

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.В. Паничкин<sup>1</sup>

д.т.н., ведущий научный сотрудник, e-mail: panich@ofim.oscsbras.ru

Л.Г. Варепо<sup>2</sup>

д.т.н., профессор, e-mail: larisavarepo@yandex.ru

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Омский государственный технический университет, Омск, Россия

**Аннотация.** Для моделирования течения ограниченного объёма жидкости между вращающимися цилиндрами со свободными границами и соприкосновении с твёрдыми поверхностями цилиндров разработан численный алгоритм. Основная особенность этого алгоритма заключается в возможности учёта таких основных характеристик вязкой несжимаемой жидкости, как поверхностное натяжение, адгезия с твёрдыми поверхностями. Проведён ряд тестовых расчётов с определением асимптотических параметров сходимости от шагов по времени и по пространственным координатам. Представлены результаты численного моделирования с определением границ течения жидкости и с изображениями функции тока, получены на сетках  $80 \times 80$ ,  $160 \times 160$  при различных числах  $Re$ .

**Ключевые слова:** моделирование, уравнения гидродинамики, вязкая несжимаемая жидкость, динамические характеристики.

### Введение

Разработки различных подходов к моделированию течений вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях с применением конечно-разностных методов ведутся как в РФ, так и за рубежом [1–3]. Для повышения точности расчётов при согласовании локальных направлений потоков с направлениями узловых линий требуются значительные вычисления по построению расчётных сеток. Разработаны различные подходы построения адаптивных сеток при наличии в решениях зон с сингулярностью или наличием больших градиентов, что отображает их индивидуальность. В работах [4–10] рассмотрена возможность экономии ресурсов с использованием регулярных сеток при подвижных границах (твёрдых и свободных) вязкой жидкости в процессе моделирования движения между вращающимися цилиндрами ограниченного объёма жидкости со свободными границами и с соприкосновением

с твёрдыми поверхностями цилиндров. В основе разработанного численного алгоритма положено перемещение граничных узлов по узловым линиям, что позволяет учитывать основные характеристики вязкой несжимаемой жидкости.

## 1. Постановка задач

Ставится задача симуляции течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя цилиндрами с одинаковыми радиусами  $R$  и параллельными осями. Цилиндры вращаются с постоянными угловыми скоростями  $\omega$  в противоположных направлениях и находятся на расстоянии  $\delta$ , меньшем толщины  $\delta_S$  жидкости, занимающей в начальный момент времени  $t = 0$  область  $\Omega$  на цилиндре 1 с её центром, обозначенным как  $O_1$ .

Рассмотрим постановку задачи в неподвижной полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , связанной с центром  $O_1$  цилиндра 1, считая течения жидкости подобными вдоль осей цилиндров. В координатах  $(r, \varphi)$  с вектором скорости  $(V_r, V_\varphi)$  уравнения Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью  $\nu$  и плотностью  $\rho$  имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{(V_\varphi)^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} + \nu \left( \nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{V_\varphi}{R} + \frac{V_\varphi R}{r} \frac{\partial V_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{V_r V_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi R} + \nu \left( \nabla^2 V_\varphi - \frac{V_{r\varphi}}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi R} &= 0, \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial^2 V}{(\partial \varphi R)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Сделаем переход к сопутствующей системе координат  $(r, \theta)$ , связанной с цилиндром 1 и вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в положительном направлении  $\theta = \varphi + \omega t$  за счёт преобразования компонентов скоростей  $(V_r, V_\varphi)$  в вектор  $(U_r, U_\theta)$ , а вектора ускорения жидкости с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  с тем же началом координат в точке  $O_1$  в вид  $\left( \frac{dV_r}{dt}, \frac{dV_\varphi}{dt} \right) = \left( \frac{dU_r}{dt}, \frac{dU_\theta}{dt} \right) + (0, \varepsilon r) + (-2\omega U_\theta, 2\omega U_r)$ . Градиент давления изменится на величину  $(-\omega^2 r, 0)$ .

После преобразований к системе координат  $(r, \theta)$  уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\theta R}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} - \frac{(U_\theta + \omega r)^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 V_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi R} \right), \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} + \frac{U_r U_\theta}{r} + 2U_r \omega + \varepsilon r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 V_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi R} \right), \\ \nabla^2 U &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial^2 U}{(\partial \theta R)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} = 0, \quad (3)$$

Полагаем, что  $U_r(t, r, \theta) = 0$ ,  $U_\theta(t, r, \theta) = 0$ , жидкость в начальный момент времени  $t = 0$  определена в области  $\Omega$  длиной по окружности  $\delta L$ , толщиной  $\delta S$  и координатами  $(r, \theta)$  в сопутствующей системе координат в пределах  $r \in [R, R + \delta_s]$ ,  $\theta \in \left[ \frac{-\delta_L}{(2R)}, \frac{\delta_L}{(2R)} \right]$ .

Допускаем, что в начальный момент времени точка  $(R + \delta_s, \frac{\delta_L}{2R})$  является точкой соприкосновения с цилиндром 2. Скорость будет определяться из условия движения твёрдой границы цилиндра 2, а безразмерные величины можно определить в виде:  $Re = V_0 \frac{\delta_L}{\nu}$ ,  $Eu = \frac{P_a}{\rho V_0^2} = P_0$ , где  $V_0 = \omega \delta_L$  – характерная скорость,  $P_a = 105 \text{ Н/м}^2$  – атмосферное давление,  $\rho$  и  $\nu$  – плотность и кинематическая вязкость жидкости.

Если пренебречь внешним воздействием, на свободных границах жидкости для градиента давления по нормали  $n$  к границе можно положить, что  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ .

При рассмотрении координат центра цилиндра 1  $(x_c, y_c)$  и исходной точки  $(x_m, y_m)$  в системе координат  $Oxy$ , или  $(r, \theta) = (r, \varphi_{m1})$ , при радиусах цилиндров  $r_1 = r_2 = R$  на основе углов  $\varphi_1, \varphi_2$ , обозначающих положение центра цилиндра 2 и точки на его окружности с начальными значениями  $\varphi_0$  и  $\varphi_{m0}$ , определяются следующие величины для компонент скоростей и координат:

$$U_\theta = V_x \cos \varphi_{m1} + V_y \sin \varphi_{m1}, U_r = V_x \sin \varphi_{m1} - V_y \cos \varphi_{m1}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_m &= x_c + (2R + \delta) \sin(\varphi_1) + r_2(\varphi_2), \\ y_m &= y_c - (2R + \delta) \cos(\varphi_1) + r_2 \cos(\varphi_2), \\ V_x &= (2R + \delta) \omega \cos(\varphi_1) + 2\omega r_2 \cos(\varphi_2), \\ V_y &= (2R + \delta) \omega \sin(\varphi_1) - 2\omega r_2 \sin(\varphi_2), \\ \varphi_1 &= \varphi_0 - \omega t, \varphi_2 = \varphi_{m0} - 2\omega t. \end{aligned}$$

Расположение точек поверхности цилиндра 2  $(\psi_1, r)$  в рассматриваемой системе координат  $(r, \theta)$  определяются по углу дуги на нём  $\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  при расстоянии между центрами цилиндров  $(2R + \delta)$  из выражений:

$$r = R \sqrt{5 + \frac{4\delta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2} - 2(2 + \frac{\delta}{R}) \cos \psi_2}, \quad (5)$$

$$\psi_1 = \arcsin \left( \frac{\sin \psi_2}{\sqrt{5 + \frac{4\delta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2} - 2(2 + \frac{\delta}{R}) \cos \psi_2}} \right). \quad (6)$$

Для точки  $(x_m, y_m)$  на окружности значение угла в системе координат  $(r, \theta)$   $\varphi_{m1} = \varphi_1 - \psi_1$ .

Для непроницаемости жидких границ, описываемых функцией  $f(t, r, \theta)$ , необходимо выполнение кинематического условия:

$$f_t + f_r U_r + f_\theta U_\theta = 0. \quad (7)$$

При этом поверхностное натяжение определяется на основе радиуса кривизны  $r_{cr}$  для  $f(t, r, \theta)$  и коэффициента поверхностного натяжения жидкости  $n$  в виде  $C_n/r_{cr}$ . Давление на свободных границах с внешней нормалью  $n$  к границе будет определяться из формулы Лапласа:

$$P = P_{атм} - r_{cr} n C_n / r_{cr}^2. \quad (8)$$

Другие условия, как компоненты скорости на всех границах по времени и градиенты давления на твёрдых границах, основанные на уравнениях (1) и (2), были рассмотрены в работе [5].

Преобразование полярной системы координат  $(r, \theta)$  в полярную систему координат  $(x, y) = (R_\theta, R - r)$  с вектором скорости  $V = (u, \nu) = (U_\theta, -U_r)$  и уравнениями (1), (2), (3) необходимо для численного моделирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uR}{R-y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u\nu}{R-y} - 2\nu\omega = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{R}{R-y} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{(R-y)^2} - \frac{2R}{(R-y)^2} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial t} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{uR}{R-y} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{(u + \omega(R-y))^2}{R-y} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \nabla^2 \nu - \frac{\nu}{(R-y)^2} - \frac{2R}{(R-y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\nu}{R-y} + \frac{R}{R-y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

где

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{R-y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{R^2}{(R-y)^2} \frac{\partial^2 V}{(\partial x)^2}.$$

Использование в численном алгоритме конечно-разностного аналога уравнения (11) в эволюционной форме и схемы стабилизирующей поправки [11] необходимо для расчёта давления и конвективно-диффузионных членов в уравнениях (9) и (10).

## 2. Расчёт свободной границы жидкости

Для проведения расчётов течения вязкой жидкости с учётом движения свободных границ в двухмерных областях рассмотрена регулярная сетка с шагами по двум пространственным направлениям  $h_x$  и  $h_y$ , с выделением дополнительных узлов на узловых линиях между внутренними и внешними узлами. Эти узлы, представляющие геометрическую линию функции границы (7) в дискретном виде, отслеживают положение этих границ по времени.

Повышение разрешимости границ и точности их перемещения, что требуется при вычислениях поверхностных натяжений на свободных границах движущейся

жидкости, возможно за счёт перерасчёта движения дополнительных узлов, отслеживающих положение границ и расположенных на узловых линиях. Для определения границы, например, около узла «02» с дальнейшим перерасчётом за время  $\tau$  по оси  $x$  строится интерполяция по трём соседним граничным узлам «36», «02» и «04» (рис. 1) с соответствующими координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  в виде

$$x = x_2 + (y - y_2) \left( \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \right) + \frac{(y - y_2)^2}{y_3 - y_1} \left( \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right). \quad (12)$$

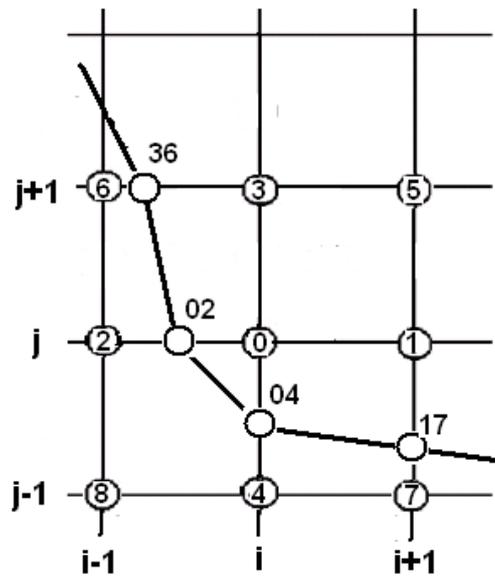


Рис. 1. Пример сеточного шаблона подвижной границы жидкости

Аналогичные действия будут при построении интерполяции по граничным узлам «02», «04» и «17» около узла «04» для определения перемещений по оси  $y$ .

Указанные интерполяции являются приближениями к граничной функции  $f(t, r, \theta)$  для условия (7) в полярных координатах как отдельные функции свободной границы  $f_1(t, x, y)$  и  $f_2(t, x, y)$ .

Принимая допущение, с течением времени  $\tau$  рассматриваемые узлы переместятся  $\tau u_{i,j}$  и  $\tau v_{i,j}$  по  $x$  и  $y$  и примут значения, определяем у дополнительного узла «02» следующие координаты  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$  с перемещением на величину  $\delta x$  по оси  $x$ :

$$\delta x = \tau u_{i,j} + \tau v_{i,j} \left( \frac{x'_3 - x'_1}{y'_3 - y'_1} \right) + \frac{(\tau v_{i,j})^2}{y'_3 - y'_1} \left( \frac{x'_3 - x'_2}{y'_3 - y'_2} - \frac{x'_2 - x'_1}{y'_2 - y'_1} \right), \bar{x}_2 = x_2 + \delta x. \quad (13)$$

Для дополнительного узла «04», расположенного на узловой линии по оси  $y$ , новыми координатами станут  $(x_2, \bar{y}_2)$  с перемещением на величину  $\delta y$  по оси  $y$ :

$$\delta y = \tau \nu_{i,j} + \tau u_{i,j} \left( \frac{y'_3 - y'_1}{x'_3 - x'_1} \right) + \frac{(\tau u_{i,j})^2}{x'_3 - x'_1} \left( \frac{y'_3 - y'_2}{x'_3 - x'_2} - \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} \right), \bar{y}_2 = y_2 + \delta y. \quad (14)$$

Примечание: при направлениях вектора скорости к узловым линиям под углом 45 градусов и при отсутствии учёта кривизны границы (вторые и третьи слагаемые в правых частях формул (13) и (14)) имеет место высокая погрешность моделирования течений жидкости со свободными границами.

### 3. Результаты и обсуждение

Проведено моделирование протекания вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами, как представлено в постановке исходной задачи, с применением расчётного алгоритма с конечно-разностными схемами на регулярных сетках и метода расчёта подвижных границ. На основе уравнений (9)–(11) был проведён ряд тестовых расчётов с определением асимптотических параметров сходимости от шагов по времени и по пространственным координатам.

В расчётах были рассмотрены числа Рейнольдса от 1 до 100 на различных регулярных сетках с количеством узлов  $N_x$  и  $N_y$  по  $x$  и  $y$ , равными 40, 80, 160, с итерационным шагом  $\tau$  от  $0.3 \cdot 10^{-8}$  с до  $0.2 \cdot 10^{-7}$  с.

Вся расчётная область имела координаты по  $x$  от  $-0.008$  м до  $0.008$  м и по  $y$  от  $-0.0049$  м до  $0.0001$  м и включала начальную область жидкости  $\Omega$  с размерами  $\delta L = 0.008$  м и  $\delta S = 0.004$  м.

Другие параметры имели следующие значения: радиусы цилиндров  $r_1$  и  $r_2$  равнялись  $0.05$  м, угловая скорость  $\omega = 100$  рад/с, расстояние между поверхностями цилиндров  $\delta = 0.001$  м, коэффициент для расчёта давления  $\varepsilon_P$  от  $0.2 \cdot 10^{-7}$  до  $0.2 \cdot 10^{-5}$ , коэффициент поверхностного натяжения  $C_n = 0.03$  Н/м, жидкость с плотностью  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup> и вязкостью  $\nu$  от  $0.32 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с до  $0.32 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с (для соответствия числам  $Re$  от 100 до 1). Для числа Рейнольдса  $Re = U\delta_S/\nu$  бралась характерная скорость на краю области жидкости в виде скорости схождения поверхностей двух  $U = 2\omega\delta_L/2 = 0.8$  м/с при условии, что  $r_1 = r_2 \gg \delta_L$ , а характерным размером области бралась начальная толщина жидкости  $\delta_S = 0.004$  м.

Для графического представления результатов расчётов проводилось определение функций тока из уравнений

$$\frac{R-y}{R} \frac{\delta\psi}{\delta y} = u, \frac{\delta\psi}{\delta x} = -v. \quad (15)$$

Расчёт функций тока проводился с помощью интегрирования в расчётной области уравнений с точностью  $O(h_x^2 + h_y^2)$  при значении функции тока на верхней границе  $\psi = 0$ .

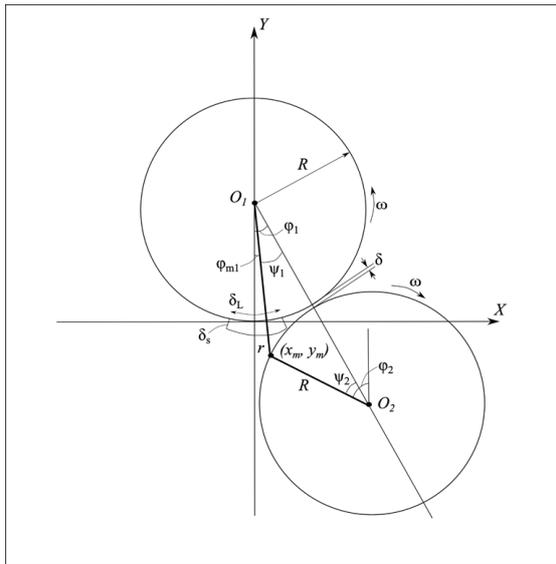


Рис. 2. Начальное расположение жидкости и вращающихся цилиндров

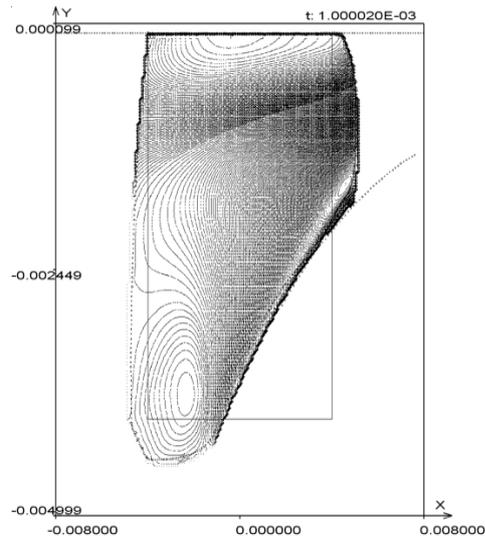


Рис. 3. Расчёт при  $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$ ,  $Re = 1$ ,  $160 \times 160$ ,  $S = 0.32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $R_1 = R_2 = 0.05 \text{ м}$ ,  $\omega = 100 \text{ рад/с}$ ,  $\tau_3 = 0.2 \cdot 10^{-7}$ ,  $\psi_3 = -0.898 \dots 0.292$ ,  $\Delta\psi_{23} = 0.048$ ,  $S_3 = 0.322 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $\Delta S_3 = 0.002 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  (0.6 %)

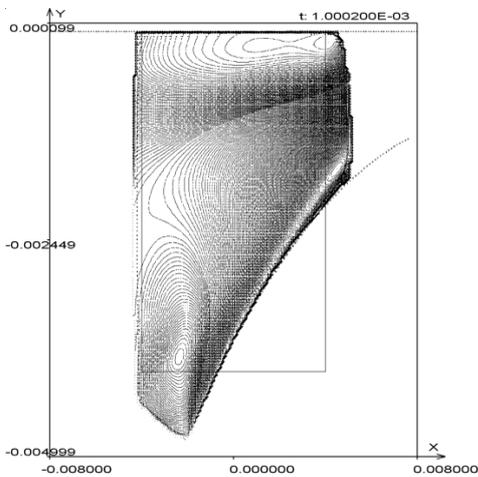


Рис. 4. Расчёт при  $t = 0.1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ ,  $Re = 10$ ,  $160 \times 160$ ,  $S = 0.32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $R_1 = R_2 = 0.05 \text{ м}$ ,  $\omega = 100 \text{ рад/с}$ ,  $\tau_3 = 0.200 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ ,  $\psi_3 = -0.800 \dots 0.260$ ,  $\Delta\psi_{23} = 0.023$ ,  $S_3 = 0.318 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $\Delta S_3 = 0.002 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  (0.6 %)

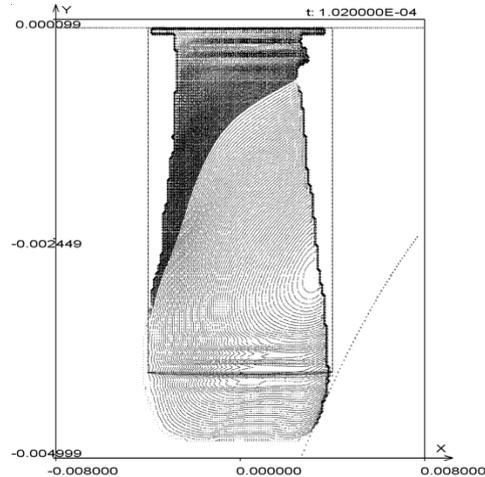


Рис. 5. Границы области течения жидкости при  $Re = 100$  в момент времени  $t = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  при угловой скорости вращения  $\omega = 104 \text{ рад/с}$

Таблица 1. Результаты численных расчётов при разных расчётных параметрах по порядку сходимости от шагов по расчётной сетке ( $h^p$ ) и шага по времени ( $\tau^p$ ). Расчёт  $S = 0.32 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = R_2 = 0.05$  м,  $\omega = 100$  рад/с. Расчёт на сетках 1 –  $40 \times 40$ , 2 –  $80 \times 80$ , 3 –  $160 \times 160$

Время расчёта с шагами $\tau_2, \tau_3$ , число Рейнольдса	Потери площади на сетке $80 \times 80, \text{ м}^2$ и %	Потери площади на сетке $160 \times 160, \text{ м}^2$ и %	Значения функции тока и модуль её изменения на сетках $40 \times 40$ и $80 \times 80$	Значения функции тока и модуль её изменения на сетках $80 \times 80$ и $160 \times 160$	Порядок сходимости $p$ по шагу сетки $h$
при $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$ с, $Re = 1$ , $\tau_2 = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с $\tau_3 = 0.2 \cdot 10^{-7}$ с	$\Delta S_2 = 0.004 \cdot 10^{-4}$ (1.2 %)	$\Delta S_3 = 0.002 \cdot 10^{-4}$ (0.6 %)	$\psi_2 = -0.850$ ... 0.254, $\Delta\psi_{12} = 0.185$	$\psi_3 = -0.898$ ... 0.292, $\Delta\psi_{23} = 0.048$	$p = \ln_2(0.185 / 0.048) = \ln_2(3.85) = 1.95$
при $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$ с, $Re = 10$ , $\tau_2 = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с $\tau_3 = 0.2 \cdot 10^{-7}$ с	$\Delta S_2 = 0.006 \cdot 10^{-4}$ (1.8 %)	$\Delta S_3 = 0.002 \cdot 10^{-4}$ (0.6 %)	$\psi_2 = -1.415$ ... 0.0, $\Delta\psi_{12} = 0.240$	$\psi_3 = -1.472$ ... 0.018, $\Delta\psi_{23} = 0.057$	$p = \ln_2(0.240 / 0.057) = \ln_2(4.21) = 2.74$
при $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$ с, $Re = 10$ , $\tau_2 = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с $\tau_3 = 0.2 \cdot 10^{-7}$ с	$\Delta S_2 = 0.004 \cdot 10^{-4}$ (1.2 %)	$\Delta S_3 = 0.002 \cdot 10^{-4}$ (0.6 %)	$\psi_2 = -0.823$ ... 0.280, $\Delta\psi_{12} = 0.199$	$\psi_3 = -0.800$ ... 0.260, $\Delta\psi_{23} = 0.023$	$p = \ln_2(0.199 / 0.023) = \ln_2(8.65) = 3.11$
при $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$ с, $Re = 10$ , $\tau_2 = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с $\tau_3 = 0.2 \cdot 10^{-7}$ с	$\Delta S_2 = 0.004 \cdot 10^{-4}$ (1.2 %)	$\Delta S_3 = 0.004 \cdot 10^{-4}$ (1.2 %)	$\psi_2 = -1.190$ ... 0.0, $\Delta\psi_{12} = 0.206$	$\psi_3 = -1.273$ ... 0.015, $\Delta\psi_{23} = 0.083$	$p = \ln_2(0.206 / 0.083) = \ln_2(2.48) = 1.31$
при $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$ с, $Re = 100$ , $\tau_2 = 0.1 \cdot 10^{-5}$ с $\tau_3 = 0.1 \cdot 10^{-5}$ с	$\Delta S_2 = 0.007 \cdot 10^{-4}$ (2.1 %)	$\Delta S_3 = 0.000 \cdot 10^{-4}$ (0.0 %)	$\psi_2 = -0.673$ ... 0.207, $\Delta\psi_{12} = 0.206$	$\psi_3 = -0.725$ ... 0.223, $\Delta\psi_{23} = 0.052$	$p = \ln_2(0.206 / 0.052) = \ln_2(3.96) = 1.98$
при $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$ с, $Re = 100$ , $\tau_2 = 0.1 \cdot 10^{-5}$ с $\tau_3 = 0.1 \cdot 10^{-5}$ с	$\Delta S_2 = 0.007 \cdot 10^{-4}$ (2.1 %)	$\Delta S_3 = 0.002 \cdot 10^{-4}$ (0.6 %)	$\psi_2 = -1.079$ ... 0.004, $\Delta\psi_{12} = 0.323$	$\psi_3 = -1.180$ ... 0.254, $\Delta\psi_{23} = 0.101$	$p = \ln_2(0.323 / 0.101) = \ln_2(3.20) = 1.68$

На рис. 2–5 представлены результаты численного моделирования с определением границ течения жидкости и с изображениями функции тока, получены на сетках

Таблица 2. Результаты численных расчётов при разных расчётных параметрах по порядку сходимости от шагов по расчётной сетке ( $h^p$ ) и шага по времени ( $\tau^p$ ). Расчёт  $f S = 0.32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $R_1 = R_2 = 0.05 \text{ м}$ ,  $\omega = 100 \text{ рад/с}$ . Расчёт на сетках 1 –  $40 \times 40$ , 2 –  $80 \times 80$ , 3 –  $160 \times 160$ .

Время расчёта с шагами $\tau_2, \tau_3$ , число Рейнольдса	Потери площади на сетке $80 \times 80$ , $\text{м}^2$ и %	Значения функции тока и модуль её изменения на сетках $40 \times 40$ и $80 \times 80$	Порядок сходимости $p$ по шагу времени $\tau$
при $t = 0.1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ , $Re = 10$ , $\tau_1 = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$	$\Delta S_1 = 0.004 \cdot 10^{-4}$ (1.2 %)	$\psi_1 = -0.804 \dots 0.278$	
при $t = 0.1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ , $Re = 10$ , $\tau_2 = 0.250 \cdot 10^{-6} \text{ с}$	$\Delta S_2 = 0.006 \cdot 10^{-4}$ (1.8 %)	$\psi_2 = -0.752 \dots 0.268$ $\Delta\psi_{12} = 0.052$	
при $t = 0.1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ , $Re = 10$ , $\tau_3 = 0.125 \cdot 10^{-6} \text{ с}$	$\Delta S_3 = 0.004 \cdot 10^{-4}$ (1.2 %)	$\psi_3 = -0.734 \dots 0.241$ $\Delta\psi_{23} = 0.018$	$p = \ln_2(0.052/0.018)$ $= \ln_2(2.89) = 1.53$

$80 \times 80, 160 \times 160$  при числах  $Re = 1, 10$  и  $100$  для угловой скорости  $\omega = 100$  на моменты времени  $t = 0.1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$  и  $0.2 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ .

В табл.1 приведены результаты численных расчётов при разных расчётных параметрах.

В табл. 2 представлены расчёты на сетке  $80 \times 80$  при  $Re = 10, S = 0.32 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = R_2 = 0.05 \text{ м}$ ,  $\omega = 100 \text{ рад/с}$  для определения порядка сходимости от шага по времени  $\tau$ .

По данным расчётам при числах Рейнольдса  $Re$  от 1 до 100 на рассмотренных регулярных сетках при моделировании нестационарного течения вязкой жидкости сохраняется асимптотический второй порядок сходимости по шагам сетки.

Как показали расчёты (табл. 2), на основе значений функции тока достигается сходимость 1-го порядка по  $\tau$ ,  $p = \ln_2(0.052/0.018) = \ln_2(2.89) = 1.53$ . При этом потери массы составили 1.3–1.8 %, что сопоставимо с потерей половины площадей приграничных ячеек, что возможно при суммировании всех их площадей.

На рис. 2 показан расчёт начального момента соприкосновения с поверхностью второго цилиндра вязкой жидкости в момент времени  $t = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  при повышенной угловой скорости, равной  $\omega = 104 \text{ рад/с}$ , и при вязкости  $\nu = 0.32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ . Несмотря на значение числа Рейнольдса  $Re = 100$ , как и в расчётах при  $\omega = 10^2 \text{ рад/с}$  образуется отрыв тонкого слоя жидкости из-за наличия повышенного центробежного ускорения, присутствующего в уравнении (10) в виде  $\frac{(u+\omega(R-y)^2)}{R-y}$  и действующего в отрицательном направлении по оси  $y$  данной полярной системы координат.

## Заключение

Проведена постановка задачи для моделирования течений вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами при различных числах вязкости на основе уравнений Навье – Стокса с отражением основных физических процессов (учёт вязкости с определением поля давления и компонент скоростей во всей области течения жидкости, учёт динамического по времени взаимодействия жидкости с подвижными твёрдыми границами, учёт поверхностного натяжения на свободных границах).

Применена разработанная методика расчёта подвижных границ жидкости как совместно с твёрдыми, так и свободно перемещаемыми границами, на сетках с регулярно распределёнными узлами при  $N_x = N_y = 40 \div 160$ . Приведены результаты расчёта сложных по геометрии течений жидкости при числах Рейнольдса  $Re \leq 100$ .

Использование численного алгоритма и схемы с аппроксимациями вида  $O(\tau, h^2)$  показало достижение таких же порядков точности по  $\tau$  и  $h$  на тестовой задаче.

## Благодарности

Исследования проведены в рамках государственного задания Института математики СО РАН, проект ФВНФ-2022-0016 «Модели и методы обработки данных для поддержки процессов принятия решений».

## Литература

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
2. Копченков В.И., Крайко А.Н., Левин М.П. О применении существенно неравномерных сеток при численном решении уравнений Навье-Стокса // Вычислительная математика и математическая физика. 1982. Т. 22, № 6. С. 1457–1467.
3. Гушин В.А., Матюшин П.В. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 5–20.
4. Паничкин А.В. Численное решение задач нестационарного конвективно-диффузионного переноса на регулярных сетках при наличии пограничных слоев // Вычислительные технологии. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2003. Вып. 8, ч. 3. С. 15–20.
5. Паничкин А.В., Варепо Л.Г. Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами между двумя вращающимися цилиндрами // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: материалы междунар. конф., посвящ. 90-летию акад. Н.Н. Яненко, 30 мая – 4 июня 2011 г. Новосибирск, 2011. URL: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/47491/47492/Panichkin.pdf> (дата обращения: 02.11.2024).
6. Panichkin A., Varepo L. The numerical calculation of the viscous incompressible fluid transfer onto porous surface between rotating cylinders // International Multidisciplinary Microscopy Congress – Springer Proceedings in Physics. 2014. Vol. 154.
7. Паничкин А.В., Варепо Л.Г. Численный расчёт свободного движения малого объёма вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами // Вычислительные технологии. 2013. № 2. С. 62–71.

8. Варепо Л.Г., Паничкин А.В., Панчук К.Л. Алгоритм компьютерного моделирования и визуального представления результатов расчёта течения вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области определения // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2017. № 11 (161). С. 16–22.
9. Panichkin A.V., Varepo L.G. Geometric interpretation of modeling calculation of cylinders axial vibration effect on transfer of viscous incompressible fluid // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1260. Art. 072013.
10. Panichkin A.V. Numerical method of modeling of a current of viscous liquid with free borders // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1441. Art. 012159.
11. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.

**FINITE-DIFFERENCE SIMULATION OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS  
OF TWO ROTATING CYLINDERS DURING THE FLOW OF A VISCOUS  
INCOMPRESSIBLE FLUID FILM**

**A.V. Panichkin<sup>1</sup>**

Dr.Sc. (Techn.), Leading Researcher, e-mail: panich@ofim.oscsbras.ru

**L.G. Varepo<sup>2</sup>**

Dr.Sc. (Techn.), Professor, e-mail: larisavarepo@yandex.ru

<sup>1</sup>Institute of mathematics named after S.L. Soboleva Siberian branch of the Russian Academy  
of Sciences, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Omsk State Technical University, Omsk, Russia

**Abstract.** A numerical algorithm has been developed to simulate the flow of a limited volume of liquid between rotating cylinders with free boundaries and in contact with solid surfaces of the cylinders. The main feature of this algorithm is the ability to consider such basic characteristics of a viscous incompressible liquid as surface tension and adhesion to solid surfaces. A few test calculations have been performed, with the determination of asymptotic parameters of convergence from time steps and spatial coordinates. The results of numerical modeling with the determination of the boundaries of the liquid flow and with images of the stream function obtained on  $80 \times 80$ ,  $160 \times 160$  grids at different Re numbers are presented.

**Keywords:** modeling, hydrodynamic equations, viscous incompressible liquid, dynamic characteristics.

*Дата поступления в редакцию: 02.11.2024*