Математические структуры и моделирование 2024. № 4 (72). С. 15–22

УДК 514.82
DOI 10.24147/2222-8772.2024.4.15-22

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ФОРМУЛ ТИПА ГАУССА – БОННЕ – ЧЖЭНЯ ИЗ СОБСТВЕННО РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.К. Гуц[1]
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru
М.Н. Подоксёнов[2]
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: p._michael@mail.ru

[1]Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

[2]Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. В статье показано как можно применять формулы типа Гаусса – Бонне – Чжэня, выведенные для собственно римановой геометрии, с целью решения задач по оценки плотности энергии, необходимой для изменения топологии пространства-времени.

Ключевые слова: общая теория относительности, лоренцевы многообразия, теорема Гаусса – Бонне – Чжэня, изменение топологии, кротовые норы, оценки энергии.

Введение

В общей теории относительности (ОТО) существуют задачи, которые требуют оценки энергии, необходимой для порождения в пространстве кротовых нор. Фактически речь идёт об изменении топологии физического 3-мерного пространства, и значит и 4-мерного пространства-времени. Эти задачи касаются сверхбыстрых межзвёздных перелётов и построения машины времени, т. е. изменения топологии пространства-времени таким образом, чтобы образовалась замкнутая армениподобная кривая, ведущая из настоящего в прошлое.

Первая такая оценка энергии, точнее плотности энергии, была сделана в 1982 г. в статьях [1–3] одного из авторов и касалась порождения как 4-мерных кротовых нор, нарушающих связность физического пространства, так и 3-мерных кротовых нор, изменяющих односвязность пространства. Для получения оценки плотности энергии источника, порождающего изменение топологии, был использован аналог формулы Гаусса – Бонне – Чжэня для 3-мерного риманова многообразия, полученной Ревентосом [4]:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi l(\xi)}\int\limits_{M^3}\{K(\xi^{\perp})+3K(\xi)\}dv = 2b_0(M^3) - b_1(M^3) + d_0,} \tag{1}$$

где (M^3, g) – замкнутое связное ориентируемое риманово многообразие размерности 3, а ξ – регулярное единичное векторное поле Киллинга на M^3.

Как оказалось, с помощью формулы Ревентоса (1) можно оценить знак энергии [5]. Это очень важно, поскольку в случае положительной энергии мы имеем дело с классическим источником энергии, с классической материей. Отрицательная энергия говорит о том, что её источник является экзотическим, практически неизвестным.

В 1987 г. о порождении 3-мерных кротовых нор заговорил К. Торн с соавторами, имея в виду соответствующую конструкцию машины времени [6, 7]. Однако они столкнулись с тем, что 3-мерные кротовые норы нестабильны, «схлопываются», и для поддержания их стабильности нужна экзотическая материя.

Наконец, проект сверхбыстрого межзвёздного корабля Алькубьерре, или так называемого варп-корабля [8], при полете которого, как считалось, не меняется топология, в действительности, когда сравнивается энергия, требуемая для выхода на сверхсветовой режим полёта, и энергия, необходимая для порождения кротовых нор, неизбежно реализуется только за счёт изменения топологии. Более того, такой полёт происходит скорее всего по 4-мерной кротовой норе [5]. Для прояснения столь важных деталей полёта варп-корабля была использована формула Ревентоса.

Однако важно не только понять, каковы происходящие изменения топологии 3-пространства, важно ещё прояснить, как меняется топология самого пространства-времени. Для этого надо обратиться к формулам типа Гаусса – Бонне – Чжэня.

На сегодня мы имеем достаточно много различных формул типа Гаусса – Бонне – Чжэня как для псевдоримановых многообразий, так и для собственно римановых. В статье [9] мы продемонстрировали как может быть использована такая формула, полученная Авезом [10] для 4-мерных псевдоримановых многообразий. В статье мы неявно предполагали, что характеристика Эйлера – Пуанкаре $\chi(M^4)$ не равна нулю. Это тонкий момент, поскольку, как известно, $\chi(M^4) = 0$ в случае лоренцевой метрики на многообразии. Однако это в случае отсутствия каких-либо аномалий у лоренцевой метрики или у соответствующего времениподобного векторного поля. Ниже мы говорим об этом подробнее.

Хотя формул типа Гаусса – Бонне – Чжэня для псевдоримановых многообразий, казалось бы, предостаточно, не стоит пренебрегать для достижения наших целей подобными формулами, полученными и для собственно римановых многообразий. Тем более что поиск таких формул для случая римановых многообразий ведётся более активно, чем для лоренцевых многообразий, и делают это весьма квалифицированные математики. Другими словами, шанс, что на этом направлении будут получены самые разнообразные и изощрённые варианты формул типа Гаусса – Бонне – Чжэня, учитывающие сложнейшие пространственные построения реальности как явные, так и скрытые, и самые разнообразные сферы физической науки, гораздо большие, чем в лоренцевом случае.

Отчасти, наше обращение к римановым формулам подогревается гипотезой Хокинга о евклидовой природе пространства-времени. Хокинг ратовал за сигнатуру $(++...+)$, отводя сигнатуре $(+-...-)$ ту же судьбу, что и Кант природе пространства и времени. И то и другое всего лишь формы восприятия реальности человеком.

В статье, говоря о компактных многообразиях, имеются в виду замкнутые многообразия, т. е. компактные многообразия без края.

1. Гипотеза Хокинга и римановы многообразия

Итак, рассматриваем формулы Гаусса – Бонне – Чжэня, относящиеся к римановой геометрии чётномерных римановых многообразий M^{2k}. Последние, казалось бы, не имеют отношения к пространству-времени. Однако если мы осуществляем поворот Вика $x^0 \to ix^0$ в многообразии с сигнатурой $(- + ..+)$, то оказываемся уже в римановом многообразии с сигнатурой $(+...+)$, и этот приём может оказаться полезным в физических приложениях. Этот приём успешно использовал Хокинг [11], но в рамках квантовой теории, считая, что лоренцева метрика – это результат нашего восприятия Мира, а реальный мир имеет евклидову сигнатуру $(+ + ++)$.

В нашем случае мы применяем формулы Гаусса – Бонне – Чжэня для решения интересующих нас задач по искусственному изменению топологии в рамках *классической* общей теории относительности ОТО и должны ответить на вопрос о правомерности обращения к повороту Вика конкретно в классической теории.

«Впрочем, соответствие между псевдоримановыми и римановыми пространствами может быть установлено и без перехода к комплексному времени». На этот факт обратил внимание М.Ю. Константинов [12].

Суть в том, что соответствие между римановой h_{ij} и лоренцевой g_{ij} метриками устанавливается равенствами

$$g_{ij} = u_i u_i - h_{ij} \text{ и } h_{ij} = u_i u_i - g_{ij},$$

которые в общем случае являются локальными. А чтобы такое соответствие было справедливо на всём пространстве-времени, необходимо существование на M^4 нигде не обращающегося в нуль векторного поля u^i, что эквивалентно, как известно, условию равенства нулю характеристики Эйлера – Пуанкаре.

Тензоры кривизны Римана – Кристоффеля, Риччи и скалярная кривизна метрик h_{ik} и g_{ik}g связаны хорошо известными формулами биметрического формализма. Например, для тензора кривизны Риччи имеем:

$$R_{(h)ik} = R_{(g)ik} + \Pi^m_{ik;m} - \Pi^m_{im;k} + \Pi^m_{ik}\Pi^s_{ms} - \Pi^m_{is}\Pi^s_{mk},$$

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{(h)jk} - \Gamma^i_{(g)jk}.$$

Здесь точка с запятой обозначает ковариантную производную в соответствии с метрикой g_{ik} , а взятые в скобки индексы h и g обозначают величины, вычисленные по соответствующим метрикам.

При этом соответствии действия имеют вид:

$$S = \int (kR_h + L_m)\sqrt{h}d^4x$$

— для римановой метрики на M^4,

$$S = \int (-kR_g + L_m + F(u_i, u_{i,j}))\sqrt{g}d^4x \tag{$\flat$}$$

— для лоренцевой метрики на M^4, где

$$F(u_i, u_{i,j}) = 2R_g^{ik}u_iu_k + (2u^iu^k - g^{ik})(\Pi^m_{ik;m} - \Pi^m_{im;k} + \Pi^m_{ik}\Pi^s_{ms} - \Pi^m_{is}\Pi^s_{mk}),$$

$$(-kR_g + F(u_i, u_{i,j}))\sqrt{-g} = kR_h\sqrt{h}.$$

Формально функционал действия ($\flat$) описывает представляемое людьми по мысли Хокинга пространство-время, порождаемое полями обычной материи (слагаемое L_m) и векторным полем u_i с минимальной связью. Однако, в отличие от обычных моделей с минимальной связью, связь между обычной материей и векторным полем u^i отсутствует [12].

Поэтому слагаемое $F(u_i, u_{i,j})$ в интеграле ($\flat$) следует рассматривать как лагранжиан тёмной материи (тёмной энергии) [12]. Поэтому принятие классического варианта гипотезы Хокинга о евклидовой природе пространства-времени влечёт неизбежное существование тёмной материи или тёмной энергии [12].

В случае наших интересов мы, принимая в расчёт распространённое признание существования тёмной материи или тёмной энергии, можем использовать римановы варианты формулы Гаусса – Бонне – Чжэня для расчёта энергии, необходимой для порождения кротовых нор, основываясь при этом на уравнениях Эйнштейна (при этом, конечно, надо предварительно из получаемой плотности энергии T_{00} вычитать долю тёмной материи и тёмной энергии).

Но пока мы не учли то, что поскольку поле везде ненулевое, то характеристика Эйлера – Пуанкаре $\chi(M^4) = 0$. Это разрушает искомую нами функциональную связь между кривизной в левой части формулы Гаусса – Бонне – Чжэня, а значит и с плотностью энергии рассматриваемой в пространстве материи и нашего энергетического воздействия с целью образования кротовой норы, с числами Бетти в правой части равенства формулы Гаусса – Бонне – Чжэня [2, 3].

Выход из неприятной ситуации прост – поле u_i не везде ненулевое, оно обладает сингулярностями. Точнее, до начала нашего энергетического воздействия поле u_i не имело сингулярностей, и поэтому $\chi(M^4_{\text{до}}) = 0$, а после, т. е. в пространстве времени-времени $\chi(M^4_{\text{после}}) = 0$, уже приобретшем кротовую нору, они появляются.

С одной стороны, это, скорее всего, так и есть, поскольку в моделях [2, 3], которые мы строили для описания процесса образования кротовой норы, метрика пространства претерпевала разрывы производных, а это сингулярности метрики.

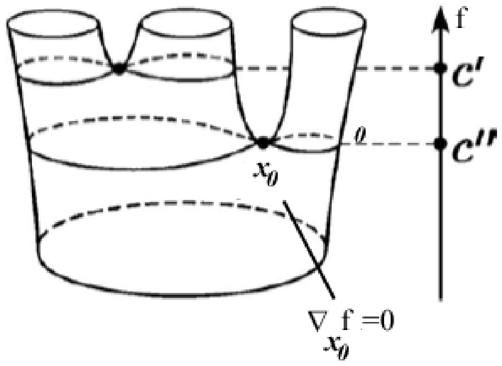

Рис. 1. Рождение кротовой норы, появление критической точки у функции f

С другой стороны, выходит, что «прорывая» кротовые норы, мы воздействуем на поле u^i, или на тёмную материю (!), а это как-то противоречит тому, что она, как считается, не взаимодействует с обычной материей. Правда, мы воздействуем не на неё, а меняем топологию пространства-времени, и, как следствие, тёмная материя «приспосабливается» к новым условиям. О таком влиянии на тёмную материю в литературе ничего не говорится.

Наконец, при рождении кротовой норы от пространства-времени отходит «ручка» и происходит появление нуля у векторного поля $u = \nabla f$ (см. рис. 1). Функция f – это функция Морса, которая определяет ненулевую правую часть в формуле Гаусса – Бонне – Чжэня из теорем 1, 2 из следующего параграфа.

2. Формула Гаусса – Бонне – Чжэня для замкнутого M^{2k} и функции Морса

Пусть M^n – гладкое компактное многообразие без края, т. е. замкнутое. Точка $x \in M^n$ является *критической точкой* гладкой функции $f : M^n \to \mathbb{R}$, если $d_x f = 0$ или $\nabla_x h = 0$.

Функцией Морса на гладком многообразии M^n называется гладкая функция $f : M^n \to \mathbb{R}$, все критические точки которой невырождены, т. е. в этих точках $det\ d_x^2 h \neq 0$.

Функция $f : M^n \to \mathbb{R}$F, определённая на компактном многообразии M^n с краем ∂M^n, называется *функцией Морса*, если:

1) все её критические точки не вырождены и содержатся во внутренности многообразия M^n;

2) ограничение $f|_{\partial M^n}$ является функцией Морса на замкнутом многообразии ∂M^n.

Теорема 1. (Gauss – Bonnet – Chern [13]). *Пусть R обозначает тензор кривизны Римана, связанный со связностью Леви – Чивиты на замкнутом римановом мно-*

гообразии M^{2k}, *а* $Pf(R)$ *обозначает плотность кривизны Пфаффа. Тогда*

$$\boxed{\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{M^{2k}} Pf(R) = ind(\nabla f),} \tag{2}$$

где f *– любая функция Морса на* M^{2k}.

Мы видим, что в правой части имеем число, отличное от нуля, если векторное поле $v = \nabla f$ имеет особые точки.

Рассмотрим другую формулу, написанную непосредственно для риманова многообразия M^4 с сигнатурой $(++++)$.

Теорема 2. (Chern [14]). *Пусть* (M^4, g) *– замкнутое ориентированное 4-мерное риманово многообразие, тогда*

$$\boxed{\frac{1}{32\pi^2}\int\limits_{M^4}(|Riem|^2 - 4|Ric|^2 + R^2)dv_g = \chi(M^4),}$$

где:

$$|Riem|^2 = 8(R^2_{1234} + R^2_{1324} + R^2_{1423} + R^2_{1334} + R^2_{1424} + R^2_{1434} + R^2_{2324} + R^2_{2334} + R^2_{2434}) +$$
$$+4(R^2_{1212} + R^2_{1313} + R^2_{1414} + R^2_{2323} + R^2_{2424} + R^2_{3434}),$$
$$|Ric|^2 = \sum_{i,j=1}^{4} R^2_{ij},$$

R *– скалярная кривизна.*

Характеристику Эйлера – Пуанкаре надо будет рассчитывать благодаря теореме Пуанкаре – Хопфа с помощью индекса поля u^i [15]:

$$\chi(M^4) = ind(u).$$

Если теперь мы рассмотрим либо сами уравнения Эйнштейна для метрики h_{ik}, либо их аналог в той или иной гравитационной теории Эйнштейна – Гаусса – Бонне и сможем с их помощью пересчитать $Pf(R)$ через плотность энергии ε из правой части полевых уравнений, то формула (2) даст нам желанную оценку скачка энергии, требуемую для изменения топологии пространства-времени. Хотя понятно, опыт работы с формулой (1) в статье [5] подсказывает нам, что эта оценка будет, скорее всего, иметь вид:

$$\varepsilon \sim \frac{c^4}{G}\sqrt[m]{sg(L)\cdot sg(\delta[ind(\nabla f)])},\ \ m \geqslant 1, \tag{3}$$

где $sg(\delta[ind(\nabla f)])$ – знак изменения величины $ind(\nabla f)$ при перестройке топологии, а $sg(L)$ – знак, появляющийся при ε^m при вычислениях левой части с использованием уравнений поля типа уравнений Эйнштейна. Заметим, что $m = 2$ при использовании теоремы 1 и 2.

В результате мы находим не только абсолютное значение затрат энергии на преобразование топологии пространства-времени, но и определяем знак энергии, хотя не исключено и её мнимое значение. В случае положительности правой части соотношения (3) мы имеем дело с классической энергией, в остальных случаях мы сталкиваемся с экзотическим источником энергии (см., например, [5]).

В любом случае абсолютная величина энергии имеет очень большое значение, к которому из естественных объектов близки лишь нейтронные звезды. Варп-корабль уйдёт в кротовую нору, если величина (3) меньше, чем $(1/4)M_{\odot}$.

Заключение

Мы представили алгоритм расчёта энергии, которая востребуется при попытке изменить топологию пространства-времени, применимый в случае обращения к любой теории гравитационного поля, к любым полевым уравнениям типа уравнений Эйнштейна. В случае использования ОТО основная трудность состоит в пересчёте членов вида $R_{ijkl}R^{ijkl}$.

Литература

1. Гуц А.К. Космический корабль, разрушающий пространство // Техника – молодёжи. 1983. № 11. С. 14–16.
2. Гуц А.К. Изменение топологии физического пространства в замкнутой вселенной // Известия вузов. Физика. 1982. № 5. С. 23–26.
3. Гуц А.К. Нарушение связности физического пространства // Известия вузов. Физика. 1983. № 8. С. 3–6.
4. Reventos A. On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds // Tohoku Mathematical Journal. 1979. Vol. 31, No. 2. P. 165–178.
5. Гуц А.К. Топологический характер работы варп-двигателя Алькубьерре при выходе на сверхсветовую скорость // Эффективное обеспечение научно-технического прогресса: исследование задач и поиск решений: сборник статей Международной научно-практической конференции (г. Магнитогорск, РФ, 25 августа 2024г.). Уфа: Аэтерна, 2024. С. 6–9.
6. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity // American Journal of Physics. 1988. Vol. 56, No. 5. P. 395–412.
7. Торн К.С. Чёрные дыры и складки времени: Дерзкое наследие Эйнштейна. М.: Издательство физико-математической литературы, 2007. 616 с.
8. Alcubierre M. The Warp drive: Hyper-fast travel within general relativity // Classical and Quantum Gravity. 1994. Vol. 11. P. L73–L77. arXiv: gr-qc/0009013.
9. Гуц А.К., Подоксёнов М.Н. Топологическое описание образования кротовых нор в общей теории относительности // Пространство, Время и Фундаментальные взаимодействия. 2022. № 4 (41). С. 4–12.

10. Avez A. Characteristic classes and Weyl tensor: Applications to general relativity // Proceedings of the National Academy of Sciences. USA. 1970. Vol. 66. P. 265–268.
11. Hawking S. Euclidian Quantum Gravity, in Recent Developments in Gravitation / ed. S. Deser. N.Y.; London: Plenum Press, 1978. 356 p.
12. Константинов М.Ю. Гипотеза Хокинга о евклидовой природе пространства-времени в классической физике // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 12 (54). Ч. 5. С. 8–12. URL: https://research-journal.org/media/PDF/irj_issues/12-5-54.pdf#page=8 (дата обращения: 10.08.2024).
13. Berwick-Evans D. The Chern-Gauss-Bonnet Theorem via supersymmetric Euclidean field theories. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.5383 (дата обращения: 10.08.2024).
14. Marigliano L. The Weyl Tensor of Riemannian Manifolds and some Topological Invariants in Dimension Four // Tesi di LauRea MagistRale. Anno Accademico, 2021. 96 p.
15. Milnor W. Topology from the differentiable viewpoint. Charlottesville: University Press of Virginia, 1965.

ON THE POSSIBILITY OF APPLYING FORMULAS IN THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY OF THE GAUSS – BONNET – CHERN TYPE FROM RIEMANNIAN GEOMETRY

A.K. Guts[1]
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru
M.N. Podoksenov[2]
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: p._michael@mail.ru

[1]Sochi State University, Sochi, Russia
[2]Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

Abstract. In the article is shown how formulas of the type can be applied Gauss – Bonnet – Chern, derived for Riemannian geometry, in order to solve problems of estimating the energy density necessary to change the topology of space-time.

Keywords: general relativity, Lorentzian manifolds, Gauss – Bonnet – Chern theorem, topology change, wormholes, energy estimates.

Дата поступления в редакцию: 15.09.2024