*Математические структуры и моделирование*
2006, вып. 16, с. 37–44

УДК 519.95

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАМИАНА НАБЛЮДАЕМОСТИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ОТКАЗОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

**Д.Н. Василенко, Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов**

В работе рассматривается возможность многократного оценивания элементов вектора состояния сложной системы управления на основе построения пересечений множеств оценок вектора состояния. Также рассматривается способ количественной оценки процесса наблюдения возмущения вектора состояния системы по информации вектора изменения при помощи грамиана наблюдаемости.

Использование мажоритарной логики для идентификации отказов требует применения нескольких приборов, измеряющих один параметр (или нескольких каналов в приборе, измеряющих один параметр). Если учитывать аналитическую избыточность системы управления (с учетом уравнений динамики объекта), то можно измерять различные параметры и затем оценивать другие параметры по информации измерительных приборов с помощью, например, наблюдателей Люенбергера. Однако определение одного и того же параметра по информации различных измерителей приводит к разным оценкам из-за разницы моделей оценивания, шумовых характеристик и др. Поэтому следует сравнить оценки параметра, полученные по информации различных измерителей.

## 1. Декомпозиция системы с множеством входов и выходов (MIMO - Multi Input/Multi Output)

Пусть имеется гладкая нелинейная система с множеством входов и выходов [1, 2]:

$$\begin{gathered} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} g_j(\boldsymbol{x}) u_j; \\ y_i = h_i(\boldsymbol{x}); \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{x} \in R^n; \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in R^n; \quad g_j(\boldsymbol{x}) \in R^n; \quad \forall\ j = 1, ..., m;$$


Омский филиал Института математики СО РАН.
E-mail: `negue@avte.omsk.info`

$$y_i \in R; \quad h_i(\boldsymbol{x}) \in R; \quad \forall\ i = 1, ..., p\,;$$
$$\boldsymbol{y} \in R^p\,; \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in R^p.$$

Сформулируем для системы (1) матрицу декомпозиции

$$A_{decom} = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{k_1-1}h_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{g_j}L_f^{k_1-1}h_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{g_m}L_f^{k_1-1}h_1(\boldsymbol{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1}L_f^{k_i-1}h_i(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{g_j}L_f^{k_i-1}h_i(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{g_m}L_f^{k_i-1}h_i(\boldsymbol{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1}L_f^{k_p-1}h_p(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{g_j}L_f^{k_p-1}h_p(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{g_m}L_f^{k_p-1}h_p(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix},$$

где вектор относительных степеней $\boldsymbol{k} = \{k_1, ..., k_p\}$ определяется из выполнения соотношений:

$$L_{g_j}L_f^{\alpha}h_i(\boldsymbol{x}) = 0; \quad 0 \le \alpha \le k_i - 2;$$
$$L_{g_j}L_f^{k_i-1}h_i(\boldsymbol{x}) \ne 0.$$

Здесь $L_f$, $L_{g_j}$ — производные Ли.

Для линейной системы:

$$\begin{gathered} \tfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j; \\ y_i = c_i\boldsymbol{x}; \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{x} \in R^n; \quad \boldsymbol{F} \in R^{n\times n}; \quad b_j \in R^{n\times 1}; \quad \forall\ j = 1, ..., m;$$
$$y_i \in R; \quad \boldsymbol{y} \in R^p; \quad c_i \in R^{1\times n}; \quad \forall i = 1, ..., p;$$
$$\boldsymbol{C} \in R^{n\times p};$$

матрица декомпозиции будет иметь форму:

$$\boldsymbol{A}_{decom} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1F^{k_1-1}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_1F^{k_1-1}\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{c}_1F^{k_1-1}\boldsymbol{b}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{c}_iF^{k_i-1}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_iF^{k_i-1}\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{c}_iF^{k_i-1}\boldsymbol{b}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{c}_pF^{k_p-1}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_pF^{k_p-1}\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{c}_pF^{k_p-1}\boldsymbol{b}_m \end{bmatrix},$$

где вектор относительных степеней $\boldsymbol{k} = \{k_1, ..., k_p\}$ определяется из выполнения соотношений:

$$\dim(span\{\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_iF, \boldsymbol{c}_iF^2, ..., \boldsymbol{c}_iF^n\}) = k_i; \quad \forall\ i = 1, ..., p.$$

Для оценивания вектора состояния линейной системы (2) можно построить наблюдатель [3]

$$\frac{d\xi}{dt} = \boldsymbol{F}\xi + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}\xi - \boldsymbol{y}); \quad \xi \in R^n; \quad \boldsymbol{L} \in R^{n\times m};$$

для оценивания вектора состояния нелинейной системы (1) наблюдатель может быть построен в форме [4]:

$$\frac{d\xi}{dt} = \boldsymbol{f}(\xi) + \sum_{j=1}^{m} g_j(\xi)u_j + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{h}(\xi) - \boldsymbol{y}); \qquad \xi \in R^n,$$

где $\boldsymbol{L}(\cdot) \in R^p$ в данном случае является гладкой нелинейной функцией.

Наряду с матрицей декомпозиции $\boldsymbol{A}_{decom}$ сформируем матрицу множеств компонент вектора состояния $\boldsymbol{A}_S$:

$$A_s = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1j} & \cdots & S_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{i1} & \cdots & S_{ij} & \cdots & S_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pj} & \cdots & S_{pm} \end{bmatrix},$$

в которой любой элемент $S_{ij}$ $(i = 1, ..., p;\ j = 1, ..., m)$ представляет собой подмножество компонент вектора состояния со свойством управляемости по входу $u_j$ и свойством наблюдаемости по выходу $y_i$. Тогда

$$S_{*j} = \cup_{j=1}^{m} S_{ij}$$

— подмножество компонент вектора состояния, управляемых по входу $j$, а

$$S_{i*} = \cup_{j=1}^{m} S_{ij}$$

— подмножество компонент вектора состояния, наблюдаемых по выходу $i$.

Один и тот же элемент может быть наблюдаем по нескольким соотношениям $y_i = c_i x$, т.е. находиться в нескольких множествах S. Отсюда следует, что пересечения таких множеств (содержащих одинаковые компоненты вектора $\boldsymbol{x}$) могут быть непустыми. В общем случае для системы с $m$ соотношениями $y_i = c_i\boldsymbol{x}$ может быть максимальное количество пересечений:

$$Z = \sum_{i=2}^{m} C_m^i.$$

## 2. Построение грамиана наблюдаемости для гладкой нелинейной системы

Рассмотрим систему (1) с $g_j \equiv 0, \forall\, j:$

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(x); \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(x); \quad \boldsymbol{x} \in R^n;$$

$$\boldsymbol{f}(\cdot) \in R^n; \quad \boldsymbol{y} \in R^m; \quad \boldsymbol{h}(\cdot) \in R^m,$$

с заданной базовой траекторией, описываемой соотношениями:

$$\frac{dx_b}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_b); \quad \boldsymbol{y}_b = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_b); \quad \boldsymbol{x}_b \in R^n; \quad \boldsymbol{y}_b \in R^m.$$

Тогда возмущения

$$\delta \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_b) \in R^n$$

и

$$\delta \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y} - \ \boldsymbol{y}_b) \in R^m$$

могут быть определены из соотношений:

$$\frac{d(\delta \boldsymbol{x})}{dt} = \boldsymbol{A}\delta \boldsymbol{x},$$
$$\delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\delta \boldsymbol{x},$$

где

$$\boldsymbol{A} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right\| \in R^{n\times n}, \qquad \boldsymbol{C} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{h}_p}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right\| \in R^{m\times n},$$

$$k = 1,\ \ldots,\ n, \quad l = 1,\ \ldots,\ n, \quad p = 1,\ \ldots,\ m.$$

Соотношение для распространения возмущения $\delta \boldsymbol{x}_0 = \delta \boldsymbol{x}(0)$ при $|\,\delta \boldsymbol{x}(0)| \to 0$ имеет вид:

$$\delta \boldsymbol{x}(t) = \ exp(\boldsymbol{A}t)\,\delta \boldsymbol{x}(0),$$
$$\delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}[exp(\boldsymbol{A}t)\,\delta \boldsymbol{x}(0)].$$

По фундаментальной матрице $\boldsymbol{F}(t) = exp(\boldsymbol{A}t)$ построим грамиан наблюдаемости:

$$\boldsymbol{G}_o(t) = \int\limits_0^t \boldsymbol{F}(\tau)^T \boldsymbol{F}(\tau) \boldsymbol{C}(\tau)^T \boldsymbol{C}(\tau) \boldsymbol{F}(\tau) d\tau,$$

то есть матрицу с неотрицательными собственными значениями размерности $(n \times n)$, которая может служить количественной оценкой процесса наблюдения возмущения вектора состояния $\delta \boldsymbol{x}(t)$ по информации вектора измерения $\delta \boldsymbol{y}(t)$. Если $\det(\boldsymbol{G}_o) = 0$, то по информации вектора измерения $\delta \boldsymbol{y}(t)$ невозможно определить весь вектор возмущения вектора состояния $\delta \boldsymbol{x}(t)$; в этом случае необходимо выбрать подпространство вектора $\delta \boldsymbol{x}(t)$ и редуцированный вектор $\delta \boldsymbol{x}^r(t) \in R^r$, $r < n$, такой, что грамиан, построенный в редуцированном подпространстве будет неособой матрицей.

Рассмотрим случай покомпонентного оценивания вектора состояния:

$$y_p = h_p(x); \quad y_p \in R; \quad h_p \in R;$$
$$y_p^b = h_p^b(x_b); \quad y_p^b \in R; \quad h_p^b \in R;$$
$$\delta y_p = \boldsymbol{C}_p \times \delta x; \quad \delta y_p \in R;$$
$$\boldsymbol{C}_p = \left\| \frac{\partial h_p^b}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right\| \in R^{1\times n}; \quad p = 1,\ \ldots,\ m.$$

Далее построим грамианы

$$\boldsymbol{G}_p : \ \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{G}_p(t) = \int\limits_0^t \boldsymbol{F}(\tau)^T \boldsymbol{F}(\tau) \boldsymbol{C}_p(\tau)^T \boldsymbol{C}_p(\tau) \boldsymbol{F}(\tau) d\tau$$

на максимальных подпространствах вектора $\delta\boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющих условию $\det(\boldsymbol{G}_p) \neq 0$. Тогда для каждого такого $p$, что $\det(\boldsymbol{G}_p) \neq 0$, существует набор индексов $S_p$ компонент редуцированного вектора $\delta\boldsymbol{x}^r(t)$, наблюдаемого по информации только канала $y_p$ измерителя; например, если

$$S_3 = (\delta x_1, \delta x_3, \delta x_5)^T,$$

то по информации канала $y_3$ измерителя могут быть оценены компоненты $\delta x_1$, $\delta x_3$, $\delta x_5$ вектора состояния.

Для количественной оценки уровня наблюдаемости компонент вектора состояния по информации $p$-го канала измерителя могут быть определены спектры собственных значений $o$-грамиана $G_p$, а для симметричной оценки уровня наблюдаемости можно определить симметрические функции от собственных значений грамианов $G_p$ после получения характеристического полинома:

$$\det(tI - \boldsymbol{G}_p) = t^{nj} - \sigma_1(\boldsymbol{G}_p)t^{nj-1} + \ \ldots \ + (-1)^{nj}\sigma_{nj}(\boldsymbol{G}_p).$$

Следует отметить факт монотонного возрастания собственных значений $\lambda$ грамиана $\boldsymbol{G}_p$ при изменении времени $t$. Построим симметрические функции $\sigma_i$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \mathrm{g}\lambda_n,\\
\sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n,\\
\sigma_3 &= \lambda_1\lambda_2\ldots\mathrm{g}\lambda_n
\end{aligned}$$

и усредненные оценки:

$$\begin{aligned}
&‘\lambda_1 = \sigma_1 n^{-1},\\
&‘\lambda_2 = (\sigma_2 2n^{-1}(n-1)^{-1})^{1/2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&‘\lambda_i = (\sigma_2(n!)^{-1}(n-i)!i!)^{1/i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&‘\lambda_n = (\sigma_n)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Предположим, что первые $j$ $(n > j)$ усредненных собственных чисел грамиана $\boldsymbol{G}_p$ больше нуля, а остальные равны нулю:

$$\begin{aligned}
&‘\lambda_k \neq 0, \quad \text{если} \quad j \geq k \geq 0,\\
&‘\lambda_k = 0, \quad \text{если} \quad n \geq k \geq n - j + 1.
\end{aligned}$$

Тогда по информации $p$-го канала измерителя можно оценить $j$ компонент вектора состояния системы.

Для диагностики отказов необходимо определить, на сколько усредненные собственные числа грамиана $\boldsymbol{G}_p$ превышают значение нуля.

***Пример* 1.** Пусть имеется линейная система, представленная в нормальной форме:

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1, \qquad y_1 = x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1, \qquad y_2 = x_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_2, \qquad y_3 = x_3,$$
$$\frac{dx_4}{dt} = x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{1*} &= (x_1, x_2, x_3, x_4), \\ S_{2*} &= (x_2, x_3, x_4), \\ S_{3*} &= (x_3, x_4), \\ S_{4*} &= (x_4). \end{aligned}$$

Непустые пересечения множеств $S_{i*}$:

$$S_{4*} \cap S_{3*} = S_{4*} \cap S_{2*} = S_{4*} \cap S_{1*} = (x_4),$$

$$S_{3*} \cap S_{2*} = S_{3*} \cap S_{1*} = (x_3, x_4),$$

$$S_{2*} \cap S_{1*} = (x_4, x_3, x_2),$$

$$S_{4*} \cap S_{3*} \cap S_{2*} = S_{4*} \cap S_{3*} \cap S_{1*} = S_{4*} \cap S_{2*} \cap S_{1*} = (x_4),$$

$$S_{3*} \cap S_{2*} \cap S_{1*} = (x_4, x_3),$$

$$S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} = (x_4).$$

Таким образом, компонент вектора состояния $x_4$ может быть оценен по выходной информации $y_4$, $y_3$, $y_2$, $y_1$; $x_3$ — по информации $y_3$, $y_2$, $y_1$; $x_2$ — по информации $y_2$, $y_1$; $x_1$ — по информации $y_1$.

***Пример* 2.** Пусть имеется линейная система, представленная в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 + u_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 + u_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_3 + u_4, \\ y_4 &= x_4. \end{aligned}$$

Тогда

$$S_{*1} = (x_1),$$
$$S_{*2} = (x_1, x_2),$$
$$S_{*3} = (x_1, x_2, x_3),$$
$$S_{*4} = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Непустые пересечения множеств $S_{*j}$:

$$S_{1*} \cap S_{2*} = S_{1*} \cap S_{3*} = S_{1*} \cap S_{4*} = (x_1),$$
$$S_{2*} \cap S_{3*} = S_{2*} \cap S_{4*} = (x_1, x_2),$$
$$S_{3*} \cap S_{4*} = (x_1, x_2, x_3),$$
$$S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{3*} = S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{4*} = S_{1*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} = (x_1),$$
$$S_{2*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} = (x_1, x_2),$$
$$S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} = (x_1).$$

Таким образом, компонент вектора состояния $x_1$ управляем по входным сигналам $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$; $x_2$ — по $u_2$, $u_3$, $u_4$; $x_3$ — по $u_3$, $u_4$; $x_4$ — по $u_4$.

***Пример* 3.** Линейный гармонический осциллятор.

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{dx_1}{dt} & = & \varpi_1 x_2, \\
\dfrac{dx_2}{dt} & = & \varpi_2 x_1, \\
\varpi & = & (-\varpi_1\varpi_2)^{0,5}, \quad \varpi_1\varpi_2 < 0, \\
y_1 & = & x_1, \\
y_2 & = & x_2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1(0) & = & x_{10}, \\
x_2(0) & = & x_{20}, \\
x_1(t) & = & x_{10}\cos(\omega t) + \omega_1\omega^{-1}x_{20}\sin(\omega t), \\
x_2(t) & = & x_{20}\cos(\omega t) + \omega_2\omega^{-1}x_{10}\sin(\omega t).
\end{array}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} \cos(\varpi t) & \varpi_2\varpi^{-1}\sin(\varpi t) \\ \varpi_2\varpi^{-1}\sin(\varpi t) & \cos(\varpi t) \end{bmatrix}.$$

$$C_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\int\limits_0^t \boldsymbol{F}^T(\tau)\boldsymbol{C}_1^T(\tau)\boldsymbol{C}_1(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5t + 0,25\varpi^{-1}\sin(2\varpi t) & 0,5\varpi_1\varpi^{-2}\sin^2(\varpi t) \\ 0,5\varpi_1\varpi^{-2}\sin^2(\varpi t) & -0,5t + 0,25\varpi^{-1}\sin(2\varpi t) \end{bmatrix}.$$

## Заключение

Предложенный в работе метод формирования матрицы пересечений множеств компонент наблюдаемого вектора состояния системы управления может использован для диагностики отказов в системе управления. Методы построения грамианов наблюдения для каждого компонента измерителя в непрерывных системах управления динамическим объектом могут быть распространены на дискретные системы управления динамическим объектом.

## Литература

1. Battilotti S. Noninteracting control with stability for nonlinear systems. Springer-Verlag, 1994. 180 p.
2. Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach / Isidori A., A.Krener, G.Giorgi, S.Monaco // IEEE Transactions on Automatic control. 1981. N.26. P.331-345.
3. Luenberger D.G. Introduction to observers // IEEE Transactions on Automatic control. 1971. N.16. P.596-602.
4. Tsinias J. Observer design for in nonlinear systems // Systems & Control Letters. 1989. N.13. P.135-142.