Математические структуры и моделирование
2024. №4 (72). С. 5–14

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2024.4.5-14

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ ВЕЛИЧИН С ρ-ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

А.Г. Гринь
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Получены оценки для моментов и центральная предельная теорема для симметрических функций специального вида от величин из стационарной последовательности с ρ-перемешиванием. Для сумм случайных величин с ρ-перемешиванием такие результаты ранее были получены Магдой Пелиград.

Ключевые слова: симметрические функции от случайных величин, центральная предельная теорема, ρ-перемешивание.

Рассматриваются симметрические функции, удовлетворяющие свойству, являющемуся своеобразным аналогом правильного изменения порядка 1 для функций нескольких переменных. Получены неулучшаемые по порядку оценки моментов таких функций от величин из последовательности с ρ-перемешиванием. Эти оценки обобщают результаты М. Пелиград [1]. Для последовательностей с более жёстким φ-перемешиванием аналоги таких оценок ранее были получены автором (в качестве вспомогательных утверждений) в [2].

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена вещественнозначная функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ (т. е. определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью), удовлетворяющая следующим условиям (см., например, [2]):

f1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$; для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

f2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

f3. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$;

f4. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \sim f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, если $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})| + |f(\mathbf{x})| + +|f(\mathbf{y})| \to \infty$ (т. е. хотя бы одно из слагаемых в $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ стремится к бесконечности). Эквивалентность в f_3 понимается следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > N$, то

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|. \tag{1}$$

Свойство f4 – это и есть аналог правильного изменения порядка 1 для функций нескольких переменных (см., например, лемму 1).

Простым переобозначением переменных ($\mathbf{x}' = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}' = -\mathbf{y}$) можно сделать, чтобы в правой части (1) стояло $\varepsilon|f(\mathbf{x})|$ так, что

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon |f(\mathbf{x})|, \ |\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})| > N,$$

а для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})-f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|\leqslant\varepsilon|f(\mathbf{x})|+N,$$

и отсюда следует, что для любых $\mathbf{x_1},...\mathbf{x_k}\in\mathbb{R}^n$ имеет место

$$|f(\mathbf{x_1}+...+\mathbf{x_k})-f(\mathbf{x_1})-...-f(\mathbf{x_k})|\leqslant\varepsilon(|f(\mathbf{x_1})|+...+|f(\mathbf{x_{k-1}})|+(k-1)N, \quad (2)$$

$$|f(\mathbf{x_1}\pm...\pm\mathbf{x_k})|\leqslant(1+\varepsilon)(|f(\mathbf{x_1})|+...+|f(\mathbf{x_k})|+(k-1)N. \quad (3)$$

Следуя [3], назовём $\{b_n, n=1,2,...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]},\ x>0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ – целая часть x.

Пусть $\{\xi_n\}=\{\xi_n,\ n=1,2,...\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ – σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i:i\leqslant n\}$ и $\{\xi_i:i\geqslant n\}$, $L_{\leqslant 0}=\{\xi:\xi\ \mathcal{F}_{\leqslant 0}$ – измерима, $\|\xi\|_2=\sqrt{\mathbf{E}\xi^2}<\infty\}$, $L_{\geqslant n}=\{\eta:\eta\ \mathcal{F}_{\geqslant n}$ – измерима, $\|\eta\|_2=\sqrt{\mathbf{E}\eta^2}<\infty\}$. Будем говорить, что стационарная последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания, если

$$\rho(n)=\sup\left\{\frac{|\mathbf{E}\,\xi\eta-\mathbf{E}\,\xi\mathbf{E}\,\eta|}{\|\xi\|_2\|\eta\|_2}:\xi\in L_{\leqslant 0},\ \eta\in L_{\geqslant n}\right\}\to 0,\ \ n\to\infty$$

(см., например, [4]). Взяв в этом определении

$$\xi=\mathbf{1}(A)=\left\{\begin{array}{ll}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{array}\right.,\ A\in\mathcal{F}_{\leqslant 0},\ \eta=\mathbf{1}(B),\ B\in\mathcal{F}_{\geqslant n},$$

получим

$$|\mathbf{P}\{AB\}-\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}|\leqslant\rho(n)\sqrt{\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}}. \quad (4)$$

Будем обозначать

$$X_{k,m}=f\left(\xi_k,...,\xi_m\right),\ \ X_n=X_{1,n},\ \ \overline{X}_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|,\quad k,m,n\in\mathbb{N},$$

$\widetilde{\xi}_n=\xi_n-\xi'_n$, где последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\xi'_n\}$ независимы и имеют одинаковые конечномерные распределения. Последовательность $\{\widetilde{\xi}_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания с коэффициентом перемешивания $\widetilde{\rho}(n)\leqslant\rho(n)$ [5, Theorem 6.2]. Далее пусть

$$\widetilde{X}_{k,m}=f\left(\widetilde{\xi}_k,...,\widetilde{\xi}_m\right),\ \widetilde{X}_n=\widetilde{X}_{1,n}.$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{X}_{k,m}$ имеет симметричное распределение и, следовательно, $\mathbf{E}\widetilde{X}_{k,m}=0$.

Лемма 1. [6] *$\{c_n^\rho\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а c_n – правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho,\ \rho>0$), тогда и только тогда, когда*

$$c_{n+m}^\rho\sim c_n^\rho+c_m^\rho,\ \ n+m\to\infty.$$

Обозначение $n+m \to \infty$ здесь понимается в следующем смысле: $n \to \infty$, а $m = m(n)$ – произвольная последовательность натуральных чисел.

Лемма 2. *Если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания, $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$ и $\sigma_n^2 = \mathbf{D}X_n \to \infty$, то $\{\sigma_n^2\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.*

Доказательство. Обозначим

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = \mathbf{D}\widetilde{X}_n = \|\widetilde{X}_n\|_2^2,\ X_n' = f\left(\xi_1', ..., \xi_n'\right),\ A_n = \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_n'.$$

В силу (1) и условия f3

$$\left|\widetilde{X}_n - (X_n - A_n) + (X_n' - A_n)\right| \leqslant \varepsilon|\widetilde{X}_n| + N,$$

откуда

$$|\widetilde{\sigma}_n - \|(X_n - A_n) - (X_n' - A_n)\|_2| \leqslant \varepsilon\widetilde{\sigma}_n + N, \tag{5}$$

где ε можно сделать сколь угодно малым выбором N. Далее

$$\mathbf{E}\left[(X_n - A_n) - (X_n' - A_n)\right]^2 = 2\sigma_n^2$$

и поскольку $\sigma_n^2 \to \infty$, из (5) следует теперь $\widetilde{\sigma}_n(1 + o_\varepsilon(1)) = \sqrt{2}(1 + o_n(1))\sigma_n$, т. е. $\widetilde{\sigma}_n^2 \sim 2\sigma_n^2,\ n \to \infty$.

Пусть $m = m(n),\ r = r(n) \to \infty$. В силу (2)

$$\left|\widetilde{X}_{n+m} - \widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right| \leqslant \left|\widetilde{X}_{n+m+r} - \widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n+1,n+r} - \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right| +$$

$$+\left|\widetilde{X}_{n+m+r} - \widetilde{X}_{n+m}\right| + \left|\widetilde{X}_{n+1,n+r}\right| \leqslant \varepsilon\left(\left|\widetilde{X}_n\right| + \left|\widetilde{X}_{n+1,n+r}\right| + \left|\widetilde{X}_{n+m}\right|\right) + \left|\widetilde{X}_{n+1,n+r}\right| + 3N.$$

Отсюда

$$\left|\widetilde{\sigma}_{n+m} - \left\|\widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right\|_2\right| \leqslant \varepsilon\left(\widetilde{\sigma}_n + \widetilde{\sigma}_r + \widetilde{\sigma}_{n+m}\right) + \widetilde{\sigma}_r + 3N. \tag{6}$$

Далее из определения $\rho(n)$ выводим

$$\left|\left\|\widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right\|_2^2 - \widetilde{\sigma}_n^2 - \widetilde{\sigma}_m^2\right| \leqslant 2\left|\mathbf{E}\widetilde{X}_n\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho(r)\widetilde{\sigma}_n\widetilde{\sigma}_m \leqslant \rho(r)(\widetilde{\sigma}_n^2 + \widetilde{\sigma}_m^2),$$

и так как $\rho(r) \to 0,\ n \to \infty$, отсюда следует

$$\left\|\widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right\|_2 = \sqrt{\widetilde{\sigma}_n^2 + \widetilde{\sigma}_m^2}(1 + o_n(1)).$$

Выбрав последовательность $r(n)$ растущей столь медленно, что $\widetilde{\sigma}_r = o(\widetilde{\sigma}_n)$, с помощью (6) получим

$$\widetilde{\sigma}_{n+m}(1 + o_\varepsilon(1)) = \sqrt{\widetilde{\sigma}_n^2 + \widetilde{\sigma}_m^2}(1 + o_n(1) + o_\varepsilon(1)),$$

т. е. $\widetilde{\sigma}_{n+m}^2 \sim \widetilde{\sigma}_n^2 + \widetilde{\sigma}_m^2,\ n \to \infty$ при любой последовательности $m = m(n)$. В силу леммы 1 $\{\widetilde{\sigma}_n^2\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1, а так как $\widetilde{\sigma}_n^2 \sim 2\sigma_n^2$, то таковой же является и $\{\sigma_n^2\}$. ∎

Следующие две леммы – это обобщение соответствующих неравенств М. Пелиград из [1].

Лемма 3. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– стационарная последовательность и пусть при некоторых натуральных* n *и* r *таких,что* $l=[n/r]\geqslant 2$ *и* $a_n>0$*, выполняется*

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_l|>a_n\}+\sqrt{n/r}\rho(r)\leqslant\gamma<1,\ 2N\leqslant(1-9\varepsilon)a_n, \tag{7}$$

где $\varepsilon>0$ *и* $N>0$ *из условия (3). Тогда при любом* $x\geqslant a_n$

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n\geqslant 10x\}\leqslant\frac{1}{1-\gamma}\left(2\max_{2r\leqslant i\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_i|>4x\}+l\mathbf{P}\left\{\overline{X}_{2r}>x\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть $E_i(x)=\{\overline{X}_{i-1}\leqslant x,\ |X_i|>x\},\ i=1,2,\ldots$. Тогда $E_i(x)E_j(x)=\varnothing,\ i\neq j,\ \bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i(x)=\{\overline{X}_n>x\}$.

В силу (3)

$$|X_{(i+1)r,n}|\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}|X_{(i-1)r+j}|-|X_n|-|X_{(i-1)r+j+1,(i+1)r-1}|-\frac{2N}{1+\varepsilon},$$

$1\leqslant i\leqslant l-1,\ 1\leqslant j\leqslant r$, откуда с помощью (7) получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n\geqslant 10x\}\leqslant\mathbf{P}\{|X_n|>4x\}+\mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1}(E_i(10x),|X_n|\leqslant 4x)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}\{|X_n|>4x\}+\sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r}\left(E_{(i-1)r+j}(10x),|X_{(i+1)r,n}|\geqslant 4x\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r}\left(E_{(i-1)r+j}(10x),|X_{(i-1)r+j+1,(i+1)r-1}|\geqslant x\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=(l-1)r+1}^{n}\mathbf{P}\left\{E_i(10x),|X_{i+1,n}|\geqslant 6x\right\}\leqslant\mathbf{P}\{|X_n|>4x\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r}E_{(i-1)r+j}(10x)\right\}\mathbf{P}\left\{|X_{(i+1)r,n}|\geqslant 4x\right\}+$$

$$+\rho(r)\sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{P}^{1/2}\left\{\bigcup_{j=1}^{r}E_{(i-1)r+j}(10x)\right\}\mathbf{P}^{1/2}\left\{|X_{(i+1)r,n}|\geqslant 4x\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant r}|X_{(i-1)r+j+1,(i+1)r-1}|\geqslant x\right\}+\mathbf{P}\left\{\max_{(l-1)r+1\leqslant i\leqslant n}|X_{(i+1)r,n}|\geqslant x\right\}. \tag{8}$$

Обозначим $R_n(x) = \max\limits_{2r\leqslant l\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_{l,n}| > x\} = \max\limits_{2r\leqslant l\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_{n-l+1}| > x\}$, $S_m(x) = \mathbf{P}\left\{\overline{X}_m > x\right\}$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}^{1/2}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(10x)\right\}\mathbf{P}^{1/2}\left\{|X_{(i+1)r+1,n}| \geqslant 4x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(l-1)\sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(10x)\right\}\mathbf{P}\left\{|X_{(i+1)r+1,n}| \geqslant 4x\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(l-1)R_n(4x)S_n(10x)} \leqslant \sqrt{l-1}\left(S_n(10x) + \frac{1}{4}R_n(4x)\right) \tag{9}$$

(в последнем переходе использовалось элементарное неравенство $xy \leqslant x^2 + y^2/4$.) Из (8) и (9) следует теперь

$$S_n(10x) \leqslant R_n(4x) + R_n(4x)S_n(10x) + \rho(r)\sqrt{n/r}\left(S_n(10x) + \frac{1}{4}R_n(4x)\right) +$$

$$+lS_{2r}(x) \leqslant \gamma S_n(10x) + 2R_n(4x) + lS_{2r}(x),$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 4. *В условиях леммы 1*

$$\mathbf{P}\left\{\overline{X}_n > 10x\right\} \leqslant \frac{2\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\overline{X}_n > x\right\} + \frac{2}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\overline{X}_{2r} > x\right\}.$$

Доказательство. Пусть $k = [m/r] \geqslant 2,\ E_i(x),\ S_n(x),\ R_n(x)$ определены так же, как в лемме 1. В силу (3)

$$|X_{(i+1)r,m}| \geqslant \frac{|X_m|}{1+\varepsilon} - |X_{(i-1)r+j,(i+1)r-1}| - |X_{(i-1)r+j-1}| - \frac{2N}{1+\varepsilon},\ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Аналогично (8) получаем

$$\mathbf{P}\{|X_m| > 4x\} = \mathbf{P}\{|X_m| > 4x, \overline{X}_m > x\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r}\left(E_{(i-1)r+j}(x), |X_{(i+1)r,m}| \geqslant x\right)\right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r}\left(E_{(i-1)r+j}(x), |X_{(i-1)r+j,(i+1)r-1}| \geqslant x\right)\right\} +$$

$$+\sum_{i=(k-1)r+1}^{m}\mathbf{P}\left\{E_i(x), |X_{i,m}| \geqslant 3x\right\} \leqslant S_m(x)R_m(x) +$$

$$+\rho(r)\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}^{1/2}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(x)\right\}\mathbf{P}^{1/2}\left\{|X_{(i+1)r,m}| \geqslant x\right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant r}|X_{(i-1)r+j+,(i+1)r-1}|\geqslant x\right\}+\mathbf{P}\left\{\max_{(k-1)r+1\leqslant i\leqslant m}|X_{i,m}|\geqslant x\right\}\leqslant$$

$$\leqslant S_m(x)R_m(x)+\rho(r)\sqrt{(k-1)S_m(x)R_m(x)}+kS_{2r}(x).$$

Так как $R_m(x)\leqslant S_m(x)$, отсюда следует

$$R_n(4x)\leqslant \gamma S_n(x)+lS_{2r}(x),$$

и с помощью леммы 1 получаем теперь

$$S_n(10x)\leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(2R_n(4x)+lS_{2r}(x)\right)\leqslant \frac{2\gamma}{1-\gamma}S_n(x)+\frac{2}{1-\gamma}S_{2r}(x).$$

■

Теорема 1. *Если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания,*

$$\delta=\frac{2\gamma(10)^p}{1-\gamma}<1,\ p>1,\ \ \frac{n}{r}\left(\frac{a_r}{a_n}\right)^p\to 0,\ n\to\infty. \tag{10}$$

Тогда $\sup\limits_{n\geqslant 1}a_n^{-p}\mathbf{E}\overline{X}_n^p<\infty.$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}\{|\xi|^p,|\xi|\geqslant a_n\}=-\int_{a_n}^{\infty}x^p\,d\mathbf{P}\{|\xi|\geqslant x\}=a_n^p\mathbf{P}\{|\xi|\geqslant a_n\}+p\int_{a_n}^{\infty}x^{p-1}\mathbf{P}\{|\xi|\geqslant x\}\,dx.$$

Пусть $a_n\geqslant 1$ удовлетворяет условиям (7). С помощью леммы 4 получаем отсюда

$$\mathbf{E}\{\overline{X}_n^p,\overline{X}_n\geqslant 10a_n\}\leqslant(10a_n)^p\,\mathbf{P}\{\overline{X}_n\geqslant 10a_n\}+p(10)^p\int_{a_n}^{\infty}x^{p-1}\mathbf{P}\{\overline{X}_n\geqslant 10x\}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\gamma(10)^p}{1-\gamma}a_n^p\,\mathbf{P}\{\overline{X}_n\geqslant a_n\}+\frac{2l(10)^p}{1-\gamma}a_n^p\,\mathbf{P}\{\overline{X}_{2r}\geqslant a_n\}+$$

$$+\frac{2p\gamma(10)^p}{1-\gamma}\int_{a_n}^{\infty}x^{p-1}\mathbf{P}\{\overline{X}_n\geqslant x\}\,dx+\frac{2lp(10)^p}{1-\gamma}\int_{a_n}^{\infty}x^{p-1}\mathbf{P}\{\overline{X}_{2r}\geqslant x\}\,dx=$$

$$\leqslant\frac{2\gamma(10)^p}{1-\gamma}\mathbf{E}\{\overline{X}_n^p,\overline{X}_n\geqslant a_n\}+\frac{2l(10)^p}{1-\gamma}\mathbf{E}\{\overline{X}_{2r}^p,\overline{X}_{2r}\geqslant a_n\}.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\overline{X}_n^p\leqslant(10a_n)^p+\delta\mathbf{E}\overline{X}_n^p+\frac{2l(10)^p}{1-\gamma}\mathbf{E}\overline{X}_{2r}^p,$$

$$\mathbf{E}\overline{X}_n^p\leqslant\frac{(10a_n)^p}{1-\delta}+\frac{2l(10)^p}{(1-\gamma)(1-\delta)}\mathbf{E}\overline{X}_{2r}^p.$$

Обозначим

$$D_n = \mathbf{E}\left(\frac{\overline{X}_n}{a_n}\right)^p, \ \ A = \frac{(10)^p}{1-\delta}, \ \ C = \frac{2(10)^p}{(1-\gamma)(1-\delta)}.$$

Последнее неравенство принимает вид

$$D_n \leqslant A + C\frac{n}{r}\left(\frac{a_{2r}}{a_n}\right)^p D_{2r}, \quad r = r(n) \to \infty, \ 2r < n.$$

По условию при достаточно больших n

$$C\frac{n}{2r}\left(\frac{a_{2r}}{a_n}\right)^p < \varepsilon < 1,$$

так что

$$D_n \leqslant A + \varepsilon D_{2r}. \tag{11}$$

Если $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n = \infty$, то найдётся подпоследовательность $n_k \to \infty$ такая, что $D_{n_k} = \max\limits_{n\leqslant n_k} D_n \to \infty$, и тогда, поскольку $2r_k = 2r(n_k) < n_k$, то в силу (11)

$$D_{n_k} \leqslant A + \varepsilon D_{2r_k} \leqslant A + \varepsilon D_{n_k}, \text{ т. е. } D_{n_k} \leqslant \frac{A}{1-\varepsilon}.$$

Полученное противоречие означает, что $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n < \infty$. Теорема доказана. ■

Следствие 1. *Если* $\{\xi_n\}$ *удовлетворяет условию ρ-перемешивания,* $\mathbf{E}X_n = 0, \ \sigma_n^2 = \mathbf{D}X_n \to \infty, \ \mathbf{E}|X_n|^p < \infty, \ p > 2$, *тогда* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \sigma_n^{-p}\mathbf{E}\overline{X}_n^p < \infty$.

Доказательство. В силу леммы 2 $\{\sigma_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2, поэтому $\{\sigma_n\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности [3, с. 26] так, что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k \sim \sigma_n$ и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| > N\sigma_n\} \leqslant \frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k}{N^2\sigma_n^2} = o_N(1).$$

Следовательно, в качестве a_n в леммах 3 и 4 можно взять $N\sigma_n$, где $N > 0$ достаточно велико. Далее, в (3) $k = n/2r \to \infty$ $(2r = m)$ можно сделать растущей столь медленно, что $\dfrac{a_{km}}{a_m} \sim k^{1/2}, m \to \infty$, Тогда если в (10) $p > 2$,

$$\frac{n}{2r}\left(\frac{a_{2r}}{a_n}\right)^p = k\left(\frac{a_m}{a_{km}}\right)^p \sim k^{1-p/2} \to 0, \ n \to \infty.$$

Из теоремы 1 следует теперь утверждение следствия. При этом, так как $\mathbf{E}\,|X_n|^p \geqslant \sigma_n^p$, то полученное неравенство неулучшаемо по порядку. ■

Следствие 2. *Если* $\{\xi_n\}$ *удовлетворяет условию ρ-перемешивания,* $\sigma_n^2 = \mathbf{D}X_n \to \infty, \ n \to \infty, \ \mathbf{E}|X_n|^p < \infty, \ p > 2$, *тогда* $\mathbf{E}|X_n - A_n|^p < C\sigma_n^p$, *где* $C > 0$ *не зависит от* n.

Доказательство. Обозначим через μ_n медиану величины X_n. Тогда $|\mu_n - A_n| \leqslant \leqslant \sqrt{2}\sigma_n$ [7, с. 258] и $\mathbf{E}|X_n - \mu_n|^p \leqslant 2\mathbf{E}|X_n - X_n'|^p$ [7, с. 259]. Имеем

$$\|X_n - A_n\|_p \leqslant \|X_n - \mu_n\|_p + |\mu_n - A_n| \leqslant 2^{1/p}\|X_n - X_n'\|_p + \sqrt{2}\sigma_n. \tag{12}$$

Аналогично (5) с помощью следствия 1 получаем

$$\|X_n - X_n'\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|\widetilde{X}_n\|_p + N \leqslant C_1\widetilde{\sigma}_n + N \ \ (C_1 \text{ не зависит от } n),$$

и так как $\widetilde{\sigma}_n \sim \sqrt{2}\sigma_n \to \infty$, то из (12) следует теперь утверждение следствия. ■

В случае когда $X_n = S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ утверждение следствия 1 (даже несколько более общее) доказано в [1], которое, в свою очередь, обобщает неравенство И.А. Ибрагимова (лемма 18.5.1 из [4]): $\mathbf{E}|S_n|^p \leqslant C\sigma_n^p$, где $C > 0$ не зависит от n, доказанное в предположении, что $\{\xi_n\}$ удовлетворяет более жёсткому, чем ρ-перемешивание, условию φ-перемешивания.

Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \overset{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [7, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [7, с. 393].

Обозначим серез $\mathcal{N}(0,1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, если $\sigma_n^{-1}(X_n - A_n) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1),\ n \to \infty$.

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\frac{X_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{X_n'}{\sigma_{n+m}} + \frac{X_m'}{\sigma_{n+m}}, \ \ n+m \to \infty, \tag{$\mathrm{R_f}$}$$

где X_n и X_n' независимы и одинаково распределены. Ясно, что условие $(\mathrm{R_f})$ можно записать так:

$$\mathbf{E}\exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}X_{n+m}\} - \mathbf{E}\exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}X_n\} \cdot \mathbf{E}\exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}X_m\} \to 0,\ n+m \to \infty.$$

Если σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 и $\sigma_{n+m}^{-1}(A_n + A_m - A_{n+m}) \to 0,\ n+m \to \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N).

В [8] показано, что для того, чтобы к последовательности $\{X_n\}$ была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки (N), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(\mathrm{R_f})$ и последовательность $\{\sigma_n^{-2}(X_n - A_n)^2\}$ была равномерно интегрируема.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания, $\sigma_n^2 = \mathbf{D}X_n \to \infty,\ n \to \infty,\ \mathbf{E}|X_n|^p < \infty,\ p > 2$. Тогда к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.*

Доказательство. Пусть $m = m(n)$, $r = r(n) \to \infty$. Из (2) аналогично (6) выводится

$$\left\|\widetilde{X}_{n+m} - \widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}\right\|_2 \leqslant \varepsilon\left(\widetilde{\sigma}_n + \widetilde{\sigma}_r + \widetilde{\sigma}_{n+m}\right) + \widetilde{\sigma}_r + 3N, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$ можно сделать сколь угодно малым выбором N. Правильно меняющуюся последовательность положительного порядка $\{\widetilde{\sigma}_n\}$ без ограничения общности можно считать неубывающей [3, с. 26] так, что если $r = r(n) \to \infty$ растет достаточно медленно, то

$$\frac{\varepsilon\left(\widetilde{\sigma}_n + \widetilde{\sigma}_r + \widetilde{\sigma}_{n+m}\right) + \widetilde{\sigma}_r + 3N}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} \leqslant 2\varepsilon + o_n(1),$$

и из (13) теперь следует

$$\frac{\widetilde{X}_{n+m}}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}_n}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}}{\widetilde{\sigma}_{n+m}}, \;\; n \to \infty. \tag{14}$$

Далее

$$\left|\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{X}_n + \widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}}{\widetilde{\sigma}_{n+m}}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{X}_n}{\widetilde{\sigma}_{n+m}}\right\} \cdot \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}}{\widetilde{\sigma}_{n+m}}\right\}\right| \leqslant$$

$\leqslant \rho(r) \to 0,\; n \to \infty$. Это означает, что

$$\frac{\widetilde{X}_n}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}_{n+r+1,n+m+r}}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widetilde{X}'_n}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}'_{n+r+1,n+m+r}}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} \overset{d}{=} \frac{\widetilde{X}'_n}{\widetilde{\sigma}_{n+m}} + \frac{\widetilde{X}'_m}{\widetilde{\sigma}_{n+m}}.$$

Вместе с (14) это означает, что для последовательности $\{\widetilde{X}_n\}$ выполняется условие $(\mathrm{R_f})$.

Далее в силу следствия 1

$$\widetilde{\sigma}_n^{-2}\mathbf{E}\left\{\widetilde{X}_n^2, |\widetilde{X}_n| \geqslant N\widetilde{\sigma}_n\right\} \leqslant \frac{\mathbf{E}|\widetilde{X}_n|^p}{N^{p-2}\widetilde{\sigma}_n^p} = o_N(1),$$

т. е. последовательность $\left\{\widetilde{\sigma}_n^{-2}\widetilde{X}_n^2\right\}$ равномерно интегрируема. Теперь из [8] следует, что к последовательности $\{\widetilde{X}_n^2\}$ применима центральная предельная теорема.

В силу (1) и условия f3

$$\left|\widetilde{X}_n - X_n + X'_n\right| \leqslant \varepsilon|\widetilde{X}_n| + N$$

$$\widetilde{\sigma}_n^{-1}\left\|\widetilde{X}_n - X_n + X'_n\right\|_2 \leqslant \varepsilon + N\widetilde{\sigma}_n^{-1} = \varepsilon + o_n(1),$$

откуда

$$\frac{\widetilde{X}_n}{\widetilde{\sigma}_n} \overset{d}{\sim} \frac{X_n}{\widetilde{\sigma}_n} + \frac{X'_n}{\widetilde{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),\; n \to \infty.$$

С помощью известной теоремы Н.А. Сапогова [9] отсюда можно вывести, что $(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),\; n \to \infty$ (см. [10]). ■

Теорема 2 обобщает аналогичный результат М. Пелиград из [1], который, в свою очередь, обобщает известную теорему И.А. Ибрагимова [4, теорема 18.5.1].

Литература

1. Peligrad M. The convergence of moments in the central limit theorem for ρ-mixing sequences of random variables // Proceeding of the AMS. 1987. Vol. 101, No. 1. P. 142–148.
2. Гринь А.Г. О притяжении к нормальному закону функций от слабо зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2020. No. 2 (54). С. 24–39.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 141 с.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
5. Csaki P., Fischer J. On the general notion of maximal correlation // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl. 1963. Vol. 8. P. 27–51.
6. Гринь А.Г. Об областях притяжения для сумм зависимых случайных величин // Теория вероятностей и её применение. 1990. Т. 35, № 2. С. 955–970.
7. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962. 719 с.
8. Гринь А.Г. О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1 (41). С. 5–11.
9. Сапогов Н.А. О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределённой приближено нормально // Вестник Ленинградского университета. 1959. Вып. 19. С. 78–105.
10. Гринь А.Г. Об асимптотически нормальных функциях от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4 (52). С. 5–16.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR FUNCTIONS OF VARIABLES WITH ρ-MIXING

A.G. Grin'
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Estimates for moments and a central limit theorem for symmetric functions of a special type of quantities from a stationary sequence with ρ-mixing are obtained. For sums of random quantities with ρ-mixing, such results were previously obtained by Magda Peligrad.

Keywords: symmetric functions of random variables, central limit theorem, ρ-mixing.

Дата поступления в редакцию: 14.10.2024