}{g \sin \alpha}.$$

Относительное перемещение и скорость груза в направлении оси X на участке свободного движения получим, решив уравнение (7) при начальных условиях $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$:

$$x = A \cos(\alpha + \beta) (K_7 + K_8 e^{-\aleph_x \omega(t-t_H)} + C_5 \cos \omega t + B_5 \sin \omega t + D_4 \omega t); \quad (25)$$

$$\dot{x} = A\omega \cos(\alpha + \beta) (-\aleph_x K_8 e^{-\aleph_x \omega(t-t_H)} - C_5 \sin \omega t + B_5 \cos \omega t + D_4), \quad (26)$$

где

$$\aleph_x = \frac{n_x}{\omega}; \aleph'_x = \frac{n'_x}{\omega}; \aleph''_x = \frac{n''_x}{\omega}; B_5 = -\frac{1 + \aleph_x'^2}{1 + \aleph_x^2};$$

$$C_5 = -\frac{\aleph_x''^2}{1 + \aleph_x^2}; D_4 = \frac{g \sin \alpha}{4\aleph_x A \omega \cos(\alpha + \beta)};$$

$$K_7 = \xi_{0x} + \frac{1}{\aleph_x} \dot{\xi}_{0x} - \left(C_5 - \frac{1}{\aleph_x} B_5 \right) \cos \omega t_0 + \left(\frac{1}{\aleph_x} C_5 - B_5 \right) \sin \omega t_0 - D_4 \left(\omega t_0 + \frac{1}{\aleph_x} \right);$$

$$K_8 = \frac{1}{\aleph_x} \left(-\dot{\xi}_{0x} - C_5 \sin \omega t_0 + B_5 \cos \omega t_0 + D_4 \right),$$

где ξ_{0x} , $\dot{\xi}_{0x}$ – соответственно, безразмерное относительное перемещение и относительная скорость груза в направлении оси X в момент отрыва от грузонесущего органа.

Подставив в уравнения (24) и (25) значения K_7 и K_8 , получим выражения для определения относительного перемещения и скорости груза в направлении оси X на участке свободного движения:

$$x = A \cos(\alpha + \beta) \times \left[\begin{aligned} &\xi_{0x} + \frac{1}{N_x} \dot{\xi}_{0x} (1 - e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + \\ &+ \frac{1}{N_x} (C_5 \sin \omega t_0 - B_5 \cos \omega t_0 - D_4) (1 - e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + \\ &+ C_5 (\cos \omega t - \cos \omega t_0) + B_5 (\sin \omega t - \sin \omega t_0) + \\ &+ D_4 (\omega t - \omega t_0) \end{aligned} \right]; \quad (27)$$

$$\dot{x} = A \omega \cos(\alpha + \beta) \times \left[\begin{aligned} &\xi_{0x} e^{-N_x \omega(t-t_0)} - C_5 (\sin \omega t - \sin \omega t_0 e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + \\ &+ B_5 (\cos \omega t - \cos \omega t_0 e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + D_4 (1 - e^{-N_x \omega(t-t_0)}) \end{aligned} \right]. \quad (28)$$

При помощи полученных зависимостей можно определить среднюю скорость вибрационного транспортирования, которая является одним из основных показателей вибрационной транспортирующей машины. Средняя скорость вибрационного транспортирования определяется скоростями транспортируемого груза на отдельных этапах движения, а также характером, продолжительностью и порядком чередования этих этапов.

Скорость на участке свободного движения и на участках скольжения определяется выражениями (22) и (26).

Скорость на участке относительного покоя:

$$\dot{x}(\delta_0) = A \omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t. \quad (29)$$

Проинтегрировав эти выражения в соответствующих пределах, получим формулы для определения средних скоростей движения грузов на отдельных этапах. Скорость на участке полета груза:

$$V_\delta = \frac{A \omega \cos(\alpha + \beta)}{\delta} \left[\begin{aligned} &K_8 (e^{-N_x \omega(t-t_0)} - 1) + C_5 (\cos \omega t - \cos \omega t_0) + \\ &+ (1 + B_5) (\sin \omega t - \sin \omega t_0) + D_4 (\omega t - \omega t_0) \end{aligned} \right]. \quad (30)$$

Средняя скорость движения груза на участке относительного скольжения:

$$V_{\delta\pm} = \frac{A \omega \cos(\alpha + \beta)}{\delta_\pm} \times \left[\begin{aligned} &K_8 \left(e^{\frac{\nu_x^*}{z}(\omega t_{к\pm} - \omega t_{н\pm})} - 1 \right) + B_5 (\sin \omega t_{к\pm} - \sin \omega t_{н\pm}) + \\ &C_5 (\cos \omega t_{к\pm} - \cos \omega t_{н\pm}) + \\ &+ \frac{N_{1x}^*}{z} C_4 \left(e^{\frac{N_{1y}^*}{z} \omega t_{к\pm}} - e^{\frac{N_{1y}^*}{z} \omega t_{н\pm}} \right) + \\ &+ \frac{N_{2x}^*}{z} B_4 \left(e^{\frac{N_{2y}^*}{z} \omega t_{к\pm}} - e^{\frac{N_{2y}^*}{z} \omega t_{н\pm}} \right) + \\ &+ D_3 (\omega t_{к\pm} - \omega t_{н\pm}) \end{aligned} \right], \quad (31)$$

ωt_K и ωt_H в зависимости от характера движения могут быть:

- 1) для $V_{\delta+}$: $\omega t_K = \omega t_0, \omega t_{+0}$; $\omega t_H = \omega t_{\Pi}, \omega t_{-0}$;
- 2) для $V_{\delta-}$: $\omega t_K = \omega t_0, \omega t_{-0}$; $\omega t_H = \omega t_{\Pi}, \omega t_{+0}$.

Средняя скорость груза на участке его совместного перемещения с грузонесущим органом:

$$V_{\delta 0} = \frac{A\omega \cos(\alpha + \beta)}{\delta_0} (\sin \omega t_K - \sin \omega t_H), \quad (32)$$

ωt_K и ωt_H в зависимости от характера движения могут быть:

- 1) $\omega t_K = \omega t_{0\pm}, \omega t_0$;
- 2) $\omega t_H = \omega t_{\pm 0}, \omega t_{\Pi}$.

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования, в промышленных вибрационных транспортирующих машинах независимо от начальных условий в течение непродолжительного времени начинается установившееся движение груза, которое характеризуется периодическим повторением моментов перехода от одного этапа движения груза к другому [9]. Для определения средней скорости движения груза в установившемся режиме достаточно найти среднюю скорость движения груза за цикл

$$V_{cp} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^k V_i \delta_i, \quad (33)$$

где V_i – скорость груза на i -м этапе движения; δ_i – фазовый угол i -го этапа движения; k – число моментов перехода от одного этапа движения к другому за один цикл.

Эффективность процессов вибротранспортирования с точки зрения сообщения скорости перемещаемому грузу характеризуется коэффициентом передачи скорости. Зная среднюю скорость транспортирования груза, нетрудно определить коэффициент передачи скорости:

$$\aleph = \frac{V_{cp}}{A\omega \cos \beta}. \quad (34)$$

Коэффициент передачи скорости показывает, в какой мере грузонесущий орган сообщает скорость всей массе транспортируемого груза. Чем больше коэффициент передачи скорости, тем эффективнее, с точки зрения сообщения скорости, режим вибротранспортирования.

Если принять в качестве оптимального режим движения груза без относительного проскальзывания, то средняя скорость установившегося движения груза будет определяться величиной перемещения на этапе полёта, отнесённой к продолжительности цикла движения груза. При одном этапе полёта за один период колебаний виброповерхности (продолжительность цикла движения груза равна периоду колебаний виброповерхности) выражение для средней скорости транспортирования груза по горизонтальной ($\alpha = 0$) вибрирующей поверхности будет иметь вид:

$$V = A\omega \cos \beta \frac{1}{2\pi} \left[\begin{aligned} &K_8 (e^{-\aleph x \delta} - 1) + C_5 (\cos \varphi_{\Pi} - \cos \varphi_0) + \\ &+ (1 + B_5) (\sin \varphi_{\Pi} - \sin \varphi_0) \end{aligned} \right]. \quad (35)$$

Как и для безразмерного коэффициента передачи горизонтальной составляющей скорости, характеризующего эффективность вибротранспортирования, будем иметь:

$$\aleph = -\frac{1}{2\pi} \left[\begin{aligned} &K_8 (e^{-\aleph_x \delta} - 1) + C_5 (\cos \varphi_{\pi} - \cos \varphi_0) + \\ &+ (1 + B_5) (\sin \varphi_{\pi} - \sin \varphi_0) \end{aligned} \right]. \quad (36)$$

Если учесть, что при значениях коэффициента режима работы $K_p = 2,2 \dots 2,6$ можно практически пренебречь скольжением груза в прямом и обратном направлениях и для реальных грузов считать, что $n_x = n'_x$, $\xi_{ox} = 0$, $\dot{\xi}_{ox} = 0$, то при $\alpha = 0$ выражения для средней скорости вибротранспортирования и коэффициента передачи скорости ещё более упростятся и будут иметь вид:

$$V = A\omega \cos \beta \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\aleph_x \delta}) \frac{1}{\aleph_x} \cos \varphi_0; \quad (37)$$

$$\aleph = \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\aleph_x \delta}) \frac{1}{\aleph_x} \cos \varphi_0. \quad (38)$$

Анализ этих выражений показывает, что эффективность вибротранспортирования тонкоизмельчённых материалов зависит не только от коэффициента режима работы вибротранспортирующей установки, но и в не меньшей степени от свойств груза и внешних сопротивлений.

Скорость вибротранспортирования тонкоизмельчённого сыпучего материала существенно отличается от теоретически вычисленной скорости движения материальной частицы.

Выражение для приближенного вычисления средней скорости движения материальной частицы [10]:

$$V_{cp} = A\omega \cos \beta \frac{1}{2\pi} [(\varphi_{\pi} - \varphi_0) \cos \varphi_0 - (\sin \varphi_{\pi} - \sin \varphi_0)]. \quad (39)$$

Анализ выражений (37) и (39) показывает, что скорость вибротранспортирования тонкоизмельчённого сыпучего груза всегда меньше скорости движения, вычисленной для материальной частицы, из-за влияния свойств слоя груза, внешних сопротивлений на момент отрыва от плоскости на продолжительность этапа полёта.

Процесс транспортирования тонкоизмельчённого сыпучего материала формируется в большей степени под влиянием аэродинамических факторов, связанных с плохой воздухопроницаемостью слоя [11]. Дело в том, что при транспортировании таких материалов фазовый сдвиг между движением груза и грузонесущего органа возникает не столько вследствие упруго-гистерезисных свойств слоя, сколько под влиянием аэродинамических сопротивлений. Момент отрыва при перемещении тонкоизмельчённых материалов может запаздывать настолько, что потеря контакта происходит при положительных ускорениях грузонесущего органа, т. е. когда он находится в нижней части своей траектории. Продолжительность свободного движения (полёта) тонкоизмельчённых сыпучих грузов с плохой воздухопроницаемостью

слоя даже при весьма интенсивных колебаниях грузонесущего органа не превышает одного периода колебаний. Это объясняется весьма существенным влиянием на продолжительность полёта и характер движения груза аэродинамических сопротивлений, которые возникают вследствие того, что в пространстве между поверхностью грузонесущего органа и нижним монослоем транспортируемого материала с плохой воздухопроницаемостью слоя при подбрасывании возникает разрежение, а при падении – повышение давления. Вследствие этого за счёт уравнивания этих периодических колебаний давления в пространстве между слоем транспортируемого груза и поверхностью грузонесущего органа при оттоке избыточного и притоке недостаточного количества воздуха, проходящего через поры в слое транспортируемого материала, на частицы груза действует пульсирующий аэродинамический напор, направленный с некоторым сдвигом по фазе, в основном, в сторону, противоположную их перемещению. При этом частицы тонкоизмельчённого сыпучего материала движутся по более сложному закону, чем одиночная материальная частица, а величины аэродинамических сопротивлений являются в основном функцией удельной газопроницаемости слоя транспортируемого груза и насыпного веса, а также зависят от режима колебаний грузонесущего органа.

Учитывая это, при вибротранспортировании тонкоизмельчённых сыпучих материалов нет необходимости назначать весьма интенсивные режимы колебаний грузонесущего органа ($K_p > 2,4 \dots 2,6$), а повышения эффективности вибротранспортирования следует добиваться за счёт уменьшения толщины слоя транспортируемого груза и за счёт использования рациональной формы поперечного сечения грузонесущего органа.

Литература

1. Архипенко А.В., Лозовецкий В.В. Экспериментально-аналитическое моделирование движения сыпучей среды в транспортно-технологических вибрационных установках // Транспорт: Наука, техника, управление: науч. информ. сб. М.: ВИНТИРАН, 2021. № 3. С. 57–63.
2. Бельков Н.И. Исследование закономерностей и особенностей вибрационного перемещения тонкоизмельчённых сыпучих материалов: дисс. ... канд. техн. наук. Л., 1974. 178 с.
3. Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical system // Applied Mechanics reviews. 1995. Vol. 48, No. 11. Pt. I. P. 733–752.
4. Архипенко А.В. Скольжение частиц грунта по рабочим органам вибромашин // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1 (65). С. 4–14.
5. Гончаревич И.Ф., Фролов К.В. Теория вибрационной техники и технологии. М.: Наука, 1981. 319 с.
6. Гончаревич И.Ф., Гудушаури Э.Г., Гаврилина Л.В. Модернизация транспортно-перегрузочной техники методами вибротехнологий // Машиностроение и инженерное образование. 2014. № 2. С. 9–14.
7. Вибрация в технике: справочник: в 6 т. / под ред. И.И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. 351 с.

8. Архипенко В.П. Механико-технологические основы создания вибрационных машин для бункеризации, выпуска и контейнерной обработки: дисс. ... д-ра техн. наук. Днепропетровск, 1996.
9. Тропман А.Г., Бельков Н.И., Макеева Ю.Н. Вибрационные конвейеры для транспортирования горячих материалов. М.: Машиностроение, 1972. 327 с.
10. Архипенко А.В., Ниров А.Д. Влияние коэффициента трения и угла вибраций на эффективность вибротранспортирования в режимах движения с подбрасыванием // Математические структуры и моделирование. 2023. № 2 (66). С. 4–14.
11. Бауман В.А., Быховский И.И. Вибрационные машины и процессы в строительстве. М.: Высшая школа, 1977. 255 с.

**ANALYSIS OF MODES OF VIBROTRANSPORTATION OF SINGLE-MASS
ELASTIC-VISCOUS-PLASTIC MODEL OF CARGO LAYER UNDER RECTILINEAR
HARMONIC OSCILLATIONS OF LOAD-CARRYING BODY**

A.V. Arkhipenko

Ph.D. (Techn.), e-mail: andrei-arhipenko@mail.ru

International Innovation University, Sochi, Russia

Abstract. The motion of an elastic-viscous-plastic model of a cargo on an inclined load-carrying body is considered. It is shown that the efficiency of vibrotransportation of finely ground bulk materials is determined not only by vibration parameters, but also very significantly depends on the properties of the cargo layer and external resistances. It is revealed that the formula for determining the velocity of vibrotransportation of a material particle, with the obtained numerical values of the transfer coefficient of the horizontal component of velocity, applicable for granular materials with good air permeability, can be used to determine the velocity of vibrotransportation of finely ground bulk solids by introducing a correction factor that takes into account the influence of elastic-hysteresis properties of the cargo and aerodynamic resistances at the moment of detachment of the cargo from the load-carrying body.

Keywords: elastic-viscous-plastic model, vibrotransportation, bulk material, vibration parameters, velocity transfer coefficient, elastic-hysteresis properties, aerodynamic resistances, mass load, phase shift, rectilinear harmonic oscillations, characteristic equation, aperiodic character, transcendental equation, mode factor, vibration surface.

Дата поступления в редакцию: 04.05.2024

УПРАВЛЕНИЕ ОПОЛЗНЕВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. В статье теория дифференциальных игр применяется для управления процессом сползания оползней по горным склонам. Найдено оптимальное управление Нэша, гарантирующее остановку оползневого процесса. Обсуждается форма практического использования предложенной модели управления сползанием оползней. Предложен путь противостояния оползням за счёт выбора стратегии Штакельберга, при которой стратегия игрока «Природа» обозначена как подбор соответствующей функции, адекватно отражающей ситуацию с ливневым дождём.

Ключевые слова: оползень, модель оползня, дифференциальные игры, управление оползневой процессом, оптимальное управление Нэша, оптимальное управление Штакельберга.

Введение

Схождение оползней с горных склонов является самым грозным опасным природным явлением в г. Сочи.

Оползень – это смещение масс горных пород по склону под воздействием собственного веса или в случае дополнительной нагрузки вследствие переувлажнения, подмыва склона, сейсмических толчков и прочих процессов. На территории Большого Сочи насчитывается более 228 крупных оползней [1]. Оползневые процессы угрожают большей части территории города. Поражённость территории оползнями составляет здесь 50–80 %, а иногда достигает 80–90 % [2].

Основными причинами схода оползней следует считать ливневые дожди, а также строительные работы, которые плохо контролируются. Теоретические изыскания и модели оползневых процессов ограничиваются традиционными методами теории грунтов и инженерной геологии. Имеется потребность в пополнении способов борьбы с оползнями современными математическими методами. Имеются определённые успехи использования теории катастроф в моделировании оползневых процессов. В данной статье предлагается использование методов теории дифференциальных игр.

1. Математическая модель оползня и теория катастроф

Китайские специалисты предложили следующую математико-механическую модель оползня [3], включающую два типа грунта, сползающего по скользящей основе по плоскому склону:

$$\frac{2G_s l_s u_1 e^{-2}}{3h} \left[\left(\frac{u - u_1}{u_1} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{G_e l_e e^2}{G_s l_s} - 1 \right) \left(\frac{u - u_1}{u_1} \right) + \left(1 + \frac{G_e l_e e^2}{G_s l_s} - \frac{mgh \sin \beta}{G_s l_s u_1} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где G_s – начальный модуль сдвига; G_e – модуль сдвига; u – ползучее смещение оползня; u_0 – величина смещения при максимальном напряжении, $u_1 = 2u_0$; l_s и l_e – длины поверхности скольжения для деформационно-упрочняющего грунта и упруго-хрупкого грунта соответственно; H , h , β и mg (g – ускорение свободного падения) – вертикальная высота горного массива, мощность скользящего слоя, угол наклона поверхности скольжения и масса горного массива соответственно.

Полагая

$$x = \frac{u - u_1}{u_1}, \quad a = \frac{3(k - 1)}{2}, \quad b = \frac{3(1 + k - k\xi)}{2}, \quad k = \frac{G_e l_e u_1 e^2}{G_s l_s}, \quad \xi = \frac{mgh \sin \beta}{G_e l_e u_1},$$

можно (1) переписать в виде

$$x^3 + ax + b = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) определяет стационарные равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad (3)$$

$$W(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx,$$

подверженной катастрофе типа *сборка* [4]. Её бифуркационное множество

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 2a^3 + 27b^2 = 0\}$$

задаёт кривую на плоскости ab , пересечение которой влечёт скачкообразные изменения смещения x .

В статьях [3, 5] демонстрируется, каким образом знание бифуркационного множества при изучении сходов оползней способствует их предупреждению. Смысл в том, чтобы уточнить возможные дополнительные коэффициенты α , λ , μ , которые могут входить в выражение для $W(x, a, b)$:

$$W_{(\alpha, \lambda, \mu)}(x) = \frac{1}{4}\alpha x^4 + \frac{1}{2}(\lambda + a)x^2 + (\mu + b)\mu x \quad (4)$$

– так, чтобы эволюция состояния x , описываемая уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial W_{(\alpha, \lambda, \mu)}}{\partial x},$$

отвечала накопленным по годам данным. Затем определить бифуркационное множество и далее следить за тем, чтобы управляющие параметры его не пересекали (см. подробности в [5]).

Авторы статьи [5] связывают управляющий параметр a с деятельностью человека, т. е. $a = H (= human)$, которая направлена на борьбу с оползнями. Деятельность

человека определяет, будет ли иметь место оползень внезапно или постепенно, в зависимости от изменения геологических условий окружающей среды.

Второй управляющий параметр b связан с ливневыми дождями, т. е. $b = r$ (=rain). Последнее оправдано для Сочи, поскольку среди основных причин, вызывающих оползни, на первом месте¹ стоят длительные ливневые дожди, переувлажняющие грунт и провоцирующие его сползание со склонов.

Иначе говоря, вместо (3) изучаем систему

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad (5)$$

$$W(x, H, r) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}Hx^2 + rx.$$

Главная трудность в использовании описанного подхода состоит в том, чтобы прояснить то, как измеряется величина x . Действительно, поскольку большинство оползней в горной местности происходит внезапно на неустойчивых склонах с очень сложными геологическими условиями, и их сотни, то смещение каждого оползня невозможно точно измерить [5]. Поэтому нужно как-то избежать этого, т. е. заменить x на иную величину, так или иначе связанную со смещением x . Это вполне разумно, если учесть, что для города пространственные и временные рамки – десятки километров и годы. Иначе говоря, естественно пренебречь смещением каждого отдельного оползня и понимать под x некоторую интегральную характеристику совокупности оползней, зарегистрированных городскими службами.

Другими словами, вместо смещения x необходимо ввести некий пропорциональный ему индекс смещения оползней P . В работе [5] P – это число оползней за год. (В Сочи соответствующие службы говорят о кубометрах убранного сползшего грунта.) Вместо дифференциального уравнения (5) рассматривается разностное

$$P(t+1) = -A_0P^3(t) - [B_1H - (B_0 - 1)]P(t) - [C_1r + C_0], \quad (6)$$

где $t, t+1, t+2, \dots, t+n$ – годы, по которым есть архивные данные $\{P(t+k)\}$ по оползням. Коэффициенты A_0, B_1, B_0, C_1, C_0 находим методом наименьших квадратов с соответствующим статистическим обоснованием.

Надо сказать, что такая подмена смещения x дала неплохой результат для провинции Юньнань в Китае [5]. Однако в случае Сочи использование данного подхода затруднено отсутствием информации о нахождении многолетних архивных данных по оползням, накопленных различными организациями, занимавшимися с 1948 г. в Сочи оползнями, а возможно, и их безвозвратной потерей [6].

Но поскольку можно, в какой-то мере, говорить, опираясь на опыт китайских учёных, о средней величине смещения оползней, которая оценивается, скажем, по объёму убранного сползшего грунта, то можно на первом этапе считать, что x – это финансовые затраты по предупреждению оползней в сумме с затратами на ликвидацию послеоползневых последствий.

¹Другие причины: нарушения при строительстве зданий, подрезание склонов, вырубка деревьев на склонах, землетрясения.

Для нас важно, чтобы предложенная нами в рамках теории дифференциальных игр оптимальная стратегия, или оптимальное управление, гарантировала стремление величины x к нулю с ростом времени, т. е. критерием успешности найденного решения будем считать выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = 0. \quad (7)$$

Управление будем искать, рассматривая уравнение (3) как дифференциальную игру двух игроков [7] – «Природы» в лице ливневых дождей r и «Человека» H в форме работ по предотвращению сползанию оползней.

2. Оптимальное управление Нэша

Естественно рассматривать игру с ненулевой суммой [7], поскольку выигрыши «Природы» и «Человека» трудно увязать в нечто единое. Ведь говорить о выигрыше можно скорее только в том случае, если имеем дело с существом, наделённым сознанием, имеющим тот или иной интерес и т. д.

Возможны два подхода для выбора стратегии, или управления в теории дифференциальных игр.

При первом подходе игрок может выбирать своё управление (стратегию) в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, x)$, зависящей от позиции $\{t, x\}$. При этом для $u(t, x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [8]. Часто пишут просто $u(x)$.

При втором подходе игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры. В таком случае говорят, что $u(t)$ – это *программное управление* игрока, или просто используется термин «управление».

Здесь мы будем искать позиционное управление, или, точнее, *позиционное равновесие Нэша*, а в § 3 – программное *оптимальное управление Штакельберга*.

Для дифференциальной игры N игроков

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{j=1}^N g_j(x)u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

где каждое u_j – это j -й игрок, его управляющий параметр, с выигрышными функциями

$$J_i(x, u_1, \dots, u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(x) + \sum_{j=1}^N R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i \in N, \quad (8)$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания положительно определённого решения $V_i(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби

$$(V_i)'_x(x)f(x) + Q_i(x) - \frac{1}{2}(V_i)'_x \sum_{j=1}^N [g_j(x)]^2 (R_{jj})^{-1} (V_j)'_x + \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N R_{ij} [g_j(x)]^2 [(R_{jj})^{-1}]^2 [(V_j)'_x]^2 = 0, \quad (9)$$

по которому строится равновесие Нэша:

$$u_i^*(x) = u_i(V_i(x)) = -\frac{1}{2} R_{ii} g_i(x) (V_i)'_x, \quad i \in N, \quad (10)$$

в соответствии с теоремой 10.4-2 из [7].

2.1. Оптимальное управление Нэша для игры (5)

В нашем случае $N = 2$, дифференциальная игра описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x} = -x^3 - Hx - r, \quad (11)$$

где H (human) – игрок 1, «Человек» (параметр u_1) – это человеческий фактор, т. е. усилия организаций по предотвращению оползней; r (rain) – игрок 2, «Природа» (параметр u_2) – это дождевые осадки, и

$$f(x) = -x^3, \quad g_1(x) = -x, \quad g_2(x) = -1.$$

Берём $R_{11} = R_{22} = 1, R_{12} = R_{21} = 0$. Тогда уравнения Гамильтона–Якоби принимают вид:

$$Q_1 + (V_1)'_x f(x) - \frac{1}{4} [g_1(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 - \frac{1}{2} [g_2(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x = 0, \\ Q_2 + (V_2)'_x f(x) - \frac{1}{4} [g_2(x)]^2 [(V_2)'_x]^2 - \frac{1}{2} [g_1(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x = 0. \quad (12)$$

Следовательно, если взять

$$Q_1 = x^{2m+2} + \frac{1}{4} x^{4m} + \frac{1}{2} x^{4m-2}, \quad Q_2 = x^{2m+2} + \frac{1}{4} x^{4m-2} + \frac{1}{2} x^{4m}, \quad (13)$$

то уравнения Гамильтона–Якоби (10) имеют решения

$$V_1(x) = V_2(x) = \frac{1}{2m} x^{2m}, \quad m \geq 1.$$

При этом функции $Q_1(x), Q_2(x)$ являются положительно определёнными.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [7] имеем равновесие Нэша

$$H^* = \frac{1}{2} x^{2m}, \quad r^* = \frac{1}{2} x^{2m-1}, \quad (14)$$

найденное по формулам (10). Отметим, что усилия людей, борющихся с оползнями, т. е. величина $H^* = H^*(x)$, определяются, как мы видим, через величину x , характеризующую смещение оползня. Поэтому фактически мы имеем формулу, позволяющую оценивать затраты по факту сползшего оползня. И это следствие того, что мы пошли по пути использования позиционного управления.

Уравнение дифференциальной игры принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - \frac{1}{2}x^{2m+1} - \frac{1}{2}x^{2m-1} < 0,$$

решение которого

$$t = -2 \int_{x_0}^x \frac{dx}{2x^3 + x^{2m+1} + x^{2m-1}}, \quad (15)$$

$$x(0) = x_0, \quad t \geq 0,$$

есть строго убывающая функция $x(t)$. Это говорит о том, что усилия $H^*(x) = (1/2)x^{2m}$ людей, ответственных за противодействие оползням, приводят к уменьшению величины смещения оползня (или, при иной интерпретации величины x , к уменьшению объёма грунта, который сползёт на улицы города и который необходимо будет убрать с учётом различных финансовых затрат на ликвидацию последствий оползневой катастрофы).

Выигрышные функции, соответственно, имеют вид

$$J_1(x, H, r) = \int_0^{+\infty} [Q_1(x) + (H^*)^2] dt, \quad J_2(x, H, r) = \int_0^{+\infty} [Q_2(x) + (r^*)^2] dt.$$

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика второго игрока остаётся неизменной, то он имеет худший результат (большой проигрыш). Можно уйти в философию, рассуждая о том, что бы это известное специалистам по теории игр утверждение значило в случае не одушевлённых, но крайне опасных оползней, «не прощающих» людям ошибки или их преступные деяния, и в случае людей, продумывающих мероприятия по защите города от оползней. Но лучше говорить об используемом игровом методе с целью пополнения достаточно скудного математико-теоретического задела по борьбе с оползнями и надеяться на то, что он окажется столь же полезным, как и использование математической теории катастроф.

2.2. Управление Нэша при $m = 1$

Рассмотрим частный случай найденного оптимального управления Нэша:

$$H^* = \frac{1}{2}x^2, \quad r^* = \frac{1}{2}x.$$

Для него решение (13) имеет вид

$$-t + \ln C = \int \frac{dx}{x^3 + (1/3)x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + (1/3))} = \frac{1}{(2/3)} \ln \frac{x^2}{(1/3) + x^2},$$

или

$$\frac{x^2}{(1/3) + x^2} = C \cdot e^{-t}.$$

Переходя к пределу по $t \rightarrow +\infty$, получим, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} x^2 = 0$, т. е. выполнено равенство (7), которое мы охарактеризовали как критерий успешности принимаемого управления.

2.3. Управление Нэша при $m = 2$

Рассмотрим другой частный случай найденного оптимального управления Нэша

$$H^* = \frac{1}{2}x^4, \quad r^* = \frac{1}{2}x^3.$$

Для него решение (13) имеет вид

$$-\frac{1}{2}t + \ln C = \int \frac{dx}{3x^3 + x^5} = \int \frac{dx}{x^3(3 + x^2)} = -\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{18} \ln \frac{x^2}{3 + x^2},$$

или

$$\left(\frac{3 + x^2}{x^2} \right) e^{-\frac{3}{x^2}} = C e^{-9t}.$$

Переходя к пределу по $t \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} e^{-\frac{3}{x^2}} \right) \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} (3 + x^2) = C \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-9t} = 0$$

Одно из слагаемых слева должно обратиться в нуль, и это возможно лишь при $\lim_{t \rightarrow +\infty} x^2 = 0$, т. е. равенство (7) выполнено.

3. Оптимальное управление Штакельберга

Очевидно, что «Природа» в наше время сама определяет, какие осадки и когда польются или полетят сверху на город. Ливневые дожди явно не зависят от желаний людей и являются лидером в рассматриваемой нами игре «Природа – Человек».

Обратимся поэтому к классу иерархических дифференциальных игр [9, p. 114], в которых один из игроков имеет приоритет ходов над другими игроками и изучим стратегии Штакельберга для нашей модели оползней (5).

В этих играх у нас есть лидер и ведомый. Лидер объявляет свою стратегию, и мы ищем лучшую стратегию для ведомого в ответ на любую заявленную стратегию лидера. Его стратегия выводится из решения задачи оптимизации ведомого с учётом стратегии лидера.

Рассмотрим дифференциальную игру «Природа – Человек» (5) с выигрышной функцией игрока «Человек» [9, р. 115]:

$$J_H[x_0, H, r] = \int_0^T v_H(x, H, r) dt, \quad v_H(x, H, r) = -H - \frac{H^2}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

4. Управление Штакельберга для игры (5)

В игре, основанной на стратегии Штакельберга, один игрок является лидером, он диктует свои условия другим игрокам. Найдем оптимальную стратегию Штакельберга для нашей дифференциальной игры:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, H, r) = -x^3 - Hx - r, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T].$$

Предполагаем, что нам известна стратегия игрока «Природа», т. е. нам известен прогноз осадков, в том числе и прогноз ливневых дождей $r = r^*(t)$ на момент $t = 0$. Отметим, что сочинский Гидромет имеет такие прогнозы, поступающие из Москвы, как минимум за сутки, а уточнённые – за шесть часов.

Игрок «Человек», зная эту стратегию, выбирает свою стратегию, своё программное управление $H^*(t)$ так, чтобы максимизировать свою выигрышную функцию, т. е. ищем функцию $H^*(t)$ так, что

$$H^*(t) = \arg \max_{H(t)} J_H[x_0, H(t), r^*(t)].$$

Для данной стратегии $r^*(t)$ условия оптимальности имеют вид [9, р. 114, 115]:

$$\frac{\partial v_H}{\partial H} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial H} = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial v_H}{\partial x} - \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (16)$$

или

$$-1 - H - \lambda x = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = x - \lambda[-3x^2 - H].$$

Следовательно, оптимальная стратегия Штакельберга игрока «Человек» равна

$$H^*(t) = -1 - \lambda(t)x(t), \quad (17)$$

где $\lambda(t)$ есть решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = x + \lambda \cdot [3x^2 - 1 - \lambda \cdot x], \\ \frac{dx}{dt} = -x^3 + x \cdot (1 + \lambda \cdot x) - r^*(t), \\ x(0) = x_0, \quad \lambda(T) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Приведённые выше условия (16) достаточны для оптимальности $H^*(t)$, если гамильтониан игрока «Человек»

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_H(x, H, r^*, \lambda) &= v_H(x, H, r^*(t)) + \lambda(t)f(x, H, r^*(t)) = \\ &= -H - \frac{H^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \lambda \cdot [x^3 + Hx + r^*(t)] \end{aligned}$$

является функцией в совокупности вогнутой (выпуклой вверх) по переменным x и H [9, p. 114], что сводится к выполнению неравенств

$$0 \leq 1 + 6\lambda \cdot x \leq \lambda^2. \quad (19)$$

Таким образом, теоретически задача поиска оптимальной стратегии борьбы с оползнями сводится к решению системы (18) и к проверке условия (19). Очевидно, это предполагает подбор функций $r^*(t)$, адекватно отражающих ситуацию с ливневыми дождями и к последующее численное решение системы (18) с проведением серии вычислительных экспериментов.

Численное моделирование проводится в MatLab благодаря наличию в нём решателя **bvp4c**, т. е. программы, позволяющей находить решение краевых задач для систем дифференциальных уравнений², в том числе и для задач типа (18). Но эту часть работы планируется опубликовать в следующей статье.

5. Заключение

Мы получили оптимальное управление смещением оползня в виде чисто математических выражений (14) или (17). Важно понять, как они могут быть проинтерпретированы городскими инженерами, занимающимися практическими вопросами противостояния оползневым процессам.

Речь идёт о плане противооползневых мероприятий – установке подпорных стенок, дренажных систем, посадке деревьев на склонах и пр. Очевидно, что по смещению x или по количеству оползней за год устанавливается объём работ как по уборке оползневого грунта, так и по сумме денежных затрат. Предложенное в статье управление оползневым процессом, сопоставленное с традиционными инженерными расчётами, позволит определить, какое оптимальное управление (стратегия) Нэша (при каком значении m) из множества управлений (стратегий), данных формулой (13), наиболее эффективно, и, следовательно, использовать именно его в практической работе. Именно такой путь был предложен в работе китайских исследователей [5] и относительно успешно реализован касательно практического использования математической теории катастроф.

Одновременно предложен путь борьбы с оползнями за счёт использования оптимальной стратегии Штакельберга, в котором выбор стратегии игроком «Природа» сводится к выбору функции, адекватно отражающей ситуацию с ливневым дождём.

²Решатель **bvp4c** отсутствует в системе SciLab.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

Литература

1. Борисенко М.О. Проблемы оползневых деформаций (на примере района Сочи) // Наука, образование и экспериментальное проектирование. 2022. № 1. С. 281–284.
2. Крестин Б.М., Мальнева И.В. Активность оползневого и селевого процессов на территории Большого Сочи и её изменения в начале XXI века // Сергеевские чтения: материалы годич. сес. Науч. совета РАН по проблемам геоэкологии, инженерной геологии и гидрогеологии. М.: Изд-во РУДН, 2014. Вып. 16. С. 295–299.
3. Qin S.Q., Jiao J.J., Wang S.J. A cusp catastrophe model of instability of slip buckling slope // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2001. Vol. 34. P. 119–134.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1982.
5. Tao Y., Cao J., Hu J., Dai Z. A cusp catastrophe model of mid-long-term landslide evolution over low latitude highlands of China // Geomorphology. 2013. Vol. 187. P. 80–85.
6. Шебзухова О. Оползневые процессы, подтопление территорий и возрождение УБПР // SCAPP. 2022. № 5. С. 58–64.
7. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
8. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. 1979. Т. 17. С. 3–112.
9. Dockner E.J., Jergensen S., Ngo Van Long, Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

CONTROL OF LANDSLIDE PROCESSES WITHIN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL GAMES

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. In the article, the theory of differential games is applied to control of the process of sliding of landslides on mountain slopes. The optimal Nash control which guarantees the stop of the landslide process is found. The form of practical use of proposed model of landslide sliding control is discussed. A path of resistance to landslides is suggested in which the choice of the Stakelberg strategy in the frame in which the "nature" player's strategy is indicated as selection of the appropriate functions that adequately reflect the situation with heavy rain.

Keywords: landslide, landslide model, differential games, landslide process control, optimal Nash control, optimal Stakelberg control.

Дата поступления в редакцию: 30.10.2023

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА «ПРЕСЛЕДОВАНИЕ–УКЛОНЕНИЕ» НА ОСНОВЕ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

С.Н. Чуканов¹

д.т.н., профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: ch_sn@mail.ru

И.С. Чуканов²

студент, e-mail: chukanov022@gmail.com

С.В. Лейхтер³

старший преподаватель, e-mail: leykhter@mail.ru

¹ Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия
² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

³ Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работе рассмотрены алгоритмы оптимального управления, основанные на схемах обучения актор/критик с подкреплением (RL). Алгоритмы используются для решения задач преследования–уклонения (PE) дифференциальных игр. Работа фокусируется на реализации решения политики агента в соответствии с концепцией адаптивного динамического программирования. Суть решения задачи PE-игры заключается в получении политики управления каждого агента (преследователя и уклоняющегося) с обеих сторон игры. В работе предложен метод адаптивного динамического программирования (ADP) для решения равновесных политик Нэша в дифференциальных играх преследования–уклонения для двух игроков. Используется метод аппроксимации функции стоимости для расчёта параметров нейросети (NN) без непосредственного решения уравнения Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: оптимальное управление, машинное обучение, обучение с подкреплением.

Введение

В последние годы проблема преследования–уклонения (PE) привлекает большое внимание из-за её широкого применения в конкурентных играх, оптимизации ресурсов интернета вещей и военных атаках. Однако из-за конфронтации между сторонами преследования и уклонения в реальном времени традиционная теория одностороннего управления не может точно решить проблему. Хотя существующие алгоритмы могут решить проблему дифференциальной игры во многих сценариях, автономный алгоритм не может реагировать в реальном времени на информацию агентов PE-игры с высокой производительностью в реальном времени. Данная рабо-

та фокусируется на проблеме онлайн-игр PE и реализует решение политики агента в соответствии с концепцией адаптивного динамического программирования (ADP).

Суть решения задачи PE-игры заключается в получении политики управления каждого агента с обеих сторон игры. В работе [1] Р. Айзекс ввёл в теорию игр современную теорию управления и создал дифференциальную теорию игр [2]. А. Фридман в работе [3] доказал существование седловых точек в дифференциальных играх, что позволило оптимизировать стратегии всех агентов в задаче PE. В работе [4] обсуждается единственность точки равновесия Нэша, так что аналитическое решение может быть получено для классической задачи дифференциальной игры.

В работе [5] П. Вербос и др. разработали структуры «актор–критик» для реализации алгоритмов в реальном времени, где механизмы обучения структур состоят из оценки и улучшения политики. В работе [6] Д. Берцекас и Дж. Цицикис представили методы обучения с подкреплением (RL) и сравнивают методы итерации политики (PI) и итерации значений (VI) для динамических систем с дискретным временем, которые изначально применяют идею RL к проблеме систем управления. В работе [7] П. Вербос разработал подход RL на основе VI для управления динамическими системами с дискретным временем с обратной связью с использованием аппроксимации функции стоимости (VFA). Доказано, что метод VFA пригоден для поиска оптимального управления в онлайн для задач управления с дискретным временем.

В настоящей работе предлагается метод ADP для онлайн-решения равновесных политик Нэша в дифференциальных играх преследования–уклонения для двух игроков.

1. Формулировка игры

Рассмотрим систему, содержащую два объекта и составляющую пару «преследователь–уклоняющийся».

Преследователь пытается схватить уклоняющегося, а уклоняющийся – уйти от преследователя. Игра «преследование–уклонение» в реальном времени представляет собой типичную задачу дифференциальной игры. Здесь уравнение движения каждого участника может быть выражено в виде пары дифференциальных уравнений, определённых в фиксированной системе координат. Игра с одним преследователем и одним уклоняющимся представляет собой типичную дифференциальную игру с нулевой суммой, поскольку выгоды обеих сторон исключают друг друга:

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu_p; \quad (1)$$

$$\dot{x}_e = Ax_e + Bu_e, \quad (2)$$

где x_p, u_p, x_e, u_e – переменные состояния и переменные управления двух игроков. Среди них переменная состояния содержит информацию о состоянии игроков, и могут существовать различные физические величины, представляющие действия игроков в соответствии с различными игровыми системами. Чтобы облегчить последующие операции в этой статье, переменные состояния здесь должны содержать информацию о местоположении агентов в каждом измерении. Переменные управления содержат элементы, которые реализованы для управления агентами в каждом измерении.

В задаче РЕ-игры состояние относительного движения агентов очень важно. Итак, пусть δ будет разницей в состояниях между двумя агентами:

$$\delta = x_p - x_e. \quad (3)$$

Преследователь пытается сократить расстояние двух агентов, заложенное в δ , а уклоняющийся пытается его увеличить. Подставив уравнения (1) и (2) в уравнение (3) и вычислив его производную по времени, получим:

$$\dot{\delta} = A\delta + B(u_p - u_e). \quad (4)$$

Для формулировки игры «преследование–уклонение» (РЕ) с нулевой суммой построим функцию стоимости интегральной формы:

$$J(\delta, u_p, u_e) = \int_0^{\infty} (\delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - u_e^T R_e u_e) d\tau,$$

где Q – матрица неотрицательно определённых коэффициентов, R_p и R_e – положительно определённые матрицы. В интегральной функции $\delta^T Q \delta$ – это термин, который измеряет относительное состояние системы (4) и используется для определения пределов расстояния между агентами, $u_p^T R_p u_p$ и $u_e^T R_e u_e$ обозначают масштабы потребления, соответствующие двум агентам, которые используются для реализации ограничений средств управления.

Функция стоимости задаётся следующим образом, когда агенты выполняют определённую политику: $V(\delta) = \int_0^{\infty} (\delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - u_e^T R_e u_e) d\tau$.

Если и преследователь, и уклоняющийся применяют свои оптимальные стратегии на оптимальных путях, то оптимальное значение игры можно получить как:

$$V^*(\delta) = \min_{u_p} \max_{u_e} J = \min_{u_p} \max_{u_e} \int_0^{\infty} (\delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - u_e^T R_e u_e) d\tau.$$

Целью работы является выяснение политики управления каждого агента. Сложность работы заключается в поиске численного решения политики каждого агента, в котором важны этапы итерации политики и выбор подходящей аппроксимации функции стоимости. В обучении с подкреплением политика требует некоторых итеративных шагов.

2. Решение игры «преследование–уклонение»

Заменим динамическую модель задачи РЕ-игры на принцип минимакса и получим аналитическое равновесие Нэша РЕ-игры.

РЕ-игра агентов рассматривается как своего рода дифференциальная игра, основанная на теории двустороннего оптимального управления. Оптимальные политики агентов получаются с использованием принципа минимакса. Дифференциальная игра относится к непрерывной игре с парой игроков в системах с непрерывным

временем. Каждый агент пытается достичь своей цели и увеличить свою выгоду. Игра закончится тем, что каждый участник достигнет политики равновесия Нэша. Используя теорему о минимаксе, мы можем гарантировать, что политика агентов является соответствующей оптимальной политикой.

В задаче РЕ-игры для двух игроков оптимальная политика преследователя пытается минимизировать функцию Гамильтона, тогда как политика уклоняющегося пытается максимизировать её. Следовательно, существует пара оптимальных политик (u_p^*, u_e^*) . Когда преследователь принимает решение u_p^* , а уклоняющийся принимает решение u_e^* , игра достигает равновесия Нэша. Назовём (u_p^*, u_e^*) седловой точкой игры.

Из уравнений (1) и (2) имеем:

$$\begin{aligned} H(\delta(t), \nabla V, u_p, u_e) &= \delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - u_e^T R_e u_e + \dot{V} = \\ &= \delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - u_e^T R_e u_e + \nabla V^T (A(x_p - x_e) + B(u_p - u_e)), \end{aligned}$$

где $H(\delta(t), \nabla V, u_p, u_e)$ – гамильтониан, u_p, u_e – допустимые политики управления преследователя и уклоняющегося соответственно; $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \delta}$.

Можно получить оптимальное управление каждым агентом согласно стационарному условию: $\frac{\partial H}{\partial u_p} = \frac{\partial H}{\partial u_e} = 0$.

Вторая производная гамильтониана по u_p, u_e должна удовлетворять:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_p^2} = 2R_p > 0; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_e^2} = -2R_e < 0.$$

Оптимальные управления агентов получаются в виде:

$$\begin{aligned} u_p^* &= -\frac{1}{2} R_p^{-1} B^T \nabla V^*; \\ u_e^* &= -\frac{1}{2} R_e^{-1} B^T \nabla V^*. \end{aligned}$$

Значение V можно аналитически получено решением следующего уравнения Гаильтона–Якоби–Беллмана (НJB):

$$\delta^T Q \delta + (u_p^*)^T R_p u_p^* - (u_e^*)^T R_e u_e^* + (\Delta V^*)^T (A \delta + B(u_p^* - u_e^*)) = 0.$$

Поскольку поведение двух агентов преследования–уклонения становится игрой с нулевой суммой, когда оба агента принимают свою оптимальную политику, которая называется теоретико-игровой политикой седловой точки, игра достигнет равновесия Нэша при этом условии.

Предположим, что V^* удовлетворяет уравнению НJB, в результате чего гамильтониан $H(\delta(t), \nabla V^*, u_p^*, u_e^*)$ обращается в 0. Тогда гамильтониан $H(\delta(t), \nabla V^*, u_p, u_e)$ преобразуется в

$$\begin{aligned} H(\delta(t), \nabla V^*, u_p, u_e) &= (\nabla V^*)^T B ((u_p - u_p^*) - (u_e - u_e^*)) + \\ &+ \delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - (u_p^*)^T R_p u_p^* - (u_e^T R_e u_e - (u_e^*)^T R_e u_e^*). \end{aligned}$$

3. Численное решение РЕ-игры методом ADP

3.1. Итерация политики

Упростим функцию стоимости РЕ-игры:

$$V(\delta(t)) = \int_t^{\infty} r(\delta(\tau), u_p(\tau), u_e(\tau)) d\tau,$$

для $r(\delta(\tau), u_p(\tau), u_e(\tau)) = \delta^T Q \delta + u_p^T R_p u_p - u_e^T R_e u_e$. Для заданного интервала T можно записать:

$$\begin{aligned} V(\delta(t)) &= \int_t^{t+T} r(\delta(\tau), u_p(\tau), u_e(\tau)) d\tau + \int_{t+T}^{\infty} r(\delta(\tau), u_p(\tau), u_e(\tau)) d\tau = \\ &= \int_t^{t+T} r(\delta(\tau), u_p(\tau), u_e(\tau)) d\tau + V(\delta(t+T)). \end{aligned}$$

Интервал T рассматривается как параметр ADP. Разделим весь период $[t, \infty)$ на сегменты интервалов и предположим, что $[t, t+T]$ – k -й интервал РЕ-игры, т. е. $t = k \cdot T$. Более того, политики, выполняемые двумя агентами в $[t, t+T]$, равны $u_p(\delta_k), u_e(\delta_k)$.

Тогда имеем:

$$V(\delta_k) = \int_{kT}^{(k+1)T} r(\delta, u_p(\delta_k), u_e(\delta_k)) d\tau + V(\delta_{k+1}).$$

Можно получить политики управления преследователя и уклоняющегося в виде:

$$\begin{aligned} u_p &= -\frac{1}{2} R_p^{-1} B^T \nabla V(\delta_k); \\ u_e &= -\frac{1}{2} R_e^{-1} B^T \nabla V(\delta_k). \end{aligned}$$

Уравнения для $V^{(i)}(\delta_k)$ образуют i -й итерационный цикл метода PI с политиками управления $u_p^{(i)}, u_e^{(i)}$. Для РЕ-игры пусть $u_p^{(0)}, u_e^{(0)}$ являются допустимыми начальными управлениями преследователя и уклоняющегося. Функции $V^{(i)}(\delta_k)$ и управления $u_p^{(i)}, u_e^{(i)}$ при $i \rightarrow \infty$ будут сходиться к $V^*(\delta), u_p^*, u_e^*$, соответственно. Игра достигает равновесия Нэша, когда элементы управления сходятся.

3.2. Аппроксимация функции стоимости

Для большинства игр РЕ уравнение HJB сложно решить аналитически или оно может вообще не иметь аналитического решения. Поэтому мы используем процесс аппроксимации для получения решения уравнения HJB. Метод фокусируется на аппроксимации функции значения, которая называется алгоритмом VFA (Value Function Approximation).

Предположим, что линейно независимое интегрирование набора базисных функций $\varphi_j(\delta)$ способно аппроксимировать функцию стоимости V , которая выражается как: $V(\delta(t)) = \sum_{j=1}^L w_j \varphi_j(\delta) = w_L^T \phi_L(\delta)$, где L обозначает количество сохранных функций, а $\phi_L(\delta)$ образует вектор L -размерности базовых функций. w обозначает определяемые параметры нейронной сети, которая состоит из каждого элемента w_j ($j = 1, \dots, L$).

Используя приведённую выше аппроксимацию функции стоимости (VFA) для функции стоимости, уравнение итерации политики можно выразить в виде:

$$w_L^T \phi_L(\delta_t) = \int_t^{t+T} r(\delta, u_p, u_e) d\tau + w_L^T \phi_L(\delta_{t+T}).$$

Представим дискретное время t в виде $t = kT$ и $\phi(\delta(t)) = \phi(\delta_k)$; $\phi(\delta(t+T)) = \phi(\delta_{k+1})$ (индекс L для простоты опущен). Тогда

$$(w^{(i)})^T \Phi(\delta_k) \approx \delta_k^T Q \delta_k + (h^{(i)}(\delta_k))^T R h^{(i)}(\delta_k), \quad (5)$$

где $\Phi(\delta_k) = \varphi(\delta_k) - \gamma \varphi(\delta_{k+1})$, γ – коэффициент дисконтирования.

Обновить политику управления можно по формулам:

$$\begin{aligned} h_p^{(i+1)} &= -\frac{1}{2} R_p^{-1} B^T \nabla \phi^T w^{(i)}; \\ h_e^{(i+1)} &= -\frac{1}{2} R_e^{-1} B^T \nabla \phi^T w^{(i)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение для $(w^{(i)})^T$ (5) представляет собой скалярное уравнение, тогда как вектор неизвестных параметров $w^{(i)} \in R^L$ имеет L элементов. Следовательно, для нахождения $w^{(i)}$ необходимы данные за несколько временных шагов.

На шаге i алгоритма итерации стратегия управления фиксируется на уровне $u = h^{(j)}(\delta)$. В каждый момент времени k измеряется набор данных $(\delta_k, \delta_{k+1}, r(\delta_k, h^{(i)}(\delta_k)))$. Затем выполняется один шаг метода наименьших квадратов. Эта итерационная процедура повторяется до достижения параметров, соответствующих значению $V^*(\delta) = (w^*)^T \cdot \varphi(\delta)$.

4. Численное моделирование

Рассмотрим проведение численного моделирования игры «преследование-уклонение». На основе общей модели движения исследуется задача преследования-уклонения, рассматривающая в качестве управления ускорение обоих игроков. Положение и скорость агентов отслеживаются онлайн как переменные состояния.

Рассмотрим задачу РЕ-игры в двумерном пространстве, динамическая модель которой будет следующей:

$$\dot{s}_{px} = v_{px}; \dot{s}_{py} = v_{py}; \dot{v}_{px} = a_{px}; \dot{v}_{py} = a_{py}; \quad (7)$$

$$\dot{s}_{ex} = v_{ex}; \dot{s}_{ey} = v_{ey}; \dot{v}_{ex} = a_{ex}; \dot{v}_{ey} = a_{ey}, \quad (8)$$

где $s_{px}, s_{py}, v_{px}, v_{py}$ – координаты и скорости преследователя в направлениях x и y соответственно. Аналогично, $s_{ex}, s_{ey}, v_{ex}, v_{ey}$ – это координаты и скорости уклоняющегося в направлениях x и y , соответственно; (a_{px}, a_{py}) и (a_{ex}, a_{ey}) – это пары ускорений двух агентов, которые обозначают политики управления двух агентов, соответственно.

Вычтем модель (7) из (8) и получим систему разностей, переменные состояния которой равны $\delta = [l_x, \Delta v_x, l_y, \Delta v_y]$. Среди них обозначают расстояние в направлениях x и y соответственно. Полная система разностной модели:

$$\dot{l}_x = \Delta v_x; \Delta \dot{v}_x = a_{px} - a_{ex}; \dot{l}_y = \Delta v_y; \Delta \dot{v}_y = a_{py} - a_{ey},$$

или

$$\dot{\delta} = A\delta + B(a_p - a_e), \quad (9)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расстояние между двумя агентами можно рассматривать как условие захвата задачи РЕ-игры, которое задаётся следующим образом:

$$l = \sqrt{(s_{px} - s_{ex})^2 + (s_{py} - s_{ey})^2}.$$

Примем матрицу Q в виде $Q = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$, $R_p = 0.3$, $R_e = 1$. Значения начальных состояний задаются в виде: $\delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 1; & 0; & 1; & 0 \end{bmatrix}$, $a_{e0} = a_{p0} = 0$.

Построим однослойную нейронную сеть следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=1}^6 w_j \varphi_j = \\ &= w_1 l_x^2 + w_2 l_x \Delta v_x + w_3 \Delta v_x^2 + w_4 l_y^2 + w_5 l_y \Delta v_y + w_6 \Delta v_y^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметры $w^{(i)} = \left(w_1^{(i)} \quad \dots \quad w_6^{(i)} \right)$ обновляются онлайн. Начальное значение каждой компоненты $w_j^{(0)}$ примем равным $w_j^{(0)} = 0.1 \cdot (\text{rand}() - 0.5)$; $j = 1, \dots, 6$.

Функцию активации вектора критика выберем в виде:

$$\varphi(\delta) = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x \Delta v_x & \Delta v_x^2 & l_y^2 & l_y \Delta v_y & \Delta v_y^2 \end{bmatrix};$$

тогда:

$$(\nabla\varphi(\delta))^T = \begin{bmatrix} 2l_x & 0 & 0 & 0 \\ \Delta v_x & l_x & 0 & 0 \\ 0 & 2\Delta v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_y & 0 \\ 0 & 0 & \Delta v_y & l_y \\ 0 & 0 & 0 & 2\Delta v_y \end{bmatrix}^T.$$

Примем политику управления в форме (6).

Для нахождения вектора w запишем систему уравнений для i -й итерации:

$$\begin{aligned} (w^{(i)})^T \cdot \Phi(1) &= r(\delta_1, \delta_{1+1}, r(\delta_1, h^{(i)}(\delta_1))); \\ \dots & \\ (w^{(i)})^T \cdot \Phi(k) &= r(\delta_k, \delta_{k+1}, r(\delta_k, h^{(i)}(\delta_k))); \\ \dots & \end{aligned} \tag{11}$$

Так как размерность вектора $w^{(i)}$ равна $L = 6$, то необходимо выполнение условия $k \geq 6$.

Сформируем матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \vdots \\ \Phi(k) \end{pmatrix}$$

и объединим скаляры $r(\delta_1, \delta_{1+1}, r(\delta_1, h^{(i)}(\delta_1))), \dots, r(\delta_k, \delta_{k+1}, r(\delta_k, h^{(i)}(\delta_k))), \dots$ в вектор

$$Rew^{(i)} = \begin{pmatrix} r(\delta_1, \delta_{1+1}, r(\delta_1, h^{(i)}(\delta_1))) \\ \vdots \\ r(\delta_k, \delta_{k+1}, r(\delta_k, h^{(i)}(\delta_k))) \end{pmatrix}.$$

Тогда (11) можно записать в виде:

$$(w^{(i)})^T \Phi = Rew^{(i)}. \tag{12}$$

Представим решение (12) относительно $w^{(i)}$ как решение задачи минимизации выражения:

$$\left\| \Phi (w^{(i)})^T - Rew^{(i)} \right\|_2^2 + \left\| \Gamma (w^{(i)})^T \right\|_2^2 \rightarrow \min_{w^{(i)}}$$

с членом регуляризации А.Н. Тихонова [8] $\left\| \Gamma (w^{(i)})^T \right\|_2^2$, где матрица Γ выбирается как скаляр α , кратный единичной матрице $\Gamma = \alpha \cdot I$. Тогда решение для оценки $\hat{w}^{(i)}$ может быть получено методом наименьших квадратов:

$$(\hat{w}^{(i)})^T = (\Phi^T \Phi + \alpha^2 I)^{-1} \Phi^T \cdot Rew^{(i)}. \tag{13}$$

В результате получим: $w^* = [1.0; 0.5; 0.49; 1.0; 0.5; 0.5]$, т. е. функция стоимости аппроксимируется функцией:

$$V(\delta) = 1.0 \cdot l_x^2 + 0.5 \cdot l_x \Delta v_x + 0.49 \cdot \Delta v_x^2 + 1.0 l_y^2 + 0.5 \cdot l_y \Delta v_y + 0.5 \cdot \Delta v_y^2.$$

Заключение

В работе обсуждается решение игры «преследование–уклонение» двух игроков. С помощью принципа минимакса получено аналитическое решение равновесия Нэша и обсуждено необходимое условие, вызывающее возникновение захвата. Метод PI используется при решении онлайн-игры PE, а алгоритм VFA используется для предотвращения возможных неудобств при работе с уравнением НЖВ. Нет необходимости знать матрицу системы для получения политик, и игра приближается к аналитическому равновесному решению Нэша, которое проверяется в моделировании.

В будущем предполагается изучать более сложные задачи PE-игр с большим количеством агентов. Случай, когда существует связь между переменными состояния или переменными управления, также заслуживает дальнейшего изучения.

Литература

1. Isaacs R. Games of Pursuit. Rand; Santa Monica: Dover Publication Inc. 1965. 384 p.
2. Чуканов С.Н., Чуканов И.С., Цыганенко В.Н. Дифференциальные игры. Омск: ОмГТУ, 2024. 160 с.
3. Friedman A. Differential Games. John Wiley & Sons Inc., 1971. 370 p.
4. Yu Z. Linear–quadratic optimal control and nonzero-sum differential game of forward–backward stochastic system // Asian Journal of Control. 2011. No. 14. P. 173–185.
5. Werbos P.J., Miller W., Sutton R. A menu of designs for reinforcement learning over time // Neural Networks for Control. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1990. Vol. 3. P. 67–95.
6. Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. Neuro-dynamic programming: An overview // Proceedings of the 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA, 13–15 December, 1995. Vol. 1. P. 560–564.
7. Werbos P. Approximate dynamic programming for realtime control and neural modelling // Handbook of Intelligent Control: Neural, Fuzzy and Adaptive Approaches. New York, NY, USA: Van Nostrand Reinhold, 1992. P. 493–525.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

**DIFFERENTIAL PURSUIT-EVASION GAME BASED ON REINFORCEMENT
LEARNING**

S.N. Chukanov¹

Dr.Sc. (Technical), Professor, Leading Researcher, e-mail: a@a.ru

I.S. Chukanov²

Student, e-mail: chukanov022@gmail.com

S.V. Leykhter³

Assistant Professor, e-mail: leykhter@mail.ru

¹Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS, Omsk, Russia

²Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg,
Russia

³Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The paper discusses optimal control algorithms based on actor/critic reinforcement learning (RL) schemes. The algorithms are used to solve pursuit-evasion (PE) problems of differential games. The work focuses on the implementation of agent policy decisions in accordance with the concept of adaptive dynamic programming. The essence of solving the PE game problem is to obtain the control policy of each agent (pursuer and evader) on both sides of the game. The paper proposes an adaptive dynamic programming (ADP) method for solving Nash equilibrium policies in differential pursuit-evasion games for two players. The cost function approximation method is used to calculate the parameters of a neural network (NN) without directly solving the Hamilton–Jacoby equation.

Keywords: optimal control, machine learning, reinforcement learning.

Дата поступления в редакцию: 01.05.2024

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ВИБРОДИАГНОСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Т.Е. Болдовская

к.т.н., доцент, e-mail: boldovskaya73@gmail.com

И.В. Берсенеv

студент, e-mail: ilyabersenev2002@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. Статья нацелена на определение наиболее эффективной модели машинного обучения для кластеризации данных вибродиагностики. Исследование включает анализ различных моделей и методов, таких как k -means, Agglomerative Clustering, TimeSeriesKMeans и CatBoost. Цель состоит в выборе метода, способного наилучшим образом выявить структуру данных и улучшить понимание особенностей вибрационных сигналов. Результаты исследования могут быть полезны для разработки эффективных систем мониторинга и диагностики оборудования, а также для повышения надёжности и производительности технических систем.

Ключевые слова: временные ряды, кластеризация данных, k -means, Agglomerative Clustering, временные данные.

Введение

Контроль качества вибродиагностических данных играет важную роль в эффективном обслуживании и эксплуатации грузовых вагонов. Вибродиагностические данные используются для оценки состояния колёсных пар, выявления дефектов и определения их типа и степени. Однако, точность и достоверность этих оценок могут быть подвержены различным факторам, таким как шум, воздействие внешних условий и повреждение оборудования.

Помимо этого правильная оценка состояния колёсных пар является критическим фактором для безопасности и эффективности работы грузовых вагонов. Недостоверные оценки повреждений могут привести к необходимости неожиданных ремонтных работ или даже к аварийным ситуациям.

Исходный массив вибродиагностических данных для исследования был предоставлен Омским заводом транспортного машиностроения (группа компаний «Энергосервис»). В качестве инструментов для практической работы с методами машинного обучения были использованы: язык Python, компоненты библиотек scikit-learn, Keras, NumPy, pandas.

1. Описание задачи

В работе поставлена задача кластеризации и классификации дефектов подшипников колёсной пары грузовых вагонов: результаты диагностики колёсных пар и их статистические показатели (248 признаков, 8108 колёс) нужно отнести к одному из выявленных кластеров, содержащих один или более дефект.

Данная задача является примером задачи машинного обучения «без учителя». Модель обучается находить закономерности и структуры в данных без предварительной маркировки [1]. В качестве основных метрик будут использоваться силуэт (Silhouette score) и Davies-Bouldin Index.

Силуэтная оценка измеряет, насколько каждый объект в кластере похож на свой собственный кластер по сравнению с другими кластерами. Она принимает значения от -1 до 1 . Значение ближе к 1 указывает на то, что объекты хорошо сгруппированы внутри своих кластеров и отделены от других кластеров. Значение ближе к -1 означает, что объекты могли бы быть лучше распределены в других кластерах.

Davies-Bouldin Index измеряет среднее расстояние между каждым кластером и его самым похожим кластером, делённое на сумму внутрикластерных дисперсий. Низкое значение этого индекса указывает на лучшее разделение кластеров.

1.1. Описание данных. На стендах данные снимаются с помощью датчиков вибрации, установленных на колёсных парах. Собранные данные представляют собой временные ряды, отражающие колебания и вибрации, возникающие в колёсных парах в процессе прокатки. Для более детального анализа и выявления характеристик повреждений в колёсных парах применяется метод быстрого преобразования Фурье. Полученные данные содержат информацию о каждом колесе колёсной пары. При диагностике на выходе имеются две таблицы со значениями графика широкополосного спектра и статистические показатели о нём. Примеры графиков для пары колёс представлены на рис. 1.

На графике указана зависимость частоты вращения от силы звукового давления широкополосных спектров левого и правого колеса колёсной пары. При диагностике на выходе имеются две таблицы с значениями графика широкополосного спектра и статистические показатели о нём.

Так как данные записываются в виде строк для каждой части колёсной пары отдельно и содержат полную информацию о диагностике, включая серийный номер и часть колёсной пары, то перед использованием этих данных в машинном обучении их необходимо предварительно обработать.

1.2. Предварительная обработка данных. Предобработка данных является важным этапом перед их использованием в задачах машинного обучения. В случае с данными, собранными с помощью датчиков вибрации на колёсных парах грузовых вагонов, необходимо выполнить несколько действий. Неинформативные данные, например серийный номер или другая идентифицирующая информация, были удалены из исследуемого набора.

Для обеспечения их согласованности, данные, заданные в различных масштабах и единицах измерения, первоначально нормализовались. Нормализация включала

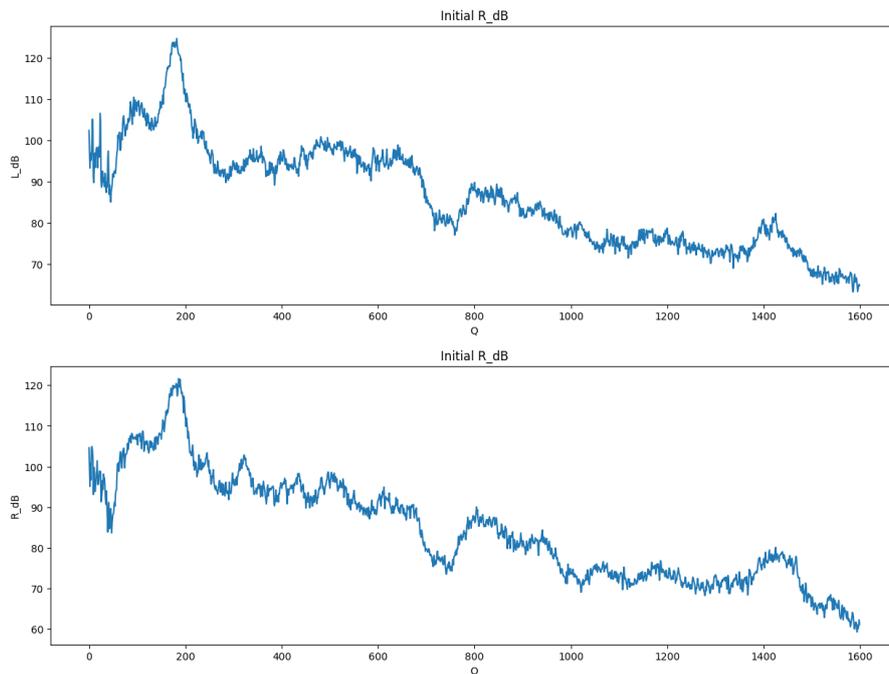


Рис. 1. Графики широкополосных спектров колёсной пары

масштабирование данных в определённом диапазоне (от 0 до 1) или их стандартизацию. Нормализация данных была проведена с помощью `StandardScaler` из библиотеки `scikitlearn` для масштабирования данных. `StandardScaler` используется для нормализации данных, приводя их к стандартному нормальному распределению. Этот метод применяет формулу для каждого признака:

$$z = (x - u) / s,$$

где z – новое значение признака после масштабирования, x – исходное значение признака, u – среднее значение признака в наборе данных, s – стандартное отклонение признака в наборе данных.

2. Ход работы

Статистические показатели были собраны по таблице значений графиков широкополосных спектров колёсной пары.

2.1. Статистика. Статистические показатели – ключевой инструмент анализа данных, предоставляющий информацию о характеристиках набора данных [2]. В работе по контролю качества вибродиагностических данных они используются для следующих целей:

1. Описательная статистика: минимум, максимум, среднее и медиана позволяют понять типичные значения и вариации в сигнале, выявить аномалии и выбросы.

2. Выявление особых структур: количество пиков и впадин помогает обнаружить характеристики, связанные с повреждениями или другими интересующими особенностями.

3. Измерение изменчивости: дисперсия и стандартное отклонение позволяют оценить уровень шума и стабильности сигнала.

4. Извлечение временных и амплитудных характеристик: сумма квадратов производной, показатель тренда и пересечения с определёнными метками предоставляют информацию о динамике и амплитуде сигнала.

5. Анализ спектральных характеристик: амплитудный спектр помогает обнаружить частотные особенности, связанные с интересующими характеристиками сигнала.

На рис. 2 представлена таблица статистических данных, собранных по данным рядам.

	Minimum	Maximum	Mean	Median	Standard Deviation	Peaks Count	Valleys Count	Vari
L_2	27.588340	51.626405	39.292452	39.316460	7.045081	411	411	49.66
R_2	27.628810	51.740060	39.395097	39.332460	6.995967	416	417	48.97
L_3	27.880530	52.453225	39.485587	39.426960	6.986542	425	426	48.84
R_3	28.011120	52.531610	39.574484	39.572995	6.936167	424	425	48.14
L_4	27.698975	51.562440	38.857676	39.099120	7.004503	429	430	49.09
...
R_4052	59.990025	119.707300	85.400657	84.232835	13.811417	445	446	190.87
L_4053	57.290675	118.851000	78.122366	78.706885	15.427675	433	434	238.16
R_4053	65.537600	122.426650	86.326581	84.989275	12.508519	434	434	156.56
L_4054	57.053455	120.265400	81.045512	83.811695	16.513639	429	429	272.87
R_4054	61.394815	119.483050	84.559787	81.787510	13.075549	428	428	171.07

Рис. 2. Статистические показатели по данным рядам

Таблица дефектов показана на рис. 3.

id	def-3/0_level	def-3/0_s	def-3/0_m	def-3/0_w	def-3/1_level	def-3/1_s	def-3/1_m	def-3/1_w	def-3/2_level
L_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...
R_4052	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_4053	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_4053	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_4054	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_4054	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 3. Дефекты в бинарном представлении, их уровень и степень

Одной из важных характеристик, полученных при диагностике, является принадлежность классов дефектов к каждому широкополосному спектру, их уровень и степень.

3. Применение моделей машинного обучения

Кластеризацию первично обработанных данных было решено провести в несколько этапов с разными моделями и методами, затем по оценке кластеризации выбрать наилучшее разбиение.

3.1. Первичная кластеризация. На начальном этапе была проведена кластеризация наших широкополосных спектров на основе их поведения. Для этого использовался алгоритм кластеризации TimeSeriesKMeans.

TimeSeriesKMeans – это алгоритм кластеризации временных рядов, который расширяет классический алгоритм k -means для работы с временными данными. Он предназначен для группировки временных рядов на основе их схожести в течение определённого отрезка времени [3].

Основная идея заключается в том, чтобы выявить группы рядов, которые имеют сходные формы или паттерны в течение определённого времени. Этот алгоритм учитывает не только значения временных рядов, но и их динамику и изменение во времени. Процесс работы TimeSeriesKMeans включает в себя начальную инициализацию центров кластеров, а затем итеративное перераспределение временных рядов между кластерами до тех пор, пока изменения стабилизируются или достигнут предела числа итераций [3].

Оптимальное число кластеров определялось с помощью процедуры «метод локтя» (Elbow Method), Инерции (Inertia) и оценки «силуэта» (Silhouette score).

График Distortion метрики Инерция (Inertia) отражает сумму квадратов расстояний между точками данных и центроидами их кластеров при разных значениях числа кластеров (k). При увеличении числа кластеров искажение обычно уменьшается, так как кластеры становятся более плотными. Однако на графике можно заметить точку, где снижение искажения замедляется, что создаёт «локоть» на графике. Эта точка указывает на оптимальное число кластеров для модели. Меньшее значение инерции указывает на более компактные кластеры и, следовательно, лучшее качество кластеризации.

График Silhouette отображает силуэтную оценку для различных чисел кластеров. Оценка силуэта показывает, насколько объекты в кластере схожи с другими объектами внутри того же кластера по сравнению с объектами из других кластеров, принимая значения от -1 до 1 . Значение ближе к 1 указывает на хорошее группирование объектов внутри кластеров и хорошее разделение между кластерами. Значение ближе к -1 говорит о том, что объекты могли бы быть лучше распределены в других кластерах. Оптимальное число кластеров можно выбрать, основываясь на максимальной силуэтной оценке (рис. 4).

Анализ графиков показал плавное снижение графика при использовании «метода локтя», что не совсем информативно для исследования, и оптимальное число кластеров находится в пределах от 3 до 8. График силуэта выявил наибольшее значение оценки при 3 кластерах, но для нашего исследования это малое число разбиений, поэтому было принято решение остановиться на 7 кластерах, так как это следующий пик на графике.

На рис. 5 представлена полученная реализация разбиения на кластеры. Анализ

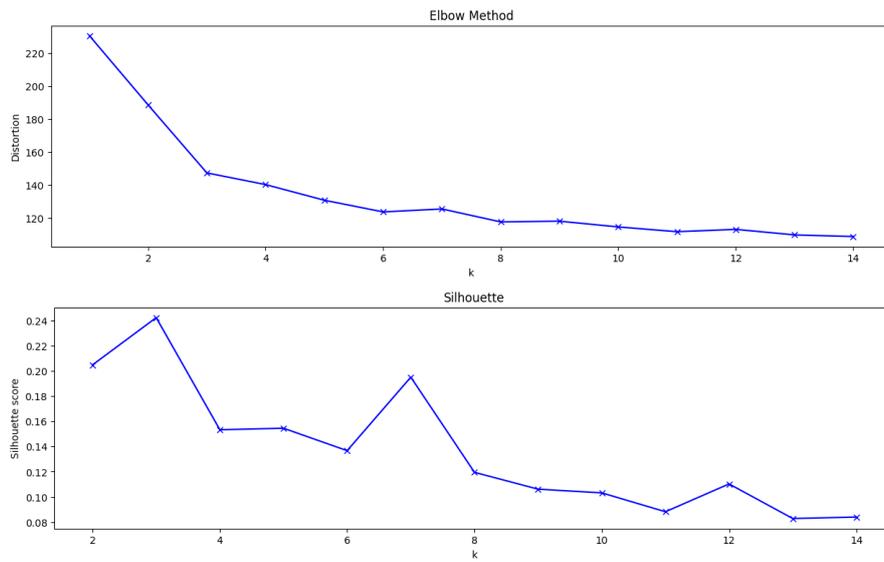


Рис. 4. Результаты оценки методами Elbow Method и Silhouette

полученной визуализации показал, что кластеры имеют различия и корректно описывают поведения спектров.

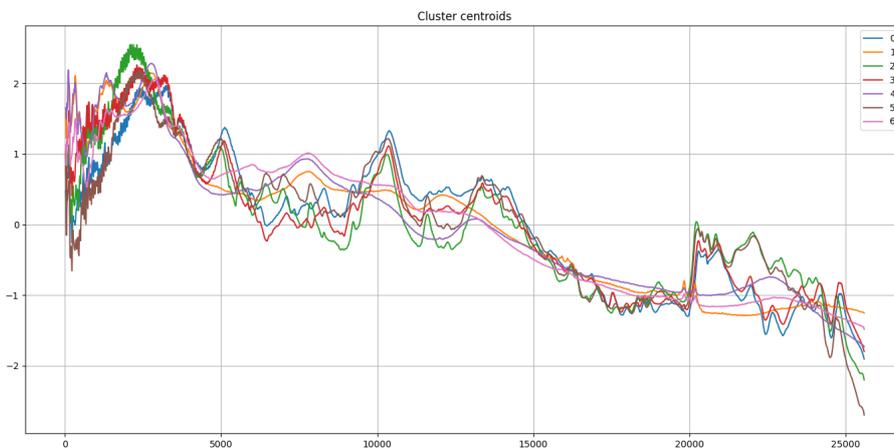


Рис. 5. Визуализация кластеров

Далее полученные данные были собраны в одну статистическую таблицу и для каждого графика был добавлен ID соответствующего кластера.

Для дальнейшей кластеризации по бинарным признакам было применено OneHot кодирование для кластеров. На рис. 6 показана часть таблицы после кодирования.

3.2. Вторичная кластеризация. Для вторичной кластеризации на основе статистических показателей были применены два основных метода кластеризации: *k*-means и агломеративная кластеризация.

k -means – это метод, разбивающий данные на заранее заданное количество кластеров, минимизируя сумму квадратов расстояний от каждой точки до центра своего кластера [4].

Агломеративная кластеризация (Agglomerative Clustering) – это метод, который строит иерархию кластеров путём последовательного объединения ближайших кластеров [4].

Для оценки числа кластеров по методу k -means применялись методы силуэта и инерции на данных без применения масштабирования. Визуализация оценки кластеров представлена на рис. 7.

cluster_0	cluster_1	cluster_2	cluster_3	cluster_4	cluster_5	cluster_6	cluster_7	cluster_8	cluster_9
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 6. Метки кластеров после OneHot кодирования

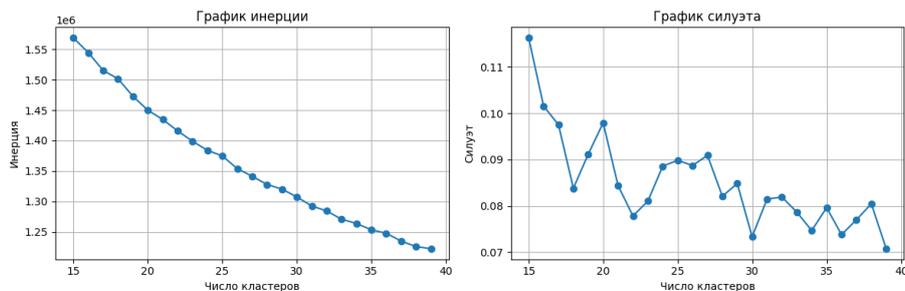


Рис. 7. Визуализация оценки кластеризации метриками инерции и силуэта с неотмасштабированными данными

Как видно по графику силуэта, оценки довольно близки к 0 и график нисходящий, что плохо сказывается на кластеризации. Визуализация оценки кластеров после проведения масштабирования представлена на рис. 8.

После масштабирования данных оценка силуэта значительно возросла – график стал восходящим, значения приблизились к 1. По графику силуэта виден пик на 22 кластерах.

В качестве параметров кластеризации указываем 22 кластера (рис. 9).

Для визуализации каждого полученного нами кластера создаётся список из ID

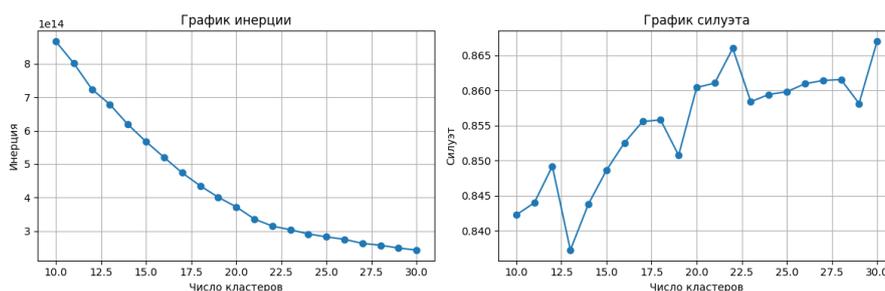


Рис. 8. Визуализация оценки кластеризации метриками инерции и силуэта с масштабированными данными

```
# Создаем объект KMeans с количеством кластеров
num_clusters = 22
kmeans = KMeans(n_clusters=num_clusters, random_state=42)

# Производим кластеризацию на основе масштабированных числовых данных
kmeans.fit(scaled_data)

# Добавляем метки кластеров в DataFrame
res_clustering['Second_cluster'] = kmeans.labels_
```

Рис. 9. Визуализация оценки кластеризации метриками инерции и силуэта с неотмасштабированными данными

колёс для каждого кластера и выбираются случайные N кластеров для отображения.

На рис. 10 представлена визуализация 4-го и 21-го кластеров моделью k -means.

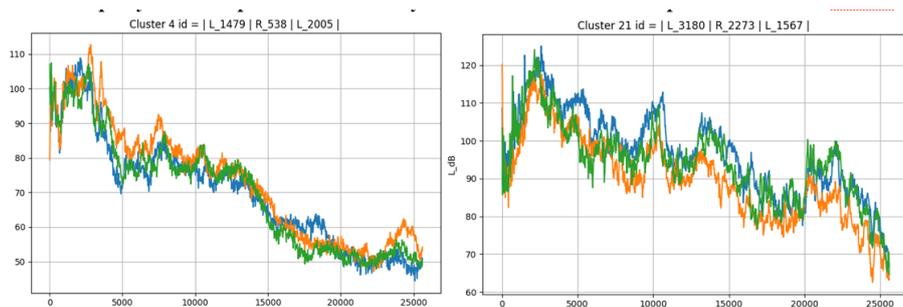


Рис. 10. Визуализация 4-го и 21-го кластеров моделью k -means

По графикам видно, что кластеризация по статистическим показателям довольно хорошо справилась со своей задачей.

Далее была проведена кластеризация методом Agglomerative Clustering. Оценка силуэта, представленная на рис. 11, в этом случае показала меньшее число кластеров, а именно 18, что несомненно оказывает влияние на качество кластеризации.

На рис. 12 представлена визуализация 7-го и 13-го кластеров моделью Agglomerative Clustering.



Рис. 11. Визуализация оценки кластеризации Agglomerative Clustering метрикой силуэта

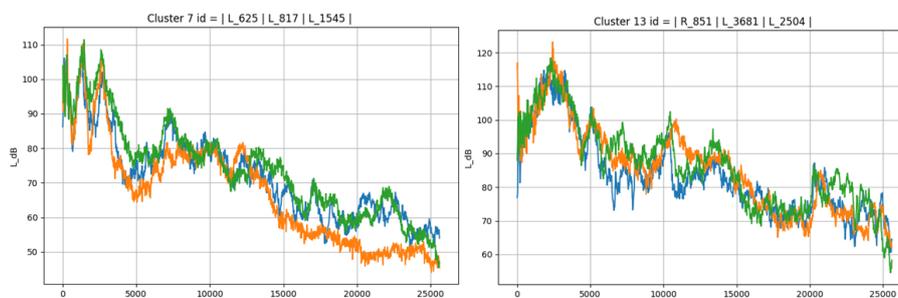


Рис. 12. Визуализация 7-го и 13-го кластеров моделью Agglomerative Clustering

Данная модель справилась хуже: оранжевый график на второй половине немного расходится с другими двумя и число кластеров получилось меньше, чем при использовании модели *k*-means.

3.3. Кластеризация по всем данным. Чтобы оценить, как хорошо справилась кластеризация по статистическим показателям, было решено провести кластеризацию по всем имеющимся данным, а именно объединить таблицы со статистикой и значениями графиков в одну.

Была применена модель *k*-means, так как она показала более лучшие результаты на прошлых итерациях. Для оценки была выбрана другая метрика – Davies-Bouldin Index.

Davies-Bouldin Index измеряет среднее расстояние между каждым кластером и его самым похожим кластером, делённое на сумму внутрикластерных дисперсий [5]. Низкое значение этого индекса указывает на лучшее разделение кластеров. Davies-Bouldin Index вычисляется по формуле:

$$DB = \frac{1}{k} \sum_1^k \max_{j \neq i} \frac{\sigma_i + \sigma_j}{d(c_i, c_j)}.$$

Результаты оценки методом k -means метрикой Davies-Bouldin Index представлены на рис. 13.

```
Количество кластеров: 15, Davies-Bouldin Index: 2.0991405747194265
Количество кластеров: 16, Davies-Bouldin Index: 2.185810579352497
Количество кластеров: 17, Davies-Bouldin Index: 2.217394763817129
Количество кластеров: 18, Davies-Bouldin Index: 2.277211578958847
Количество кластеров: 19, Davies-Bouldin Index: 2.3574947003631306
Количество кластеров: 20, Davies-Bouldin Index: 2.3790367356201774
Количество кластеров: 21, Davies-Bouldin Index: 2.457389562830074
Количество кластеров: 22, Davies-Bouldin Index: 2.3620052082750793
Количество кластеров: 23, Davies-Bouldin Index: 2.4915251897120116
Количество кластеров: 24, Davies-Bouldin Index: 2.4960292905588766
Количество кластеров: 25, Davies-Bouldin Index: 2.465408883081157
Количество кластеров: 26, Davies-Bouldin Index: 2.5113393402354447
```

Рис. 13. Оценка кластеризации k -means метрикой Davies-Bouldin Index

При увеличении числа кластеров Davies-Bouldin Index также возрастает, что называется на ухудшении кластеризации. Но при количестве кластеров, равных 22, Davies-Bouldin Index уменьшается на 0.1 по сравнению с предыдущим значением. Это означает, что кластеризация на 22 кластерах имеет лучший результат, чем на 21 и 23.

На рис. 14 приведена визуализация 16-го кластера моделью k -means.

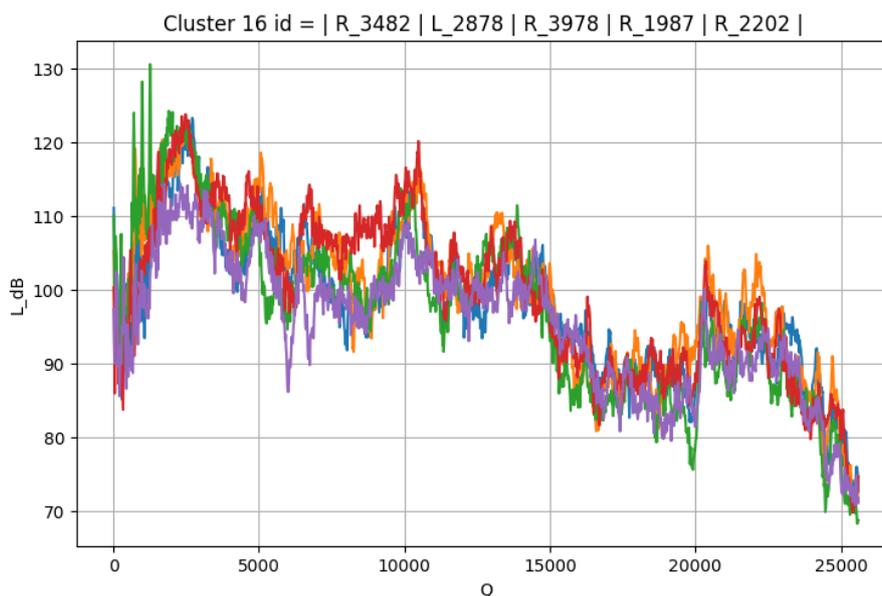


Рис. 14. Оценка кластеризации k -means. Визуализация 16-го кластера моделью k -means

Все графики близко расположены друг к другу для всех полученных кластеров, что свидетельствует о высокой точности кластеризации.

4. Классификация

Полученные значения кластеризации добавляются к таблице графиков. Эти значения будут целевыми для классификации, наряду с несколькими статистическими. В качестве модели было решено взять CatBoost.

CatBoost позволяет использовать категориальные признаки напрямую, без необходимости их предварительной обработки, что делает эту модель идеальным выбором для задач с небольшим объемом данных. Кроме того, она обеспечивает повышенную точность за счёт снижения риска переобучения и поддерживает обучение на нескольких GPU [6].

Были проведены эксперименты с различными пропорциями в разделении наблюдений на тренировочную и тестовую выборки. Лучшим для данной задачи оказалось разделение 85 % на 15 %.

На рис. 15 показаны результаты оценки классификации.

```
Train score: 0.87631973145
Test score: 0.74913485317
```

Рис. 15. Оценка кластеризации k -means

Данная модель классификации показывает довольно высокий результат по точности: 87,63 % на тренировочных и 74,91 % на тестовых данных.

5. Заключение

Эта работа направлена на поиск оптимальной модели машинного обучения для решения задачи кластеризации вибродиагностических данных. В рамках исследования были рассмотрены различные модели и методы, включая k -means, Agglomerative Clustering, TimeSeriesKMeans и CatBoost.

Результаты оценки различными метриками кластеризации моделями машинного обучения приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты оценки кластеризации

Модель	Inertia	Silhouette score	Davies-Bouldin Index
TimeSeriesKMeans (на знач. графиков спектра)	130	19 %	–
k -means (на статистич. данных)	3,25	86,7 %	2,1893
Agglomerative Clustering (на статистич. данных)	–	85,2 %	2,1624
k -means (На всех данных)	2,95	88,4 %	2,3620
Agglomerative Clustering (на всех данных)	–	83,6 %	2,3646

Модель k -means с задачей кластеризации справилась лучше, чем Agglomerative Clustering, как на статистических данных, так и на всех данных в совокупности (статистические параметры и значения графиков широкополосных спектров). Модель

TimeSeriesKMeans показала себя хуже остальных, но не маловажной для статистики.

В ходе работы было выяснено, что разбиение кластеризации на два этапа: по поведению графиков и по статистике – справилось не хуже кластеризации по всем имеющимся данным в целом, а также, что масштабирование данных играет важную роль в результатах кластеризации и является неотъемлемой её частью.

Литература

1. Введение в машинное обучение. URL: <https://habr.com/ru/post/448892/t/004793/Cpyто-1.pdf> (дата обращения: 02.05.2024).
2. Перчев Н.Г. Статистические методы анализа данных: М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2013. 215 с.
3. Анализ временных рядов, применение нейросетей. URL: <https://habr.com/ru/articles/693562/> (дата обращения: 03.05.2024).
4. Официальная документация Scikit-learn. URL: [URL:https://scikit-learn.org/stable/index.html](https://scikit-learn.org/stable/index.html) (дата обращения: 03.05.2024).
5. Николенко С.И., Кудрин А.А., Архангельская Е.О. Глубокое обучение. СПб.: Питер, 2019. 481 с.
6. Официальная документация CatBoost. URL: <https://catboost.ai/en/docs> (дата обращения: 03.05.2024).

APPLICATION OF MACHINE LEARNING MODELS FOR QUALITY CONTROL OF VIBRODIAGNOSTIC DATA

T.E. Boldovskaya

Ph.D. (Techn.), Associate Professor, e-mail: boldovskaya73@gmail.com

I.V. Bersenev

student, e-mail: ilyabersenev2002@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. Article aims to determine the most effective machine learning model for clustering vibration diagnostics data. The research includes analysis of various models and methods such as k -means, Agglomerative Clustering, TimeSeriesKMeans and CatBoost. The goal is to select a method that can best identify the data structure and improve understanding of the characteristics of vibration signals. The results of the study can be useful for the development of effective monitoring and diagnostic systems for equipment, as well as for improving the reliability and performance of technical systems.

Keywords: times series, data clustering, k -means, Agglomerative Clustering, time data.

Дата поступления в редакцию: 31.05.2024

ГЕОМЕТРЫ И ТОПОЛОГИ НОВОСИБИРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА В 1960-Е ГОДЫ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Рассказывается о геометрах и топологах Института математики им. С.Л. Соболева СО АН СССР, которые частично работали на кафедре геометрии и топологии Новосибирского государственного университета в 1960-е гг.

Ключевые слова: геометры, топологи, кафедра геометрии и топологии, Новосибирский государственный университет.

Введение

Своё лидерство в XX веке отечественная геометрия продемонстрировала благодаря тому методу, с помощью которого Григорий Перельман решил проблему Пуанкаре. Успех был достигнут в силу того, что Перельман – аспирант А.Д. Александрова – знал обобщённую риманову геометрию [1, р. 29, 33, 36], созданную Александром Даниловичем Александровым в Ленинградском университете. Американец Гамильтон, разработав потоки Риччи, не смог найти путь к доказательству гипотезы Пуанкаре, поскольку не был знаком с работами ленинградских геометров. Об этом заявил геометр Михаил Громов, сам воспитанник Ленинградского университета, использовавший теорию А.Д. Александрова после своей иммиграции из СССР.

«Григорий Перельман помимо прочих математических инноваций, позволивших преодолеть трудности, с которыми столкнулись занимавшиеся гипотезой Пуанкаре математики, развил и применил для анализа потоков Риччи сугубо ленинградскую теорию пространств Александрова, своего научного руководителя по аспирантуре и создателя ленинградской школы геометрии. <...> Отметим, что роль ленинградской школы в решении гипотезы Пуанкаре вообще остаётся за кадром, её в упор не замечают» [2].

Теория пространств Александрова, как их сейчас называют, создавалась в конце 1940-х и в 1950-е годы. Отчасти она была опубликована в ГДР [3]. Кроме того, в 1962 г. вышла монография А.Д. Александрова и В.А. Залгаллера [4]. Можно сказать, что это публикации, как сейчас говорят, не в журналах Q1. Но были и публикации в переводимом на английский язык советском журнале «Успехи математических наук» [5, 6]. Причём соавтором второй статьи был Перельман, тогда аспирант. Но кто читает русские работы...

В 1964 г. А.Д. Александров был освобождён от должности ректора Ленинградского университета. Его избирают академиком АН СССР по Сибирскому отделе-

нию, и он переезжает в Новосибирск, в Академгородок. В Институте математике СО АН СССР А.Д. Александров возглавляет отдел «Обобщённой римановой геометрии», а в Новосибирском государственном университете он становится заведующим кафедрой геометрии и топологии. Однако его интересы перемещаются в аксиоматическую теорию относительности, которую он называл *хроногеометрией* [7].

1. Кафедра геометрии и топологии

На момент приезда А.Д. Александрова в Академгородок в Новосибирском государственном университете имелась кафедра геометрии и топологии.

Кафедра возникла в 1961 г. в результате разделения кафедры алгебры и геометрии на кафедру алгебры и математической логики и кафедру геометрии и топологии. Ею до 2000 г. последовательно заведовали математики, приехавшие в созданный в Сибири научный центр Академии наук СССР: академик АН Казахской ССР А.Д. Тайманов (1961–1968), академик АН СССР А.Д. Александров (1968–1980), профессор, доктор физ.-мат. наук Ю.Ф. Борисов (1980–1992), профессор, доктор физ.-мат. наук В.И. Кузьминов (1992–1999). О них, а также о первых геометрах и топологах Института математики, я расскажу ниже.

Обычно рассказы о математиках содержат биографические сведения и, главным образом, их научные достижения. В моих рассказах этого практически нет, всё это можно найти, например, в базе данных Mathnet.ru. Мне хотелось представить их личности не с чужих слов, а через то, какими они являлись в общении со мной. Я пытался найти в Интернете их фотографии, сделанные в 1960-е или близкие к тому времени. Но это удалось лишь отчасти. Как люди непубличные, они редко попадали на глаза журналистам и фотографам, а снимки знакомых или учеников обычно оседают в их личных фотоархивах. Поэтому то, что удалось найти, увы, весьма низкого качества.

Первым заведующим кафедрой геометрии и топологии был А.Д. Тайманов.

Тайманов Асан Дабсович (1917–1990). Ученик П.С. Новикова.

Доктор физико-математических наук, академик АН Казахской ССР. Специалист в области топологии, математической логики и теории моделей.

Окончил Уральский педагогический институт (1936). Ассистент кафедры Уральского педагогического института (1936–1938), аспирант Московского педагогического института (1938–1941, 1945–1947). Воевал в народном ополчении с 1941 по 1945 г.

До 1961 г. все работы А.Д. Тайманова лежат в области общей топологии, затем в области математической логики, а с 1970 г. вновь это статьи топологического содержания.

Кандидатская диссертация: О квазикомпонентах несвязных множеств (1947).

Докторская диссертация: Некоторые вопросы распространения отображений (1961).

Ученики: Ж. Альмагамбетов (1965), А. Омаров (1967), Н. Хисамиев (1968), Т. Шаяхметов (1970) Т. Мустафин (1971), А. Нуртазин (1974), М. Еримбетов (1975), Б. Дроботун (1977), Б. Байжанов (1981), Б. Омаров (1983), М. Бекенов (1984), Т. Нурмагамбетов (1984), Е. Байсалов (1991), А. Викентьев (1992) (все диссертации в области алгебры и математической логики).

Асан Дабсович начал читать во втором семестре 1965/66 г. на нашем курсе дисциплину «Математическая логика», которая продолжилась в первом семестре второго курса.

Я был очарован содержанием лекций и стал дополнительно читать разные книги по матлогике. Лектор часто изображал в виде картинок ход доказательства теорем. В нем сказывался геометр. Экзамен я сдавал лично Асану Дабсовичу, причём увлечённо, – мне хотелось сообщить ему как можно больше из того, что я знаю по тому или иному вопросу. Получил оценку «отлично». В следующем семестре я стал ходить к Тайманову на спецсеминар. Вместе со мной ходил и Женя Палютин, ставший со временем профессиональным логиком, профессором. Мне было предложено изучить книгу Робинсона «Nonstandart Analysis», которую Тайманов готовился издать на русском языке. Мне сия книга не очень понравилась, и я с позволения руководителя занялся изучением логики бесконечно длинных формул. На эту тематику я вышел самостоятельно. Через сорок лет я узнал, что такие формулы появляются при доказательствах корректности компьютерных программ. Наше будущее присутствует в нашем прошлом, и, видя день сегодняшний, мы видим часто будущее, хотя не осознаём это.



А.Д. Тайманов

Увы, через полгода Тайманов был избран академиком в Казахстане и уехал в Алма-Ату. Когда он вернулся в Новосибирск, я уже специализировался на кафедре геометрии и топологии. Оказалось, Асан Дабсович запомнил меня, и когда я защищал докторскую в 1987 г. в Институте математики, он, неожиданно для многих, выступил с поддержкой моей работы.

Через два-три года я приехал в Академгородок, и он, увидев меня в Институте, позвал в свой кабинет, показал мне книгу R. Goldblatt'a «Orthogonality and spacetime geometry» и предложил сделать её перевод на русский язык и издать. В этой книге переплетались математическая логика и основы теории относительности. В одной главе предлагалась формальная теория специальной теории относительности, опиравшаяся на теорему Александра–Овчинниковой.

– Вы знаете и то и другое, вам и переводить и редактировать, – сказал Асан Дабсович.

Увы, перевести книгу не было проблемой, а вот издать её в те времена было проблематично – требовались, например, значительные финансовые вложения, которых у меня, особенно после расходов, связанных с защитой диссертации (оплата машинистки, поездки в издательство и пр.), не было. Я с ним связался позже, объяснил ситуацию, и мы написали рецензию на книгу, которая была опубликована в

разделе рецензий журнала «Bulletin of the AMS» (1989. Vol. 21, No. 1. P. 199–200). Увы, когда пришли отгиски, Асана Дабсовича уже не было на этом свете. Думаю, это была последняя его публикация.

Но любовь к математической логике, которую зажёл во мне Асан Дабсович, осталась. Много позже, в начале XXI в., я разработал и читал курс «Математическая логика и теория алгоритмов» на факультете компьютерных наук ОмГУ, а также издал книгу по материалам лекций. Переизданная в издательстве УРСС, она пользуется определённой популярностью. Видимо, из-за её краткости и из-за пропуска доказательств теорем.

2. Геометры и топологи Института математики СО АН СССР

Новосибирский государственный университет в 1960-е гг. не имел штатных преподавателей. Все они были совместителями с основным местом работы в институтах Академии наук СССР.

Постараюсь перечислить геометров и топологов, работавших преподавателями в НГУ, и каким-то образом их охарактеризовать. Не все они были преподавателями кафедры геометрии и топологии. Некоторые работали на кафедре математического анализа, которую возглавлял геометр и будущий академик Ю.Г. Решетняк.

Александров Александр Данилович (1912–1999). Выпускник физического факультета Ленинградского университета (ЛГУ). Ученик физика В.А. Фока и математика Б.Н. Делоне.

Александр Данилович появился в Академгородке в 1964 году в возрасте 52 лет. Был полон энергии, стал читать лекции на общественно-философские темы, на которые собиралось более сотни студентов и сотрудников разных институтов СО АН СССР.

Старшекурсники посоветовали мне пойти на лекцию, которую он объявил в НГУ, где-то в ноябре 1965 г.:

– Сходи! Такое ты вряд ли где услышишь!

Я пошёл. Александров поднялся по лестнице, шагая через две ступени на 3-й этаж, и мы, т. е. подобные мне, ждавшие его перед аудиторией, кинулись за ним. Не помню, о чём он говорил, но когда он вдруг стал говорить, что правительство действует неверно, у меня померкло в глазах... Такого мне в жизни действительно ещё слышать не доводилось – оказывается, правительство может ошибаться!

В это время А.Д. Александров закончил свои исследования в области дифференциальных уравнений и погрузился в *хроногеометрию*, под которой он понимал построение теории пространства-времени, основанной на понятии причинности. Фактически эта тема становилась для него основной вплоть до 1980-х, когда он полностью ушёл в создание учебников по геометрии для школьников. Хроногеометрию



А.Д. Александров

А.Д. Александров ставил, по свидетельству Ю.Ф. Борисова, на первое место среди всех своих научных достижений (см. [8]).

По хроногеометрии он подготовил в Сибири шесть кандидатов наук, двое из которых стали докторами [9]. Полную информацию о его исследованиях и учениках можно посмотреть, например, в [9].

Борисов Юрий Фёдорович (1925–2007) – ученик и друг А.Д. Александрова. Переехал из Ленинграда в Сибирь вместе со своим учителем в 1964 г.



Ю.Ф. Борисов

В 1980–1992 гг. заведовал кафедрой геометрии и топологии.

Кандидатская диссертация: Многообразия ограниченной кривизны с краем (1950).

Докторская диссертация: О связи внешней и внутренней геометрии гладких поверхностей (1961).

Ученики: В.Н. Берестовский (1979), В.В. Усов (1980), Г.С. Шефель (1986), М.Н. Подоксёнов (1989).

Весной 1967 г. Юрий Федорович начал читать на мехмате спецкурс «Риманова геометрия». Читал он прекрасно, красиво писал формулы на доске. Автор статьи настолько проникся содержанием курса, что когда в букинистическом магазине увидел книгу Мак-Витти «Общая теория относительности и космология», то вдруг осознал, что понимает, о чём она – основой была риманова геометрия.

Ю.Ф. Борисов был назначен моим научным руководителем, когда на заседании кафедры геометрии и топологии на 4-м курсе осенью 1968 г. распределяли студентов, записавшихся для специализации на кафедре. К нему я попал после того, как на вопрос А.Д. Александрова, понравилась ли мне статья «Contribution to chronogeometry», которую он дал мне для ознакомления в мае, я ответил: «Нет, там что-то не то, там нет физики» (там я не увидел желанной общей теории относительности). Александр Данилович возмутился: «Да на эту тему докторские можно понаписать! А он, видите ли, не увидел физику». В общем, приписали меня к Ю.Ф. Борисову. Ну, а обе мои диссертации были хроногеометрическими.

Когда позже мы с Ю.Ф. Борисовым общались, то я стал просить его дать мне тему для курсовой работы на пересечении римановой геометрии и общей теории относительности. Выдача конкретной темы затянулась на семестр, и в январе Борисов сказал мне, что переговорил с А.Д. Александровым, и тот забирает меня к себе. В конце января 1969 г. я получил задание от А.Д. Александрова, состоящее в нахождении физических условий, при которых в лоренцевом многообразии возможны временные петли, т. е. работает природная машина времени. Задачу эту мне удалось решить уже в аспирантуре, в мае 1972 г.

С Юрием Федоровичем позже установились хорошие отношения. Когда я приезжал в Академгородок, а поезд приходил утром, то, как то сложилось, звонил ему, и он приглашал меня на завтрак. Пили не только чай и говорили о науке. Вставал он

рано, в 6 утра, и пытался решить свою задачу о границе между классической дифференциальной геометрией и обобщённой. Было это продолжением его докторской диссертации. Фигурировала гипотеза показателя $\alpha = 1/2$ в классе гладкости $C^{1,\alpha}$, но, несмотря на десятилетия усилий, продвинуться в решении ему так и не удалось. У меня была потом задача, которую я решал несколько лет – чего только не придумывал. Но вдруг вспомнил мучения Юрия Фёдоровича, его гипотезу, и понял, что надо остановиться. Не мне добивать мою задачу... мне же она не по силам.

Где-то за год до своей кончины Юрий Фёдорович вдруг позвонил мне. Сказал, что изучает мою книгу «Элементы теории времени»:

– Удивительно, что на обложке Вы поместили картину Лукаса Кранаха Старшего... В Эрмитаже мне нравилось смотреть картины этого художника.

Он был единственным, кто узнал автора использованной мной картины.

Юрий Фёдорович писал рецензию на учебник С.П. Новикова и др. «Современная геометрия». Было сделано более 80 существенных замечаний по содержанию. Новиков позвонил А.Д. Александрову и раздражённо спросил: «Кто такой Борисов?» Было сказано, что Борисов – прекрасный геометр. Насколько могу судить, ошибки не были, в общем-то, учтены. Об этом мне сказал В.И. Кузьминов, когда книга поступила в магазины.

Боровский Юрий Евелиевич. Ученик А.Д. Александрова.

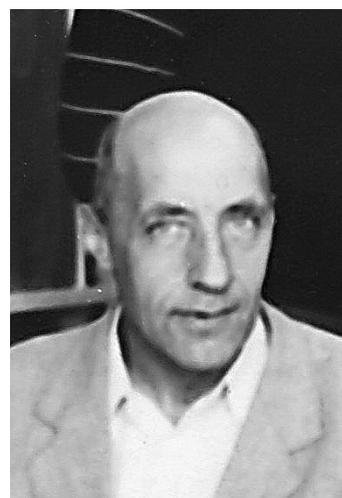
Кандидатская диссертация: Обобщённые решения вполне интегрируемых систем Пфаффа (1959).

Докторская диссертация: О системе инвариантов, разделяющих неконгруэнтные алгебраические многообразия в алгебраическом пространстве Клейна (1974).

ВАК на три года отложил утверждение докторской диссертации Ю.В. Боровского. Наконец, А.Д. Александров и С.Л. Соболев написали в ВАК письмо с просьбой ускорить принятие решения. После этого письма диссертацию окончательно одобрили.

И это было не единственное несправедливое испытание в его жизни [11].

Высокого роста, лысая голова, странности в одежде. Его панически боялись студенты. За день он принимал экзамен у 1–2 студентов. Оценка была стандартная – «неудовлетворительно». Когда я сдавал дифференциальную геометрию, Боровский пошёл вдоль прохода и спросил: «Кто готов?» Он был уже в трёх шагах от меня – я впервые ощутил, что такое смертельный ужас. И тут передо мной вдруг вскочил рыжеволосый Василенко, мой одношкольник, будущий профессор, и из него вылетело: «Я». Боровский сел рядом с ним и начал спрашивать... Меня забрал экзаменоваться проф. Борисов. Я получил где-то через час «отлично», а Василенко к концу дня «неудовлетворительно». До этого в жизни у него были только отличные оценки.



Ю.Е. Боровский

Много позже я спросил Ю.Ф. Борисова: «Зачем Боровского приглашают принимать экзамены, ведь он ставил только двойки». Добрейший Юрий Фёдорович ответил что-то в таком роде: «Ну... он успевал принимать экзамен всего у 1–2 студентов, и у нас так появлялись неудовлетворительные оценки. А, вообще-то, он очень хороший человек».

Когда я приезжал в Академгородок и делал доклады на заседаниях кафедры, Юрий Евелиевич всегда приходил, очень внимательно слушал, а потом стал приглашать меня прогуляться. Как правило, мы шли по академгородскому лесу к его дому, и он рассказывал о своих исследованиях. Не был он на моем докладе только однажды, после того, как его не избрали на должность, кажется, доцента кафедры геометрии и топологии. Наш заведующий А.Д. Александров был в бешенстве, стоя в вестибюле университета, громко кричал в адрес одного из тех, кто, видимо, был против, что тот антисемит.

Но после моего того вышеупомянутого доклада, когда мы вышли из университета, со скамейки поднялся Юрий Евелиевич, подошёл и сказал, что он дал клятву не входить в двери университета, и что он не смог это сделать и сегодня, хотя очень хотел меня послушать. И мы пошли прогуливаться.

Я обращался к нему «Юрий Евелиевич», но он настаивал, что он «Юра». Когда через десятилетия он позвонил мне из США: «Привет, Юра звонит! Слушай, я обязательно через месяц пришлю тебе в твой журнал статью...» – я не сразу понял, какой Юра знает меня в Америке. Понял, когда вспомнился его голос. Статью он прислал. Написанную от руки.

О нём мне говорили многие уважаемые мной математики, что Боровский очень математически образован, и его часто трудно слушать, поскольку он использует сложнейшие математические понятия и конструкции.

Как-то во время прогулок он мне сказал, что решил заняться проблемой порождения временных цепей, как он выражался, т. е. созданием машины времени, и вскоре покажет мне, что у него получается. Это было моей темой исследований, предложенной ещё для дипломной работы А.Д. Александровым. Увы, я не дождался этой его работы.

Ивановский Лев Николаевич (1935–1999).

«Кандидат физико-математических наук. Специалист в области алгебраической топологии. Окончил среднюю школу № 11 г. Уфы с золотой медалью. В 1963–1999 гг. работал в Институте математики им. С.Л. Соболева в отделе анализа и геометрии. Старший научный сотрудник. Автор около 30 научных работ. В студенческие годы опубликовал работы, отмеченные в сборнике Советская математика за 40 лет [13].

Кандидатская диссертация: Когомологии алгебр Хопфа и некоторые гомотопические группы сфер (1966). Защита в Новосибирском государственном университете.

Ученики: В.В. Вершинин (1978), [В.П. Голубятников (1979)].

В 1960-е был секретарём кафедры геометрии и топологии. Вся документация кафедры помещалась в толстом портфеле, который Лев Николаевич всё время носил с собой (так в те времена делали многие).

Маленького роста, полный.



Л.Н. Ивановский [13]

Когда автор сдавал в 1972 г. кандидатский минимум, то ему попался вопрос об аналитической структуре многообразия из книги Хелгасона. Пока искали аудиторию для проведения экзамена и ходили по этажам и лестницам, Ивановский попросил рассказать доказательство ему. А когда наконец нашли свободную аудиторию (в деканате), то Лев Николаевич заявил, что первый вопрос Гуц знает на «отлично». Сразу перешли к второму вопросу «Типы Петрова». Я сидел, члены кафедры вместе с академиком А.Д. Александровым стояли и слушали. Потом поблагодарили – теорема Петрова была новостью для них, – поставили «отлично» и занялись другими аспирантами.

Мне думается, что Лев Николаевич с этого момента стал ко мне очень хорошо относиться, и когда потом я приезжал в Новосибирск и приходил в Институт математики, то Ивановский всегда доверительно со мной беседовал на разные темы.

Так, однажды он сказал мне про одного нашего знакомого молодого математика, что его успешное начало в науке и прекрасная стартовая работа вряд ли повторятся в будущем – останется только то, что уже сделано. Будущее пришло, и, увы, Лев Николаевич был прав. Но скорее он хотел мне этим сказать, что не надо ждать быстрого успеха – надо вкалывать!

На первом курсе я сдавал Ивановскому экзамен по аналитической геометрии, лекционный материал по которой, начитанный И.А. Шведовым, вызывал у меня ужас (сплошные $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, ничего не понимал, но аккуратно всё выучил). Получил «отлично». Ивановский веселился, видимо, я удачно отвечал на вопросы.

Ушёл из жизни Лев Николаевич неожиданно рано.

Ионин Владимир Кузьмич (1935–2014). Ученик А.И. Фета [12, с. 91] и Г.Д. Суворова.

Окончил Томский университет. Работал в Институте математики с 1962 по 2003 г. Опубликовал более 36 работ.

Кандидатская диссертация: Некоторые задачи для выпуклых поверхностей с ограничениями на кривизну (1963).

Докторская диссертация: Внешнегеометрические свойства выпуклых гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны и некоторые геометрические свойства неполных римановых пространств неположительной кривизны (2001).

Ученики: Ю. Никоноров (1995).

В 1938 г. отца Ионина, убеждённого коммуниста, осудили и расстреляли, а в 1956 г. реабилитировали. Думается, горечь этой потери он ощущал всю жизнь. Где-то в 1987 г. мы шли с ним от НГУ вверх по ул. Ильича. Впереди шёл А.Д. Александров, окружённый геометрами. И вдруг Владимир Кузьмич произнёс:

– Вот, Александров всё продолжает говорить, что наша перестройка не учитывает опасность от США и надо быть бдительными... Да это СССР угроза всему миру!

Время показало, что Александров был прозорливей.

В мае 1966 г. я сдавал Владимиру Кузьмичу зачёт по математическому анализу. Он давал мне задачу за задачей по определению гладкости двумерных поверхностей... Все уже сдали зачёт, а мы всё сидим, и я всё решаю. Сидели еще часа три. Я уже ничего не соображал. И он вдруг говорит: «Ну, что? Поняли, как увидеть, что поверхность гладкая?» Невообразимо, но я вдруг осознал, что понял! «Да», – говорю. «Зачтено». Лет через десять я спросил его, помнит ли он тот зачёт. «Помню, – говорит с мрачным видом. – Пришлось помучиться, сейчас вижу, что не зря старался».

Владимир Кузьмич сделал выдающееся и удивительное открытие в математике – Γ -структуры, как он их назвал [14]. И Ионин, и я их использовали при аксиоматизации теории относительности.



В.К. Ионин

Кузьминов Владимир Иванович (1936–2012). Ученик Ю.М. Смирнова (МГУ).



В.И. Кузьминов [13]

«Доктор физико-математических наук, профессор (1982). Специалист в области общей и алгебраической топологии, геометрической алгебры и теории категорий. С 1961 г. работает в Институте математики им. С.Л. Соболева. Заведующий лабораторией топологии и хроногеометрии. Автор более 100 научных работ» [13].

Кандидатская диссертация: Один пример из гомологической теории размерности (1962).

Докторская диссертация: Гомологическая теория размерности. Производные функторы проективного предела в гомологической теории топологических пространств (1975).

Подготовил 10 кандидатов наук, трое учеников стали докторами наук и профессорами.

Ученики: В.Д. Лисейкин, В.Р. Кирейтов, И. Иомдин (1974), Б.И. Ботвиник (1984), Н.В. Глотко (1984), А.А. Хусаинов (1991), Я.А. Копылов (2000).

В 1980 г., приехав из Омска на повышение квалификации в НГУ, я пришёл к Владимиру Ивановичу на спецсеминар, на котором изучали недавно вышедшую книгу Милнора и Сташефа «Характеристические классы». В перерыве он спросил меня:

– А сколько Вам лет?

– 32.

– Александр Константинович, так Вам уже поздно изучать алгебраическую топологию, её можно освоить до 25 лет.

Не надо говорить, что после этого я засыпал с этой книгой, читал, изучал, но... перевернув последнюю страницу, понял, что Кузьминов прав – спецом в этой науке мне не быть.

В тот же мой приезда в Академгородок, я попытался попасть в Дом учёных на концерт пианиста Генриха Нейгауза. Увы, билетов не было. Я уже направился в общежитие и тут меня окликнули. Это был Владимир Иванович:

– Александр Константинович, у меня есть свободный билет. Берёте?

О! Конечно! Я всегда побаивался Кузьминова, и тут он раскрылся так, что я и подумать не мог...

Позже, лет через пять у нас с ним была одна беседа. Трудная для меня, и Владимир Иванович опять меня удивил. Но об этом я уже писал, вспоминая встречи с Р.И. Пименовым [10].

В.И. Кузьминов являлся выдающимся учёным, специалистом в области топологии и гомологической алгебры. Его основные достижения принадлежат области применения методов алгебраической топологии в теории общих топологических пространств. Ему принадлежит решение известной проблемы П.С. Александрова о диадичности пространства произвольной компактной топологической группы. В связи с решением этой проблемы он установил, что пространство произвольной нульмерной компактной топологической группы гомеоморфно обобщённому канторову дисконтинууму.



В.А. Шарафутдинов, И.Н. Иомдин, А.Ю. Черевикин,
В.И. Кузьминов, С.А. Тресков, В.Н. Шухман

В работах, выполненных в течение последних пяти лет совместно с И.А. Шведовым, ряд идей и методов, предложенных ранее для изучения комплексов де Рама дифференциальных форм, были перенесены на случай произвольных эллиптических дифференциальных комплексов.

В деревенской Карабихской школе, которую он закончил, есть стенд, где с гордостью сообщается о докторе физ.-мат. наук Кузьминове, работающем в Сибирском отделении Академии наук.

Решетняк Юрий Григорьевич (1929-2021). Ученик А.Д. Александрова.

Кандидатская диссертация: О длине и повороте кривой и о площади поверхности (1954).

Докторская диссертация: Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны (1960).

Ученики:

В. Гольдштейн (1971), [С. Водопьянов (1975)], Л. Гуров (1975), И. Майник (1978), В. Семенов (1976), В. Гичев (1979), И. Николаев (1980), М. Васильчик (1980), Е. Бронштейн (1981), Г. Василенко (1982), Д. Троценко (1984), М. Алборова (1987), И. Поликанова (1987), Т. Соколова (1991), Н. Кудрявцева (1994).

Юрий Григорьевич читал нам 2-годовой курс математического анализа. Он потом издал его как 4 тома (по семестрам). Блестящий математик и блестящий лектор, и лучшие в мире по содержанию лекции по математическому анализу. Эта дисциплина формирует математика.

Дважды летом сдавал я экзамен самом проф. Решетняку. Оба раза «отлично». Второй раз он дал мне задачу, которую я решил сразу, но применил теорему Арчела, которую дают на 3-м курсе в дисциплине «Анализ-3».

– Прекрасно! Но я не давал такой теоремы. Попробуйте найти решение в рамках моего курса.

Это было где-то в 12.00. Промучился я с решением часов до 21.00. Решения не нашёл. Но мне поставили «отлично».

Через 6 лет, на банкете по случаю защиты моей кандидатской, я осмелел и спросил его, помнит ли он тот экзамен.

– Помню.

– За что «отлично»? Я же не нашёл решение?

– Так и я не нашёл. Подумал, вдруг студент найдёт... Вы продемонстрировали множество изобретательных подходов, но нам не повезло!



Ю.Г. Решетняк

Сабинин Лев Васильевич (1932–2004). Ученик П.К. Рашевского.

Л.В. Сабинин

«Доктор физико-математических наук, профессор. Специалист в области геометрии. Автор более 125 научных работ, четырёх монографий, восьми учебных пособий» [13].

Закончил мехмат МГУ.

В 1958-1965 гг. Лев Васильевич работал в должности младшего, а затем старшего научного сотрудника в Институте математики Сибирского отделения АН СССР. Работал в области геометрии однородных пространств, алгебр и групп Ли. Исследования во многом определялись академиком А.И. Мальцевым.

Л.В. Сабинин занимался исследованиями в области гладких квазигрупп и луп, создал инфинитезимальную теорию гладких луп Вола и неассоциативной геометрии.

Кандидатская диссертация: Зеркальные симметрии римановых пространств (МГУ, 1959).

Докторская диссертация: Инволютивная геометрия алгебр Ли (Казань, 1971).

Под его руководством 15 аспирантов подготовили и защитили кандидатские диссертации, а один докторант – докторскую

Ученики: Долгарев А.И. (1991), Буэту Томас Буэту (1995) и др.

На момент моего поступления в НГУ в 1965 г. Л.Н. Сабинин уехал из Сибири. Но приезжал на конференции по геометрии, организуемые А.Д. Александровым. Отъезд из Сибири, как мне поясняли третькурсники, к которым меня подселили, связан с историей вспыхнувшей любви между ним и студенткой, на этот момент третьего курса, ставшей в будущем его женой.

В 1997 г. Л.Н. Сабинин переехал с женой в Мексику.

Топоногов Виктор Андреевич (1935–2004). Ученик А.И. Фета.

Выпускник Томского университета (ТГУ).

А.И. Фет предложил ему задачу, которая сейчас известна как теорема сравнения Топоногова, входящая во все содержательные учебники по римановой геометрии [13].

Кандидатская диссертация: Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу (1958).

Докторская диссертация: Экстремальные теоремы для римановых пространств кривизны, ограниченной сверху (1969).

ВАК тянул с утверждением докторской диссертации. А.Д. Александров стал беспокоить эту организацию, и диссертацию утвердили. Как тогда шутили, Александров обнаружил, что диссертацию Топоногова затеряли в ВАК и нашли, когда в ходе поисков увидели, что на ней сидит маленькая машинистка, подложившая её под себя, чтобы сидеть повыше.

Ученики: И.А. Швейник (1962), С.З. Шефель (1964), В.А. Шарафутдинов (1973), В.П. Голубятников (1979), Е.А. Родионов (1982), В.Ю. Ровенский (1985).

Блестящий геометр. В аспирантуре я как-то вёл за ним семинары по аналитической геометрии. Пришёл ко мне на занятия, просидел оба часа. После занятий со мной беседовал. Сказал, что по тематике и уровню задач вопросов у него нет, но плохо, что, предложив задачу, мало даю времени студентам подумать над поиском её решения.

– Дома прикиньте, сколько надо времени на поиск решения Ваших задач, а на занятии сидите и молчите установленное Вами время.

Это был очень ценный совет для молодого преподавателя.

Как он ко мне относится, я не знал – мы мало пересекались, а в 1974 г. я уехал в Омск. Как-то мы пригласили Топоногова приехать на неделю в Омск, почитать лекции студентам ОмГУ. Обедали у меня дома. И я однажды его спросил:



В.А. Топоногов

– Вы известный в мире геометр... А почему не уезжаете за границу?

– Да, наверное, меня взяли бы в приличный университет. Но.. но, там же никто не говорит по-русски. И как там тогда жить.

Отец Топоногова был репрессирован в 1930-е гг. Были у него из-за этого разные проблемы. Но он не мыслил себя вне России.

Через много лет я, будучи уже доктором, приехал в роли оппонента по докторской диссертации по математическому анализу, которую защищал мой друг Эдуард Петрович Осипов (Хейфиц). Содержание диссертации касалось функционально-операторных структур аксиоматической квантовой теории поля. Эту теорию мы с Эдиком изучили самостоятельно, он как студент физфака 5-го курса, а я аспирант мехмата 1-го курса (доклады делали друг другу каждую неделю по очереди в аудитории НГУ, которую нам выделили по заявке проф. Ю.Ф. Борисова – он числился руководителем спецсеминара. Объявления о докладах вывешивали на досках объявлений мехмата и физфака. Иногда заглядывали 2–3 студента. Семинар проработал год.).

Но вернёмся к защите. Рядом со мной сидел В.А. Топоногов, а с ним неизвестный мне солидный мужчина. Я выступил со своим отзывом и вернулся на место. И Топоногов вдруг говорит мужчине:

– Физики не взяли диссертацию к защите, взяли мы, математики. Переделали под специальность «Математический анализ», а Александр Константинович в данном случае неслучайный оппонент – он знает и функциональный анализ и квантовую теорию поля. Это редкий случай.

Я взлетел на крыльях!

Позже, в начале XXI в. я организовал в Омске выпуск журнала «Математические структуры и моделирование». Приехал в Аадемгородок, пришёл на лекции по дифференциальной геометрии к Топоногову, послушал. Лекция закончилась, он подошёл ко мне: «Рад видеть! И что у Вас нового?» Мы вышли на улицу, присели на лавочку возле университета, я показал номер журнала и спросил, не войдёт ли он в состав редколлегии. Он сразу согласился. Это была мощная поддержка журнала – геометр мирового уровня в составе редколлегии!

Виктор Андреевич вдруг сказал, что бросил курить – рак лёгких. Умер он в 2004 г.

Фет Абрам Ильич (1924–2007). Выпускник Томского университета (ТГУ).

Аспирантура в ТГУ-МГУ. Решил задачу, которую дал ему Люстерник, состоящую в вычислении кольца когомологий пространства замкнутых кривых на двумерной сфере, в продолжение работ Морса. Оппонентами на защите диссертации были в декабре 1948 г. Л.С. Понтрягин и В.А. Рохлин. Диссертация была признана выдающейся, после чего его направили на работу в Томск. «Докторскую диссертацию я защищал тоже в Московском университете в 1967 году. Она содержала некоторые общие теоремы о замкнутых экстремальных на многообразиях и была принята к защите благодаря решению Николая Владимировича Ефимова. В ту пору защищаться в Московском университете было уже, по-видимому, некоторой привилегией» [12, с. 147].

Кандидатская диссертация: Кольцо гомологий пространства замкнутых кривых на сфере (1948).



А.И. Фет

Докторская диссертация: Периодическая задача вариационного исчисления (1967).

Докторская диссертация была утверждена в ВАК спустя 8 лет после её защиты. А.И. Фет подписал одно письмо и не стал потом каяться.

Ученики: В.А. Топоногов (1955), С.И. Альбер (1957), В.И. Дискант (1964).

На первом курсе я стал ходить на спецкурс Рамазанова по вариационному исчислению. На экзамен явилось двое-трое: я, кажется, ещё сокурсник-вундеркинд Володя Шухман, и студентка 5-го курса.

У меня экзамен принимать преподаватель не стал, мол, первый курс, вряд ли, что я понял.

Предпринял я также попытку параллельно посещать семинар А.И. Фета по гладким многообразиям. Там блистал Володя Голубятников (он закончил ФМШ при НГУ). Абрам Ильич был беспощаден к слушателям, к которым он вдруг обращался. Я ничего не понимал, и с ужасом ждал, что вдруг и ко мне обратится преподаватель. В общем, сбежал.

На третьем курсе Абрам Ильич вёл у нас «Анализ-3». Читал он эти лекции по функциональному анализу блестяще. Я наслаждался, и в библиотеке всё время рыскал и изучал разные книги по функциональному анализу (хотя на 2-м курсе сдал А.М. Рубинову спецкурс «Экстремальные задачи в нормированных пространствах»).

На лекциях Фет запугивал нас экзаменом, говорил, что будет спрашивать по любой математической дисциплине 1-го и 2-го курсов. От греха подальше я повторил весь материал по математическому анализу, высшей алгебре, аналитической геометрии и даже по математической логике. Надо сказать, что после его экзамена наш курс изрядно «похудел» – многие перевелись в Красноярский филиал НГУ.

На зимнем экзамене мне достался простой вопрос и задача, которую я сразу решил. Но потом искал другое решения, боясь ошибки в первом решении. Когда результат совпал, пошёл «сдаваться».

Абрам Ильич послушал, посмотрел задачу и дал новую.

– Можно подумать?

– Дома надо было думать...

Что-то поставил в зачётку и отпустил. В коридоре сокурсники глянули – «хорошо».

Летний экзамен я сдавал дольше, отвечал сразу, «думать» не просился. Фет стал меня разглядывать...

– Что я Вам зимой поставил?

– «Хорошо».

– И сейчас ставлю «хорошо»... с Вас достаточно.

Не очень справедливо. Так думал тогда, так думал и сейчас, но зато остался «живым».

Как-то, ещё осенью, в перерыве он беседовал перед аудиторией с нашими генералами, затронули логику. Я встрепенулся, учился логике у А.Д. Тайманова, ходил к нему на спецсеминар, и влез с комментарием. Фет глянул на меня, вот точно, как удав на кролика, и произнёс медленно, оттопыривая нижнюю челюсть:

– А Вы, молодой человек, слышали звон, да не поняли о чём он...

Свет погас... звонок... добрёл до своего места в аудитории.

Тем не менее, я очень благодарен Абраму Ильичу Фету. Его жёсткость, думаю, была мне на пользу.

Кстати, на 2-м курсе я прослушал его полугодовой спецкурс по тензорному исчислению и представлениям алгебр Ли. В 1970-е читал его с Ю.Б. Румером книгу «Унитарная симметрия», где был изложен, в частности, прослушанный мною спецкурс. Уникальный и талантливый учебник.

Его изгнание из университета и из Института математики были потерями и для образования и для науки. Не помогло заступничество академика А.Д. Александрова [12, с. 92], являвшегося тогда секретарём парткома НГУ.

Не мог найти работу. Говорили, что преподавал потом в вечерней ШРМ – школе рабочей молодёжи. Он писал позже: «Я не хотел уезжать, потому что в то время в Новосибирске уже была девушка, которая впоследствии стала моей второй женой, и я вовсе не хотел уезжать от неё» [12, с. 93–94]. Отмечу, что эта девушка училась со мной в одной группе, и мы с ней вместе переживали в сессии «фетовский ужас». Жизнь непредсказуема.

Шефель Самуил Зусович (1935–1985). Ученик А.И. Фета [12, с. 90] и В.А. Топоногова.



С.З. Шефель

Доктор физико-математических наук.

Кандидатская диссертация: Внутренняя геометрия седловых поверхностей (1964).

Докторская диссертация: G-устойчивые изометрические погружения (1971).

В Институте математики проходил исследовательский семинар под руководством В.А. Топоногова и С.З. Шефеля. Оба они ученики А.И. Фета. Поэтому, как говорится, нашли друг друга. Пару раз я был на заседаниях семинара. Активным был Топоногов. Он задавал вопросы, комментировал. Самуил Зусович говорил реже, но всегда значимо.

Весной 1980 г. на семинаре подробно заслушивалась кандидатская диссертация Игоря Георгиевича Николаева. Она была весьма прорывной – «Об обобщённых римановых пространствах с ограничениями на кривизну» – и касалась геометрии пространств Александрова, сыгравших важнейшую роль в решении проблемы Пуанкаре. Через 9 лет мне довелось быть оппонентом по докторской диссертации Николаева «Метрические пространства с ограниченной кривизной и

классические римановы многообразия». Вскоре после защиты Игорь Георгиевич уехал в США.

Бурно обсуждалась на семинаре и кандидатская диссертация Маренича Валерия Борисовича «Топологическое и метрическое строение открытых многообразий неотрицательной кривизны». В 1994 году он защитил в Новосибирске уже докторскую диссертацию и позже уехал в Швецию.

Шведов Игорь Александрович (1935–2013). Ученик П.С. Александрова (МГУ).

«Кандидат физико-математических наук, профессор. Специалист в области топологии. С 1961 г. работает в Институте математики им. С.Л. Соболева, старший научный сотрудник лаборатории топологии и хроногеометрии. Преподает в НГУ. Автор более 50 научных работ» [13]. Нет, он станет доктором наук в 2008 г.

И.А. Шведов и А.И. Фет вели в НГУ топологический семинар.

Кандидатская диссертация: Проекционные спектры (1961).

Докторская диссертация: Проблемы исчисления дифференциальных форм на римановых многообразиях (2008).

Ученики: К.В. Сторожук (2001).

Игорь Александрович на первом курсе читал нам аналитическую геометрию. Он очень плохо видел, писал на доске крупными буквами, иногда приближаясь к доске вплотную. Формулы $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ описывали какие-то поливекторы – буквы с «шалашиками» между ними. Я ничего не понимал, но к экзамену всё вызубрил. И на всякий случай изучил учебники по аналитической геометрии П.С. Александрова и Н.И. Мусхелишвили.

С ним до моего выступления на кафедре весной 1974 г., уже в должности ассистента, мы не общались. А доклад мой оборвался через десять минут. Я показывал своё решение локальной проблемы Гельмгольца–Ли. Выписал на доске аксиомы и текст теоремы. И тут Игорь Александрович сказал, что теорема неверна, поскольку у него есть контрпример. Проговорил, в чём суть его контрпримера – «выскакивал» нульмерный бикомпакт, которого быть не должно! Я открывал беззвучно рот... да, Шведов прав, и, видимо, моё выступление на этом заканчивается. О чём и заявил. Заведующий А.Д. Александров объявил заседание закрытым, все стали расходиться, но по их лицам было видно, что «дело житейское», «бывает» и всё образуется. Это была поддержка дерзаниям молодого геометра. Но потребовалось пять лет, и решение было представлено Александром Даниловичем в «Доклады АН СССР» в 1979 г.

Второй раз мы общались с Игорем Александровичем еженедельно на протяжении двух месяцев, но через 11 лет. Я приехал в 1985 г. на ФПК и пришёл к нему на спецкурс, касающийся, кажется, одного способа изложения математического анализа. Он сразу с приветливой улыбкой обратился ко мне, назвал «Сашей», мол, вряд



И.А. Шведов



И.А. Шведов и А.К. Гуц. 2004

ли, что-то новое Вы узнаете. Но я очень хотел его послушать. Читал он лекции интересно и изящно. И на этот раз я всё понимал.

Последний раз мы встретились с ним после заседания в Доме учёных, посвящённого юбилею Ю.Г. Решетняка, в 2004 году. Он окликнул меня сам, что удивило меня, поскольку он плохо видел. Мы с ним побеседовали отнюдь не о математике, а о жизни, чудесной осенней погоде в Академгородке и о погоде в Омске. Нас сфотографировали.

3. Заключение

Думаю, читатель, прочитав написанное, согласится со мной, что кафедра геометрии и топологии с момента её создания состояла из геометров и топологов, получивших прекрасное математическое образование в Московском, Ленинградском и Томском университетах и собравшихся в сибирском Академгородке по воле судьбы. Они сумели внедрить в молодые умы сибиряков сложные геометрические и топологические абстракции. Это видно из перечня их учеников, у которых появились свои ученики.

Все первые члены кафедры геометрии и топологии пережили страшный период в истории нашей страны – Великую Отечественную войну. Воевал А.Д. Тайманов, а А.Д. Александров, молодой доктор наук, работал в Казани на Победу. Остальные – дети, подростки, юноши на момент начала войны, дождавшиеся Победы и устремившиеся к знаниям после окончания войны, со временем стали сильнейшими специалистами в топологии или в геометрии. Их ученики – дети солдат-победителей, которых они выучили в НГУ, продолжают начатое ими дело по распространению математических знаний в Сибири, в России и не только в ней.



Участники кузьминовского семинара: В. Лисейкин, В. Шарафутдинов, А. Черевикин, И. Иомдин, А. Кузьминых, В. Шухман (сидит)



В. Шарафутдинов, В. Голубятников, П. Речевский

Благодарности

Автор благодарит проф. В.П. Голубятникова за фотографии и справки по ряду вопросов, касающихся людей, описанных в статье.



В.И. Кузьминов. Фото из архива Карабихской школы



Новосибирский государственный университет. 1960-е

Литература

1. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0211159v1> (дата обращения: 10.05.2024).
2. Оноприенко А. Григорий Перельман. Математический детектив. URL: <https://www.aonoprienko.ru/?p=5434> (дата обращения: 10.05.2024).
3. Alexandrov A.D. Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie // Schriftenreihe der Institute für Mathematik. 1957. Hf. 1. S. 33–84.
4. Александров А.Д., Залгаллер В.А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1962. Т. 63. 262 с.
5. Александров А.Д., Берестовский В.Н., Николаев И.Г. Обобщённые римановы пространства // Успехи математических наук. 1986. Т. 41, вып. 3. С. 3–44.

6. Бураго Ю.Д., Громов М.Л., Перельман Г.Я. Пространства А.Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами // Успехи математических наук. 1992. Т. 47, вып. 2(284). С. 3–51.
7. Гуц А.К. Хроногеометрия: Аксиоматическая теория относительности. Изд. 2, испр. и доп. М.: УРСС, 2018. 352 с.
8. Борисов Ю.Ф. Вклад А.Д. Александрова в прикладную математику (к 90-летию со дня рождения) // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 3–4.
9. Гуц А.К. Александр Данилович Александров – великий геометр. К 110-летию со дня рождения // Математические структуры и моделирование. 2022. № 2 (62). С. 4–13.
10. Гуц А.К. Две встречи с Револьтом Пименовым // Математические структуры и моделирование. 2021. № 2 (58). С. 23–28.
11. Borovskii Yu.E. Memories of Alexandr Danilovich Alexandrov // Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9, С. А.12–А.15.
12. Фет А.И. Собрание сочинений: в 7 т. Rehoboth, New Mexico, USA, 2015. Т. 7: Воспоминания и размышления.
13. Персоналии. Механико-математический факультет. [Е–К] // Выпускники МГУ в Новосибирском научном центре СО РАН. 1957–2007. Новосибирск: Гео, 2007. 328 с.
14. Ионин В.К. Один способ определения аффинной структуры // Геометрический сборник (Томск). 1982. Т. 23. С. 3–16.

GEOMETERS AND TOPOLOGISTS OF NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY IN 1960S

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. It tells about geometers and topologists of the Sobolev Institute of Mathematics SB AS USSR, who partially worked at the department of geometry and topology of Novosibirsk State University in the 1960s.

Keywords: geometers, topologists, Department of Geometry and Topology, Novosibirsk State University.

Дата поступления в редакцию: 15.05.2024

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате \LaTeX (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета \LaTeX и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор \MiKTeX , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду $\text{\mbox{...}}$.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте должны быть угловыми («абвгд»), в английском — прямыми верхними ("abcdefg" или "abcdefg").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина, например: ...искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлекцией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников, – они не должны представляться как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Techn.)

к.т.н. = Ph.D. (Techn.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

dmtree@ya.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры И моделирование

№ 3 (71)

Главный редактор
А.К. Гуц

Зам. гл. ред., выпускающий редактор
Д.Н. Лавров

Зам. гл. ред., технический редактор
Н.Ф. Богаченко

Корректор:
Д.С. Нерозник

Перевод на английский язык в авторской редакции

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,

Омский государственный университет

E-mail: aguts@mail.ru, dmtrl@ya.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



Подписано в печать 07.10.2024. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 15,0. Тираж 25 экз. Заказ № 270.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



24071 >