*Математические структуры и моделирование*
2006, вып. 16, с. 21–25

УДК 519.214.5

# МИНИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ МАКСИМУМОВ

**А.Г. Гринь**

In this article suggests a minimal in a certain sense conditions of weak dependence, which provided convergence of distributions of maximum random variables to a nondegenerate limit laws.

В статье [1] введено минимальное в некотором смысле условие слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающее выполнение центральной предельной теоремы. В настоящей работе получено аналогичное минимальное условие слабой зависимости, при котором существует невырожденное предельное распределение для максимума n первых членов стационарной последовательности.

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $X_n = \max\limits_{1\le k\le n} \xi_n$, $F_n(x) = \mathbf{P}\left\{X_n < x\right\}$. Пусть $F_n \Rightarrow F$ означает, что $\{F_n\}$ слабо сходится к $F$. Следуя [3], назовем $\{a_n,\ n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка $\rho$, если $a_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка $\rho$, где $[x]$ - целая часть $x$.

Если $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных величин, $F_1(x) < 1,\ x > 0$, то для того, чтобы при некотором выборе нормирующих констант $a_n$ имело место соотношение $F_n(xa_n) \Rightarrow F_\xi(x),\ n \to \infty$, где $\xi$ - невырожденная случайная величина, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{P}\{\xi_1 \ge x\}$ являлась правильно меняющейся функцией порядка $-\rho,\ \rho > 0$. При этом предельное распределение имеет вид $F_\xi(x) = G_\rho(x) = \exp\left\{-cx^{-\rho}\right\}$, $x > 0,\ c > 0,$ а нормирующие постоянные $a_n$ можно найти из соотношения $n\mathbf{P}\{\xi_1 \ge a_n\} \to c, n \to \infty$. [4, с. 319]. Такая последовательность $\{a_n\}$ существует и является правильно меняющейся порядка $1/\rho$ [3, с. 29].

Как и в [1], символ $n + m \to \infty$ в каком-либо соотношении будет означать, что указанное соотношение выполняется при $n \to \infty$ и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$.

---



Омский государственный университет.

E-mail: `grin@math.omsu.omskreg.ru`

Работа поддержана грантом РФФИ 06–01–00127.

**Theorem 1.** *Пусть* $\{\xi_n\},\ n = 1, 2, ...\}$ *– стационарная последовательность, у которой* $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}$ *является правильно меняющейся функцией порядка* $-\rho$, $\rho > 0$ *и пусть* $\{a_n\}$ *таковы, что* $n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq a_n\} \to c,\ c > 0,\ n \to \infty$. *Для того, чтобы* $F_n(xa_n) \Rightarrow G_\rho(x),\quad n \to \infty,\ x > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения:*

*а)*

$$F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m}) \to 0, \quad n + m \to \infty; \tag{R$_1$}$$

*б) при любом* $x > 0$ *и при любой достаточно медленно растущей последовательности* $k = k(n) \to \infty,\ n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} \sim n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\},\ n \to \infty. \tag{R$_2$}$$

■

***Remark* 1.** Теорему 1 можно интерпретировать так: условия $(\mathrm{R}_1)$ и $(\mathrm{R}_2)$ являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняются предельные теоремы для максимумов с той же нормировкой, что и в предельных теоремах для независимых величин.

Приведем достаточные условия для выполнения $(\mathrm{R}_1)$ и $(\mathrm{R}_2)$ в терминах «традиционных» условий слабой зависимости.

Пусть $\mathcal{F}_{\leq n}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$ – $\sigma$ -алгебры, порожденные семействами $\{\xi_i : i \leq n\}$ и $\{\xi_i : i \geq n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию сильного перемешивания*, если

$$\alpha(n) = \sup_{A\in\mathcal{F}_{\leq 0}, B\in\mathcal{F}_{\geq n}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

***Remark* 2.** Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, то выполнено условие $(\mathrm{R}_1)$. Действительно, пусть $Y_n$ и $Z_n$ – последовательности случайных величин и $Z_n \to 0$ по вероятности. Тогда при $x > 0$

$$0 \leq \mathbf{P}\{Y_n < x\} - \mathbf{P}\{\max\{Y_n, Z_n\} < x\} \leq \mathbf{P}\{Z_n \geq x\} \to 0,\ n \to \infty. \tag{1}$$

Пусть, скажем, $K$ и $N$- множества натуральных чисел, содержащие $k$ и $n$ элементов соответственно и пусть $k = o(n)$. Так как $\mathbf{P}\{\xi_1 > x\}$ – правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, то

$$n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_n\} \sim \frac{c\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_n\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 > a_n\}} \to cx^{-\rho}, \tag{2}$$

так что

$$\mathbf{P}\{\max_{i\in K} \xi_i > x\} \leq k\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xa_n\} \sim \frac{ck}{nx^\rho} \to 0,\ n \to \infty,$$

и в силу (1)

$$\mathbf{P}\{\max_{i\in N\cup K} \xi_i \geq xa_n\} - \mathbf{P}\{\max_{i\in N} \xi_i \geq xa_n\} \to 0,\ n \to \infty. \tag{3}$$

С помощью (3) и определения условия сильного перемешивания получаем

$$F_{n+m}(xa_{n+m}) = \mathbf{P}\{\max_{1\le i\le n+m} \xi_i < xa_{n+m}\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\max_{1\le i\le n} \xi_i < xa_{n+m}, \max_{n+k\le j\le n+m+k} \xi_j < xa_{n+m}\} + o_n(1) =$$

$$= \mathbf{P}\{\max_{1\le i\le n} \xi_i < xa_{n+m}\}\mathbf{P}\{\max_{n+k\le j\le n+m+k} \xi_j < xa_{n+m}\} + o_n(1) + \alpha(k) =$$

$$= F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m}) + o_n(1).$$

***Remark* 3.** Если для некоторой функции $\lambda(x) > 0$ такой, что $\lambda(x) \to 0$, $x \to 0$

$$\sup\left\{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\lambda(\mathbf{P}(B))} : \ A \in \mathcal{F}_{\ge 1}, B \in \mathcal{F}_{\le 0}\right\} \le 1,$$

то говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию $\lambda$-перемешивания* (см. [5]).

Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $\lambda$-перемешивания, то в условиях теоремы 1 имеет место ($\mathrm{R}_2$)

Действительно,

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}\{\xi_i > xa_{kn}\}\right\} \le n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\}. \tag{4}$$

Далее, обозначив $A_i = \{\xi_i > xa_{kn}\}$, с помощью условия $\lambda$-перемешивания получаем

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\{\overline{A}_1, ...\overline{A}_{i-1}A_i\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{P}\{A_i\} - \mathbf{P}\left\{A_i\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\right\}\right) \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{P}\{A_i\} - \mathbf{P}\{A_i\}\lambda\left(\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\right\}\right)\right). \tag{5}$$

Если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то в силу (2)

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\right\} \le n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\} \sim \frac{1}{kx^\rho} \to 0, \ n \to \infty,$$

и из последнего соотношения, (4) и (5) следует ($\mathrm{R}_2$).

***Remark* 4.** Обозначим

$$\alpha_{r,s}(n) = \sup\left\{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}^r(A)\mathbf{P}^s(B)} : A \in \mathcal{F}_{\le 0}, \ B \in \mathcal{F}_{\ge n}, \ \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0\right\}.$$

(см. [6]). Если $\beta = r + s > 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{r,s}(n) < \infty$, то в условиях теоремы 1 имеет место ($\mathrm{R}_2$).

В обозначениях замечания 3

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\} - \sum_{1\leq i\neq j\leq n}^{n} \mathbf{P}\{A_iA_j\}. \tag{6}$$

Так как $\mathbf{P}\{A_1\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \geq xa_{kn}\} \to 0,\ n \to 0$ и $\beta > 1$, то

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq n}^{n} \mathbf{P}\{A_iA_j\} \leq 2\mathbf{P}^{\beta}\{A_1\} \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} \alpha_{r,s}(j-i) = 2\mathbf{P}^{\beta}\{A_1\} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\alpha_{r,s}(k) \leq$$

$$\leq 2n\mathbf{P}^{\beta}\{A_1\} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{r,s}(k) = o\left(n\mathbf{P}\{A_1\}\right). \tag{7}$$

Из (4), (6) и (7) следует ($\mathrm{R}_2$).

***Lemma 1.*** *Последовательность* $\{a_n^{\rho}\}$ *является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а* $a_n$ *– правильно меняющейся последовательностью порядка* $1/\rho,\ \rho > 0$) *тогда и только тогда, когда*

$$a_{n+m}^{\rho} \sim a_n^{\rho} + a_m^{\rho}, \quad n+m \to \infty.$$

■

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 в [1].

**Доказательство** теоремы 1.

Необходимость. Пусть $F_n(xa_n) \Rightarrow G_{\rho}(x),\ n \to \infty$. Функция $G_{\rho}(x)$ непрерывна при $x > 0$, поэтому слабая сходимость равносильна поточечной: $F_n(xa_n) \to G_{\rho}(x),\ x > 0$. Пусть $m = m(n)$ – произвольная последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\Delta(n) = \left|F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m})\right|.$$

Поскольку $a_n^{\rho}$ – правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$a_{n+m}^{\rho} \sim a_n^{\rho} + a_m^{\rho},\ n \to \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq a \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$a_{n_2+m_2}^{-\rho} a_{n_2}^{\rho} \to a, \quad a_{n_2+m_2}^{-\rho} a_{m_2}^{\rho} \to 1-a, \quad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < a < 1$. Имеем

$$\Delta(n_2) = \left|F_{n_2+m_2}(xa_{n_2+m_2}) - F_{n_2}\left(xa_{n_2}\frac{a_{n_2+m_2}}{a_{n_2}}\right) F_{m_2}\left(xa_{m_2}\frac{a_{n_2+m_2}}{a_{m_2}}\right)\right| \to$$

$$\to \left|G_{\rho}(x) - G_{\rho}\left(xa^{-\frac{1}{\rho}}\right) G_{\rho}\left(x(1-a)^{-\frac{1}{\rho}}\right)\right| =$$

$$= \left|\exp\left\{-cx^{-\rho}\right\} - \exp\left\{-acx^{-\rho}\right\} \exp\left\{-(1-a)cx^{-\rho}\right\}\right| = 0. \tag{8}$$

Если же $a = 0$ $(a = 1)$, то при $n \to \infty$ $a^{-1}_{n_2+m_2} X_{n_2} \to 0$ $(a^{-1}_{n_2+m_2} X_{m_2} \to 0)$ по вероятности, следовательно, при $x > 0$ $F_{n_2}(xa_{n_2+m_2}) \to 1$ $(F_{m_2}(xa_{n_2+m_2}) \to 1)$, а с помощью (1) легко выводится, что

$$|F_{n_2+m_2}(xa_{n_2+m_2}) - F_{m_2}(xa_{n_2+m_2})| \to 0 \ (|F_{n_2+m_2}(xa_{n_2+m_2}) - F_{n_2}(xa_{n_2+m_2})| \to 0),$$

то есть $\Delta(n_2) \to 0,\ n \to \infty$. Вместе с (8) это означает, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Следовательно, $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$, и мы показали, что выполнено условие ($\mathrm{R}_1$).

Докажем ($\mathrm{R}_2$). Если $k = k(n) \to \infty$ растет достаточно медленно, то в силу (2)

$$n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\} \sim \frac{c}{kx^{\rho}},\ n \to \infty. \tag{9}$$

Так как $a^{\rho}_{kn} \sim ka^{\rho}_n$ ($\{a^{\rho}_n\}$ - правильно меняющаяся последовательность порядка 1), то по предположению

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} = 1 - F_n(xa_{kn}) = 1 - \exp\left\{-\frac{c}{kx^{\rho}}\right\} + o_n(1) = \frac{c}{kx^{\rho}} + o_n(1) + o_k(1),$$

что вместе с (9) дает нам условие ($\mathrm{R}_2$).

Достаточность.

Пусть выполнены условия ($\mathrm{R}_1$) и ($\mathrm{R}_2$), $k = k(n) \to \infty$, $n = km+r$, $0 \le r < m$. С помощью (3) и условия ($\mathrm{R}_1$) при $k$, растущем достаточно медленно, получаем

$$F_n(xa_n) = F^k_m(xa_n) + o_n(1) = (1 - \mathbf{P}\{X_m > xa_n\})^k + o_n(1). \tag{10}$$

Из условия ($\mathrm{R}_1$) и (2) следует

$$\mathbf{P}\{X_m > xa_n\} \sim m\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_n\} \sim \frac{mc}{nx^{\rho}} \sim \frac{c}{kx^{\rho}}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) выводим

$$F_n(xa_n) = \left(1 - \frac{c}{kx^{\rho}} + o_n(1)\right)^k + o_n(1) \to \exp\left\{-cx^{-\rho}\right\},\ n \to \infty.$$

Теорема доказана. ■

## References

1. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т.47, N.3. С.554-558.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984.
5. Гринь А.Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием // Сибирский математический журнал. 1990. Т.31, N.1. С.53-63.
6. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions // In: Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics. V.11). Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser. 1986. P.165-192.