*Математические
структуры и моделирование
2024. № 4 (72). С. 63–72*

УДК 519.632.4
DOI 10.24147/2222-8772.2024.4.63-72

ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ ЗАДАЧИ

А.И. Задорин
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: zadorin@ofim.oscbras.ru
С.Б. Шагаев
аспирант, e-mail: ssairan@yandex.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Исследуется двухсеточный метод численного решения сингулярно возмущённой эллиптической задачи. На сетке Бахвалова применяется схема направленных разностей, обладающая на этой сетке свойством сходимости, равномерной по малому параметру. Для реализации схемы применяется итерационный метод Зейделя. В результате проведённых численных экспериментов показано, что применение двухсеточного метода позволяет существенно сократить вычислительные затраты. Кроме того, при использовании двухсеточного метода возможно применение метода экстраполяции Ричардсона, что позволяет повысить точность разностной схемы.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, пограничный слой, разностная схема, двухсеточный метод, сетка Бахвалова, экстраполяция Ричардсона.

Введение

В работе проводится анализ двухсеточного метода решения сингулярно возмущённой эллиптической задачи для уравнения с малым параметром ε при старших производных. Актуальность данной задачи обусловлена тем, что на основе сингулярно возмущённых задач моделируются конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Решение такой задачи имеет большие градиенты в областях пограничного слоя, поэтому применение классических разностных схем на равномерной сетке приводит к существенным погрешностям. Известно, что в случае применения сеток, сгущающихся в пограничных слоях, можно добиться сходимости разностной схемы, равномерной по малому параметру. Широко известны сетки Бахвалова [1] и Шишкина [2, 3].

Исследование двухсеточного алгоритма представляет интерес, поскольку его применение приводит к существенному сокращению вычислительных затрат. Кроме этого, на основе известного решения схемы на двух вложенных сетках можно повысить точность решения методом Ричардсона. Сетка Бахвалова ранее не применялась в двухсеточном методе решения сингулярно возмущённой эллиптической задачи.

Двухсеточный метод для решения сингулярно возмущённой задачи применялся в [4–6]. В [4] и [5] использовалась разностная схема экспоненциальной подгонки на равномерной сетке в случае краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В [6] для эллиптической задачи применялась схема направленных разностей на сетке Шишкина.

В данной работе исследуем применение сетки Бахвалова в двухсеточном методе решения эллиптической сингулярно возмущённой задачи.

Используем следующие обозначения. Всюду под C и $C_j, j \geqslant 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от малого параметра ε и числа шагов сетки N. Пусть $||u^h||_h = \max\limits_{i,j}|u^h_{i,j}|$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущённую краевую задачу:

$$Lu(x,y) = \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x,y)u = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \in \Gamma, \tag{1}$$

где $\Omega = (0,1)^2$, $\Gamma = \overline{\Omega}\diagdown\Omega$. Предполагаем, что функции a, b, c, f, g являются достаточно гладкими,

$$a(x) \geqslant \alpha > 0,\ \ b(y) \geqslant \beta > 0,\ \ c(x,y) \geqslant 0,\ \varepsilon \in (0,1].$$

Решение задачи (1) имеет погранслойные области больших градиентов у границ $x = 0, y = 0$ [2].

Зададим двумерную неравномерную сетку:

$$\Omega^h = \{(x_i, y_j)\},\ i,j = 0,1,\ldots,N,$$

$$h_i = x_i - x_{i-1},\ k_j = y_j - y_{j-1},\ x_0 = 0, x_N = 1,\ y_0 = 0, y_N = 1.$$

Зададим модифицированную сетку Бахвалова в соответствии с [7], сгущающуюся в областях пограничного слоя.

Зададим шаги сетки по переменной x. Сначала зададим параметр σ_1:

$$\sigma_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln\varepsilon\right\},\ \varepsilon \leqslant e^{-1}. \tag{2}$$

При $\varepsilon > e^{-1}$ зададим $\sigma_1 = 1/2$.

При $\sigma_1 = 1/2$ зададим сетку Ω^h равномерной по x с шагами $h_i = 1/N$.

При $\sigma_1 < 1/2$ сетку зададим неравномерной на интервале [0, σ_1]:

$$x_i = -\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln\Big[1 - 2(1-\varepsilon)i/N\Big],\ i = 0,1,\ldots,N/2, \tag{3}$$

и равномерной на интервале [σ_1, 1]:

$$x_i = \sigma_1 + (2i/N - 1)(1-\sigma_1),\ \ N/2 \leqslant i \leqslant N. \tag{4}$$

Аналогично зададим шаги сетки по переменной y. Зададим σ_2, узлы y_j и шаги сетки:

$$\sigma_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2\varepsilon}{\beta}\ln\varepsilon\right\},\ \varepsilon \leqslant e^{-1}. \tag{5}$$

При $\varepsilon > e^{-1}$ зададим $\sigma_2 = 1/2$. При $\sigma_2 = 1/2$ сетку Ω^h зададим равномерной по y с шагами $k_j = 1/N$. При $\sigma_2 < 1/2$ зададим сетку следующим образом:

$$y_j = -\frac{2\varepsilon}{\beta}\ln\Big[1 - 2(1-\varepsilon)j/N\Big],\ j = 0, 1, \ldots, N/2, \tag{6}$$

$$y_j = \sigma_2 + (2j/N - 1)(1 - \sigma_2),\quad N/2 \leqslant j \leqslant N. \tag{7}$$

На заданной сетке Ω^h выпишем схему направленных разностей [8]:

$$L_{i,j}^h u^h = \frac{2\varepsilon}{h_i + h_{i+1}}\Big[\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h_{i+1}} - \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{h_i}\Big] +$$
$$+\frac{2\varepsilon}{k_j + k_{j+1}}\Big[\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{k_{j+1}} - \frac{u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h}{k_j}\Big] +$$
$$+a(x_i)\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h_{i+1}} + b(y_j)\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{k_{j+1}} - c(x_i, y_j)u_{i,j}^h = f(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in \Omega,$$
$$u_{i,j}^h = g(x_i, y_j),\quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \tag{8}$$

В [9] для схемы (8) на сетке (2)–(7) для некоторой постоянной C получена оценка погрешности, равномерная по параметру ε:

$$\max_{i,j}|u(x_i, y_j) - u_{i,j}^h| \leqslant \frac{C}{N}. \tag{9}$$

Целью работы является разработка двухсеточного алгоритма для реализации схемы (8).

2. Разработка двухсеточного алгоритма

2.1. Реализация разностной схемы методом Зейделя

Схему (8) можно записать как пятиточечную и для её реализации применить итерационный метод Зейделя:

$$A_{i,j}u_{i-1,j}^{(m+1)} + B_{i,j}u_{i,j-1}^{(m+1)} + C_{i,j}u_{i+1,j}^{(m+1)} + D_{i,j}u_{i,j+1}^{(m)} - E_{i,j}u_{i,j}^{(m+1)} = F_{i,j},\ \ 1 \leqslant i, j < N,$$
$$u_{i,j}^{(m+1)} = g(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in \Gamma_h, \tag{10}$$

где $F_{i,j} = f(x_i, y_j)$, m – номер итерации, $u_{i,j}^{(0)}$ – начальное приближение для итераций.

Матрица схемы (8) обладает диагональным преобладанием, поэтому итерационный метод Зейделя для нахождения решения схемы является сходящимся [10].

Для метода Зейделя известна оценка сходимости итераций [10]:

$$||u^{(m+1)} - u^h||_h \leqslant q_h ||u^{(m)} - u^h||_h, \; q_h < 1. \tag{11}$$

Для оператора разностной схемы (8) справедлива оценка устойчивости [8]:

$$\max_{i,j} |u_{i,j}^{(m_h)} - u_{i,j}^h| \leqslant \frac{1}{\alpha} \max_{i,j} |L_{i,j}^h u^{(m_h)} - f(x_i, y_j)|. \tag{12}$$

Итерации (10) продолжаем, пока не выполнится условие:

$$\max_{i,j} |L_{i,j}^h u^{(m_h)} - f(x_i, y_j)| \leqslant \frac{\alpha}{N}. \tag{13}$$

При выполнении оценки (13) в силу оценки (12) имеем:

$$\max_{i,j} |u_{i,j}^{(m_h)} - u_{i,j}^h| \leqslant \frac{1}{N}. \tag{14}$$

Оценка (14) согласуется с оценкой (9) для погрешности разностной схемы (8) при применении итерационного метода.

Известно, что для реализации прогонки требуется выполнить dN арифметических действий, где $d < 10$. При анализе двухсеточного метода рассмотрим общий случай, когда

$$\delta_h = ||u^{(0)} - u^h||_h, ||u^h - [u]_{\Omega^h}||_h \leqslant C\Delta_h. \tag{15}$$

Учитывая (11), (15), получаем, что для выполнения условия

$$\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}^{(m_h)}| \leqslant C\Delta_h$$

потребуется

$$N_h \approx dN^2 \log_{q_h} \left(\frac{\Delta_h}{\delta_h} \right) \tag{16}$$

арифметических действий.

Итак, задана реализация разностной схемы на основе метода Зейделя.

При реализации разностной схемы двухсеточным алгоритмом потребуется интерполяция сеточного решения с редкой сетки на густую. Проведём анализ формулы двумерной интерполяции на сетке Бахвалова.

2.2. Двумерная интерполяция на сетке Бахвалова

Пусть $K_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ – произвольная ячейка сетки Ω^h. Зададим полиномиальную интерполяцию для этой ячейки следующим образом:

$$I(u, x, y) = \Big(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j} \Big) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \times \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} +$$

$$+ \Big(u_{i,j+1} - u_{i,j} \Big) \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + \Big(u_{i+1,j} - u_{i,j} \Big) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + u_{i,j}, u_{i,j} = u(x_i, y_j). \tag{17}$$

Оценим погрешность интреполяционной формулы (17).

Лемма 1. *В случае сетки Бахвалова Ω^h для некоторой постоянной C справедлива оценка погрешности*

$$|I(u,x,y)-u(x,y)| \leqslant \frac{C}{N^2}, \ \ (x,y)\in K_{i,j}. \tag{18}$$

Доказательство. Представим $I(u,x,y)$ в виде

$$I(u,x,y) = I_y(I_x(u,x,y),x,y). \tag{19}$$

Здесь $I_x(u,x,y)$ – формула линейной интерполяции по x при фиксированном значении y,

$$I_x(u,x,y) = u_{i,j} + (u_{i+1,j}-u_{i,j})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}, \ \ x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

Аналогично определяется $I_y(u,x,y)$:

$$I_y(u,x,y) = u_{i,j} + (u_{i,j+1}-u_{i,j})\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}, \ \ y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}.$$

Из (19) следует

$$|I(u,x,y)-u(x,y)| \leqslant |I_y(I_x(u,x,y)-u(x,y),x,y)| + |I_y(u,x,y)-u(x,y)|. \tag{20}$$

В [11] получена оценка погрешности для одномерной формулы линейной интерполяции на сетке Бахвалова:

$$|I_y(u,x,y)-u(x,y)| \leqslant \frac{C_1}{N^2}, \ \ (x,y)\in K_{i,j}, \tag{21}$$

где C_1 – некоторая постоянная. Аналогичная оценка верна для интерполянта $I_x(u,x,y)$. Несложно показать, что интерполянт $I_y(u,x,y)$ удовлетворяет оценке устойчивости:

$$|I_y(u,x,y)-I_y(\tilde{u},x,y)| \leqslant 3\max|u(x,y)-\tilde{u}(x,y)|. \tag{22}$$

Учитывая оценки (21), (22), из (20) получаем оценку (18) на сетке Бахвалова. ■

2.3. Применение двухсеточного метода

Исследуем двухсеточный метод для сокращения числа арифметических действий при нахождении решения разностной схемы.

Перейдём к заданию двухсеточного метода. Введём сетку Ω^H, такую же по структуре, как сетка Ω^h, с намного меньшим количеством узлов $n, \ n \ll N$.

Сначала с применением итерационного метода (10) решаем задачу (1) на сетке Ω^H. По аналогии с (15) справедлива оценка

$$||u^H - [u]_{\Omega^H}||_H \leqslant C\Delta_H. \tag{23}$$

Итерации на сетке Ω^H продолжаем, пока не выполнится условие

$$||L^H u^{(m_H)} - f^H||_H \leqslant \alpha\, \Delta_H.$$

Учитывая (12), получаем

$$||u^{(m_H)} - u^H||_H \leqslant \Delta_H.$$

Эта оценка соответствует оценке погрешности (23) для разностной схемы. Далее необходимо сеточное решение $u^{(m_H)}$, найденное в узлах сетки Ω^H, проинтерполировать в узлы исходной сетки Ω^h.

В соответствии с оценкой (18) применение интерполяции (17) не снижает точности найденного решения на грубой сетке, поэтому интерполяционную формулу (17) можно использовать в двухсеточном методе.

Таким образом, решение разностной схемы на сетке Ω^h находится с погрешностью порядка $O(\Delta_H)$ и принимается за начальное приближение для итераций на густой сетке.

Оценим выигрыш в числе арифметических действий при применении двухсеточного метода. Пусть N_{Hh} – число арифметических действий при применении двухсеточного метода. Учитывая оценку (11), по аналогии с получением оценки (16) имеем

$$N_{Hh} \approx d\, n^2 \log_{q_H} \left(\frac{\Delta_H}{\delta_H}\right) + I_H + d\, N^2 \log_{q_h} \left(\frac{\Delta_h}{\Delta_H}\right), \tag{24}$$

где I_H – необходимое число арифметических действий для интерполяции, $\delta_H = ||u^{(0)} - u^H||_H$.

Используя (16), (24), получаем выигрыш в числе арифметических действий при применении двухсеточного метода:

$$N_h - N_{Hh} \geqslant d\,(N^2 - n^2)\, \log_{q_H} \left(\frac{\Delta_H}{\delta_H}\right) - I_H. \tag{25}$$

2.4. Экстраполяция Ричардсона

Зная решение разностной схемы на сетках Ω^h и Ω^H, можно повысить точность разностной схемы на основе метода Ричардсона. Выделяя главный член погрешности, в узлах сетки Ω^H для некоторой постоянной C имеем

$$u(x_{i,j}) = u^h_{i,j} + C\Delta_h + o(\Delta_h), \;\; u(x_{i,j}) = u^H_{i,j} + C\Delta_H + o(\Delta_H).$$

На основе этих соотношений, пренебрегая величинами $o(\Delta_h), o(\Delta_H)$, находим решение разностной схемы в узлах сетки Ω^H с повышенной точностью:

$$u^{Hh}_{i,j} = u^H_{i,j} + \frac{u^H_{i,j} - u^h_{i,j}}{\Delta_h - \Delta_H}\Delta_H, \tag{26}$$

при этом выполняется соотношение

$$u(x_i, y_j) = u^{Hh}_{i,j} + o(\Delta_H).$$

Для разностной схемы (8) с учётом оценки (9) из (26) получаем

$$u_{i,j}^{Hh} = \frac{N}{N-n} u_{i,j}^{h} - \frac{n}{N-n} u_{i,j}^{H}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,n, \tag{27}$$

при этом справедлива оценка погрешности

$$|u(x_i, y_j) - u_{i,j}^{Hh}| \leqslant \frac{C}{n^2}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,n. \tag{28}$$

Из (28) следует, что при $n = N/2$ применение метода Ричардсона приводит к повышению точности разностной схемы, при этом погрешность становится порядка $O(1/N^2)$.

В соответствии с Леммой 1, без потери точности можно проинтерполировать полученное решение $u_{i,j}^{Hh}$ с сетки Ω^H на сетку Ω^h по формуле (17).

3. Численные эксперименты

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + u_x + 2u_y - u = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \end{gathered} \tag{29}$$

где $f(x,y), g(x,y)$ соответствуют решению

$$u(x,y) = \left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right)\left(1 - e^{-2y/\varepsilon}\right) + \cos\frac{\pi x}{2} e^{y}. \tag{30}$$

Остановимся на односеточном методе и применим схему (8) на сетке Бахвалова. В табл. 1 для различных значений ε приведены максимальная погрешность $\Delta_{N,\varepsilon} = \max\limits_{i,j}|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)|$, вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon} = \log_2(\Delta_{N,\varepsilon}/\Delta_{2N,\varepsilon})$ и число итераций при реализации схемы (8) на сетке Бахвалова. В таблицах $ae - m$ обозначает $a \cdot 10^{-m}$.

Рассмотрим два подхода для реализации метода Зейделя: прямой ход, когда в (10) индексы i, j возрастают, и расчёт в сторону пограничного слоя (обратный ход), когда индексы i, j убывают. В дополнение рассмотрим подход, когда в итерационном методе при каждом j схема записывается как трёхточечная по i и реализуется методом прогонки.

В табл. 2 приведены результаты сравнения итерационных методов для нахождения решения схемы (8) при $\varepsilon = 10^{-1}$, $n = N/2$. Для различных вариантов реализации итерационного метода приведено число итераций односеточного и двухсеточного методов. Перед скобками – число итераций на сетке Ω^H, в скобках – на сетке Ω^h. Как по числу итераций, так и по времени вычислений более экономичен метод с применением прогонки при заданном j.

В табл. 3 при $\varepsilon = 10^{-2}$ в зависимости от n и N приведено число итераций метода Зейделя (обратный ход). Для сравнения приведено число итераций односеточного метода. Наибольший выигрыш в числе арифметических действий от применения двухсеточного метода достигается при $n = N/2$.

В табл. 4 для заданных n и N приведены максимальная погрешность схемы (8) и максимальная погрешность при применении метода Ричардсона (ниже) на сетке Ω^h. Метод Ричардсона даёт выше точность при $n = N/2$.

Таблица 1. Погрешность, порядок точности схемы (8) и число итераций на сетке Бахвалова

ε	N			
	16	32	64	128
1	3.54e-3 0.77 220	2.07e-3 0.89 930	1.12e-3 0.94 3939	0.55e-3 –
10^{-1}	1.05e-1 0.79 107	6.07e-2 0.89 378	3.28e-2 0.94 1420	1.71e-2 0.98 5592
10^{-2}	1.62e-1 0.82 120	9.17e-2 0.93 402	4.82e-2 0.97 1450	2.46e-2 0.98 5553
10^{-3}	1.81e-1 0.83 141	1.01e-1 0.94 463	5.28e-2 0.99 1636	2.66e-2 0.99 6196

Таблица 2. Сравнение итерационных методов

	N, число итераций		
Метод	16	32	64
Зейделя прямой	110 31 (81)	383 110 (279)	1410 383 (1006)
Зейделя обратный	88 21 (66)	338 88 (251)	1322 338 (952)
Применение прогонки	88 24 (65)	310 88 (224)	1151 310 (804)

Заключение

Проведён анализ двухсеточного алгоритма для численного решения эллиптической сингулярно возмущённой задачи. Исследовано применение в двухсеточном алгоритме схемы направленных разностей на сетке Бахвалова. Проведено численное сравнение аналогов метода Зейделя для реализации разностной схемы. Показано, что число арифметических действий сокращается при применении двухсеточного метода. Повышена точность разностной схемы на основе применения метода экс-

Таблица 3. Число итераций на сетке Бахвалова, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N			
	16	32	64	128
4	$2(72)$	$2(288)$	$2(1147)$	$2(4653)$
8	$21(66)$	$21(273)$	$21(1102)$	$21(4492)$
16		$88(251)$	$88(1041)$	$88(4288)$
32			$338(952)$	$338(4032)$
64				$1322(3679)$
односеточный метод	88	338	1322	5295

Таблица 4. Погрешность разностной схемы без применения метода Ричардсона и с применением (ниже), $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N			
	16	32	64	128
4	$1.72e-1$	$9.46e-2$	$4.90e-2$	$2.48e-2$
	$1.10e-1$	$5.96e-2$	$3.06e-2$	$1.54e-2$
8	$1.72e-1$	$9.46e-2$	$4.90e-2$	$2.48e-2$
	$1.06e-1$	$5.14e-2$	$2.59e-2$	$1.29e-2$
16		$9.46e-2$	$4.90e-2$	$2.48e-2$
		$5.02e-2$	$2.23e-2$	$1.11e-2$
32			$4.90e-2$	$2.48e-2$
			$2.09e-2$	$8.75e-3$
64				$2.48e-2$
				$7.43e-3$

траполяции Ричардсона.

Литература

1. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–890.
2. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

3. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore, World Scientific, 1996.
4. Vulkov L.G., Zadorin A.I. Two-grid Interpolation Algorithms for Difference Schemes of Exponential Type for Semilinear Diffusion Convection-Dominated Equations // American Institute of Physics Conference Proceedings. 2008. Vol. 1067. P. 284–292.
5. Vulkov L.G., Zadorin A.I. Two-Grid Algorithms for an ordinary second order equation with exponential boundary layer in the solution // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. 2010. Vol. 7, No. 3. P. 580–592.
6. Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V., Zadorin N.A. A two-grid method for elliptic problem with boundary layers // Applied Numerical Mathematics. 2015. Vol. 93. P. 270–278.
7. Roos H.G. Layer-adapted meshes: milestones in 50 years of history // Applied mathematics. 2019. arXiv:1909.08273v1.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1977. 656 с.
9. Nhan T. A., Vulanovic R. The Bakhvalov mesh: a complete finite-difference analysis of two-dimensional singularly perturbed convection-diffusion problems // Numerical Algorithms. 2020. Vol. 87. P. 203–221.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1975. 632 с.
11. Блатов И.А., Задорин Н.А. Интерполяция на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя // Учёные записки Казанского университета. Физико-математические науки. 2019. Т. 161, №. 4. С. 497–508.

TWO GRID METHOD ON THE BAKHVALOV GRID FOR AN ELLIPTIC SINGULARLY PERTURBED PROBLEM

A.I. Zadorin
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: zadorin@ofim.oscbras.ru
S.B. Shagaev
Postgraduate Student, e-mail: ssairan@yandex.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Abstract. A two-grid method for the numerical solution of a sungularly perturbed elliptic problem using Bakhvalov-type mesh is studied. A scheme of upwind differencies is used, which has the property of convergence on the grid, which is uniform in a small parameter. The Seidel iterative method is used to find the scheme solution. Previously, the use of the two-grid method leads to a reduction in computsational costs. In addition, it is shown that based on the Richardson extrapolation method, it is possible to improve the accuracy of the difference scheme.

Keywords: elliptic equation, boundary layer, difference scheme, two-grid method, Bakhvalov mesh, Richardson extrapolation.

Дата поступления в редакцию: 17.06.2024