Математические структуры и моделирование
2006, вып. 16, с. 45–50

УДК 519.95

ОЦЕНИВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАНАЛОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ИНВАРИАНТНОЕ К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов

Рассмотрен метод оценивания взаимодействия каналов систем управления, основанный на формировании сингулярных значений Ганкеля для систем с единичным входом и выходом, входящих в состав системы управления с множеством входов и выходов.

Введение

Взаимодействие каналов – свойство систем управления, создающее трудности при формировании требуемого управления вектором состояния, без возмущения других каналов. Наиболее значительная работа в области исследования взаимного влияния каналов - работа Е. Бристол [1], в которой представлен метод RGA (Relative Gain Array). Однако метод RGA имеет ограничение - в нем рассматриваются только частотные характеристики процесса. Метод основан на построении матрицы мер взаимодействия всех возможных SISO-систем (систем с единичным входом и выходом), включеных в состав MIMO-системы (системы с множеством входов и выходов). Метод RGA обеспечивает информацию об управляемости и робастности MIMO-системы [2, 4].

Рассмотрим систему, которая может быть описана моделью $\mathbf{z}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$, где $\mathbf{u}(s)$, $\mathbf{z}(s) - n$-мерные векторы преобразований Лапласа входных/выходных сигналов соответственно; $\mathbf{G}(s) - n \times n$ матрица устойчивых передаточных функций и матрица $\mathbf{G}(0)$ - несингулярная. Матрица относительных коэффициентов усиления RGA системы определяется как $\Lambda(\mathbf{G}) = \mathbf{G} \circ \mathbf{G}^{-\mathrm{T}}$, где $\circ$ - поэлементное умножение (произведение Шура). Относительный коэффициент усиления $\lambda_{ij}(\mathbf{G})$ для пары $u_j - z_i$ задается как $\lambda_{ij}(\mathbf{G}) = \frac{g_{ij}}{\bar{g}_{ij}}$, где g_{ij} - коэффициент усиления разомкнутого контура $u_j - z_i$; $\bar{g}_{ij}$ - коэффициент усиления контура $u_j - z_i$, когда остальная часть системы замкнута контуром интегральной обратной связи. Пусть $\bar{\mathbf{G}}$- матрица, полученная приравниванием нулю всех компонентов матрицы $\mathbf{G}$, которые не соответствуют паре входа/выхода в заданной структуре

Омский филиал Института математики СО РАН.
E-mail: `negue@avte.omsk.info`

децентрализованного управления. Индекс Нидерлински (Niederlinski) [5] для этой структуры определяется как [3]:

$$NI(\mathbf{G}) = \frac{\det(\mathbf{G})}{\det(\bar{\mathbf{G}})}.$$

1. Постановка задачи

Рассмотрим конечномерную линейную инвариантную по времени динамическую систему $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}]$, которая может быть представлена в пространстве состояний (SS - state space) соотношениями:

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \\ \mathbf{z} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}, \end{array} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^n$- вектор состояния, $\mathbf{u}(\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^m$ - вектор входных управляющих сигналов, $\mathbf{z}(\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^p$- вектор выходных сигналов. При этом матричная передаточная функция системы $\mathbf{G}(s)$: $\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Отклик выходного сигнала для начального состояния x0 и входа u(t) можно записать в виде [7]:

$$\mathbf{z}(t) \ = \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t). \tag{2}$$

Для системы с реализацией: $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{0}]$ можно сформировать грамиан наблюдаемости [7]:

$$\mathbf{W}_o \ = \int\limits_0^\infty (e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t})\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}dt, \tag{3}$$

являющийся положительно определенным решением уравнения Ляпунова: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} \ + \ \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \ = \ 0$. Грамиан управляемости системы:

$$\mathbf{W}_c \ = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t}dt \tag{4}$$

положительно определен решением уравнения Ляпунова:

$$\mathbf{AW}_c \ + \ \mathbf{W}_c\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \ + \ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \ = \ 0.$$

Требуется найти параметры, инвариантные по отношению к преобразованию подобия вектора состояния

2. Формирование параметров SISO-систем, инвариантных к преобразованию вектора состояния

Грамианы$\mathbf{W}_c, \mathbf{W}_o$ и матричная передаточная функция $\mathbf{G}(s)$ зависят от реализации; после преобразования подобия $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{Tx}$ грамианы преобразуются как

$\mathbf{W}_c \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{W}_c\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ $\mathbf{W}_o \Rightarrow \mathbf{T}^{\text{-}\mathrm{T}}\mathbf{W}_o\mathbf{T}^{\text{-}1}$ соответственно. Собственные значения матрицы $\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o$ инвариантны относительно действия преобразования подобия $\mathbf{T}$. Если $\mathbf{T}$ - такая матрица, что:

$$\mathbf{T}\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o\mathbf{T}^{\text{-}1} = \Sigma = diag\{\sigma_{i_1}^2, \sigma_{i_2}^2, \ldots, \sigma_{i_n}^2\}, \tag{5}$$

то сингулярные значения Ганкеля (HSV - Hankel singular value) системы:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$$

не зависят от $\mathbf{T}$.

С MIMO-системой $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{0}]$ свяжем совокупность SISO-систем с входом u_j: j=1..m и выходом z_i: i =1..p; SS-реализация каждой такой системы задается как $\left[\mathbf{A}, \mathbf{b}_i; \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}\right]$ с грамианами $\mathbf{W}_{oi}, \mathbf{W}_{cj}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{oj} \ + \ \mathbf{W}_{oj}\mathbf{A} \ + \ \mathbf{c}_j\mathbf{c}_j^{\mathrm{T}} & = & 0; \\ \mathbf{A}\mathbf{W}_{ci} \ + \ \mathbf{W}_{ci}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \ + \ \mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_i & = & 0, \end{array} \tag{6}$$

где $\mathbf{b}_i$ – $i^{\text{ый}}$ столбец матрицы $\mathbf{B}$; $\mathbf{c}_j$ – $j^{\text{ый}}$ столбец матрицы $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$. HSV пары ($\mathbf{W}_{oi}, \mathbf{W}_{cj}$) оценивают возможность входа u_j и выхода z_i управлять и наблюдать вектором состояния системы соответственно.

Пусть $\mathbf{W}_{oi}$ и $\mathbf{W}_{cj}$ - грамианы управляемости и наблюдаемости для SISO-системы $\left[\mathbf{A}, \mathbf{b}_i; \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}\right]$. Тогда грамианы управляемости и наблюдаемости $\mathbf{W}_o, \mathbf{W}_c$ всей MIMO-системы:

$$\mathbf{W}_o = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{W}_{oi}, \quad \mathbf{W}_c = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{W}_{cj}.$$

Произведение $\mathbf{W}_o\mathbf{W}_c$ MIMO-системы можно представить в виде:

$$\mathbf{W}_o\mathbf{W}_c = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{W}_{oi}\mathbf{W}_{cj},$$

то есть как сумму произведений $\mathbf{W}_{oi}\mathbf{W}_{cj}$ для SISO-систем, входящих в состав MIMO-системы управления. Так как HSV матриц $\mathbf{W}_{oi}\mathbf{W}_{cj}$ не зависят от SS-реализации, то они могут выступать в качестве базиса меры взаимодействия SISO-систем с входным управляющим сигналом u_j и выходным сигналом z_i.

После определения HSV пары $(\mathbf{W}_{oi}, \mathbf{W}_{cj})$ найдем симметрические функции от собственных значений:

$$\varsigma_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n, \quad \varsigma_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \ldots + \sigma_{n-1}\sigma_n, \quad \ldots, \quad \varsigma_n = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n.$$

Для каждого ς_k, $1 \leq k \leq n$; определим такие максимальное $\varsigma_k^{\max}$ и минимальное $\varsigma_k^{\min}$ значения, что при:

- $\varsigma_k \leq \varsigma_k^{\min}$ - будем считать процессы невзаимодействующими и подсистемы могут исследоваться без учета влияния других подсистем (декомпозиция MIMO-системы на основе количественной оценки);

- $\varsigma_k \geq \varsigma_k^{\max}$ - будем считать процессы взаимодействующими (формирование искусственного взаимодействия систем на основе количественной оценки MIMO-системы).

3. Пример оценивания взаимодействия каналов системы управления

Рассмотрим твердое тело (ТТ), центр масс O_1 которого движется по круговой орбите под действием гравитационных сил, создаваемых притягивающим центром O [6]. Пусть $O_1X_oY_oZ_o$ - правая прямоугольная орбитальная система: ось O_1Z_o направлена по радиусу-вектору OO_1 ТТ; ось O_1X_o расположена в плоскости орбиты и направлена в сторону движения ТТ. Система координат $O_1X_oY_oZ_o$ вращается вокруг притягивающего центра O с угловой скоростью ω_o, вектор которой направлен параллельно оси O_1Y_o. Введем далее правую связанную систему координат O_1XYZ, оси которой направим по главным центральным осям инерции ТТ. Пусть выполнены малые повороты относительно осей x, y, z на углы крена γ , тангажа ϑ и рыскания ψ соответственно. Линеаризованные уравнения движения ТТ по круговой орбите с учетом влияния гравитационного поля планеты [6] и формирования обратной связи по производным углов γ, ϑ, ψ:

$$\begin{aligned}
&J_x\frac{d\gamma_1}{dt} + \omega_o(J_x + J_z - J_y)\psi_1 + 4\omega_o^2(J_y - J_z)\gamma + k_\gamma\gamma_1 = M_x;\\
&J_y\frac{d\vartheta_1}{dt} + 3\omega_o^2(J_x - J_z)\vartheta + k_\vartheta\vartheta_1 = M_y;\\
&J_z\frac{d\psi_1}{dt} + \omega_o(J_y - J_x - J_z)\gamma_1 + \omega_o^2(J_y - J_x)\psi + k_\psi\psi_1 = M_z;\\
&\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1;\\
&\frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta_1;\\
&\frac{d\psi}{dt} = \psi_1
\end{aligned} \tag{7}$$

или в соответствии с [1]:

$$\mathbf{x} = \left[\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \gamma, \vartheta, \psi\right]^{\mathrm{T}}; \quad \mathbf{u} = \left[\frac{M_x}{J_x}, \frac{M_y}{J_y}, \frac{M_z}{J_z}\right]^{\mathrm{T}}; \quad \mathbf{z} = [\gamma, \vartheta, \psi]^{\mathrm{T}};$$

ненулевые компоненты матрицы $\mathbf{A}$:

$$a_{11} = \frac{-k_\gamma}{J_x}; \quad a_{13} = \omega_o\frac{J_y - J_x - J_z}{J_x}; \quad a_{14} = 4\omega_o^2\,\frac{J_z - J_y}{J_x};$$

$$a_{22} = \frac{-k_\vartheta}{J_y}; \quad a_{25} = 3\omega_o^2 \frac{J_z - J_x}{J_y};$$

$$a_{31} = \omega_o \frac{J_x + J_z - J_y}{J_x}; \quad a_{33} = \frac{-k_\psi}{J_z}; \quad a_{36} = \omega_o^2 \frac{J_x - J_y}{J_z}; \quad a_{41} = a_{52} = a_{63} = 1;$$

$$\mathbf{b}_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}; \quad \mathbf{b}_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}; \quad \mathbf{b}_3 = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{c}_1 = [0, 0, 0, 1, 0, 0]; \quad \mathbf{c}_2 = [0, 0, 0, 0, 1, 0]; \quad \mathbf{c}_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 1],$$

где J_x, J_y, J_z- компоненты тензора инерции ТТ относительно его главных центральных осей; M_x, M_y, M_z - компоненты момента внешних сил; все компоненты матрицы $\mathbf{D}$ равны нулю.

При значениях: $\omega_o = 0,0012$ с$^{-1}$, $J_y = 100$ кг·м^2, $J_x = 80$ кг·м^2, $J_z = 60$кг · м^2, $k_\gamma = 0,001$ Н·м·с, $k_\vartheta = 0,001$ Н·м·с, $k_\psi = 0,001$ Н·м·с найдем суммы HSV:

$$\varsigma_1^{u_1 \to z_1} = 35000000; \quad \varsigma_1^{u_1 \to z_2} = 4,7 \cdot 10^{-10}; \quad \varsigma_1^{u_1 \to z_3} = 18000000;$$

$$\varsigma_1^{u_2 \to z_1} = 1,7 \cdot 10^{-7}; \quad \varsigma_1^{u_2 \to z_2} = 78000000; \quad \varsigma_1^{u_2 \to z_3} = 4,9 \cdot 10^{-7};$$

$$\varsigma_1^{u_3 \to z_1} = 9000000; \quad \varsigma_1^{u_3 \to z_2} = 4,9 \cdot 10^{-9}; \quad \varsigma_1^{u_3 \to z_3} = 52000000.$$

Относительные значения влияния управляющих сигналов на выходные при $\varsigma_1^{\min} = 1$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

	Крен γ	Тангаж ϑ	Рыскание ψ	Сумма по строке
Влияние u_1 на	0,66	0	0,34	1
Влияние u_2 на	0	1	0	1
Влияние u_2 на	0,15	0	0,85	1

Из таблицы следует, что существует возможность декомпозиции системы управления на подсистему крена-рыскания и подсистему тангажа.

Заключение

Предложенный метод оценивания взаимного влияния каналов в системах управления может быть использован при проектировании подсистем диагностики отказов. В дальнейших работах авторы предполагают распространить метод на гладкие нелинейные системы управления.

Литература

1. Bristol E.H. On a new measure of interaction for multivariable process control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. N.11. P.133-134.

2. Campo P.J., Morari M. Achievable closed-loop properties of systems under decentralized control: Conditions involving the steady-state gain // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. N.39. P.932-943.
3. Chiu M, Arkun Y. A new result on relative gain array, Niederlinski index and decentralized stability condition: 2×2 plant case // Automatica. 1991. N.27(2). P.419-421.
4. Grosdidier P., Morari M. Interaction measures for systems under decentralized control // Automatica. 1986. N.22. P.309-319.
5. Niederlinski A. A heuristic approach to the design of linear multivariable control systems // Automatica. 1971. N.7. P.691-701.
6. Боевкин В.И., Гуревич Ю.Г., Павлов Ю.Н. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. М.: Наука, 1976. 304 с.
7. Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.