Математические структуры и моделирование
2007, вып. 17, с. 13–18

УДК 519.214.5

О МИНИМАЛЬНОМ УСЛОВИИ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь

In this article is obtained a minimal in a certain sense conditions of weakly dependence, which make it possible to prove a central limit theorem for sums of dependent random variables.

Пусть $\{\xi_n\}$– последовательность случайных величин. Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см.,например, [1, § 28.1]). Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины, такие, что $\hat{\xi}_k \overset{d}{=} \xi_k, k = 1, 2, ..., n$. Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [1, с. 393]. Введем еще некоторые обозначения. Пусть $S_{m,n} = \sum\limits_{j=m}^{n} \xi_j$, $S^{+k}_{m,n} = \sum\limits_{j=m}^{n} \xi_{j+k}$, $S_n = S_{1,n}$, $S^{+k}_n = S^{+k}_{1,n}$, а если $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, ...$, то обозначим $\sigma^2_{k,n} = \mathbf{D}S_{k,n}$, $(\sigma^{+k}_{m,n})^2 = \mathbf{D}S^{+k}_{m,n}$, $\sigma^2_n = \mathbf{D}S_n$, $(\sigma^{+k}_n)^2 = \mathbf{D}S^{+k}_n$. Через $\mathcal{N}(0, 1)$ обозначим случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение.

Если

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема, а если при любой последовательности натуральных чисел $k = k(n)$

$$\frac{S^{+k}_n - \mathbf{E}S^{+k}_n}{\sigma^{+k}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \to \infty,$$

то к последовательности $\{\xi_n\}$ применима однородная центральная предельная теорема.

Предельные теоремы для сумм зависимых случайных величин, как правило, доказываются с определенными заранее условиями слабой зависимости (регулярности), такими, как условия сильного перемешивания, равномерно сильного

Омский государственный университет.
E-mail: `grin@math.omsu.omskreg.ru`

перемешивания, полной регулярности (ρ-перемешивания) и т. п. (см., например, [2]). В связи с этим возникает вопрос – насколько выполнение той или иной теоремы обусловлено данным условием регулярности, возможно ли (и в каких границах) ослабление этого условия?

В работе [3] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ *– стационарная последовательность и пусть* $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $n = 1, 2, ...$ *Для того чтобы к последовательности* $\{\xi_n\}$ *была применима центральная предельная теорема и* σ_n^2 *являлась правильно меняющейся последовательностью порядка 1, необходимо и достаточно, чтобы при любой последовательности натуральных чисел* $m = m(n)$ *и при любом действительном* t *выполнялось условие*

$$\frac{S_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\hat{S}_n}{\sigma_{n+m}} + \frac{\hat{S}_m}{\sigma_{n+m}}, \quad n \to \infty \tag{R}$$

и последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ *была равномерно интегрируема.*

Эту теорему можно интерпретировать так: условие (R) является *минимальным* условием слабой зависимости, при котором справедлива центральная предельная теорема для стационарных последовательностей с правильно меняющейся порядка 1 дисперсией.

В настоящей работе этот результат обобщается на произвольные последовательности случайных величин с конечными вторыми моментами.

Так же, как в предельных теоремах для независимых случайных величин, мы ограничимся только последовательностями, удовлетворяющими условию равномерной предельной малости: при любом $\varepsilon > 0$ и при любой последовательности натуральных чисел $k = k(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k \le l \le n+k} \mathbf{P}\{|\xi_l| > \varepsilon \sigma_n^{+k}\} = 0. \tag{UN}$$

Следующее условие является обобщением условия (R) на нестационарные последовательности: при любом действительном t и при любых последовательностях натуральных чисел $m = m(n)$ и $k = k(n)$

$$\frac{S_{n+m}^{+k}}{\sigma_{n+m}^{+k}} \overset{d}{\sim} \frac{\hat{S}_n^{+k}}{\sigma_{n+m}^{+k}} + \frac{\hat{S}_m^{+(k+n)}}{\sigma_{n+m}^{+k}}, \quad n \to \infty. \tag{RL}$$

В соответствии с определением слабой эквивалентности условие (RL) можно записать так:

$$\Delta(n) = \left| \mathbf{E}\exp\left\{ it\frac{S_{n+m}^{+k}}{\sigma_{n+m}^{+k}} \right\} - \mathbf{E}\exp\left\{ it\frac{S_n^{+k}}{\sigma_{n+m}^{+k}} \right\} \mathbf{E}\exp\left\{ it\frac{S_m^{+(k+n)}}{\sigma_{n+m}^{+k}} \right\} \right| \to 0,$$

при $n \to \infty$ и любом $t \in \mathbb{R}$. Введем еще аналог правильного изменения дисперсии сумм (см. [3, лемма 1]): при любых последовательностях натуральных чисел $m = m(n)$ и $k = k(n)$

$$(\sigma_{n+m}^{+k})^2 \sim (\sigma_n^{+k})^2 + (\sigma_m^{+(k+n)})^2, \quad n \to \infty. \tag{RD}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_n, n=1,2,...\}$ *– последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию* (UN)*, и пусть* $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $n = 1,2,...$ *Для того чтобы к последовательности* $\{\xi_n\}$ *была применима однородная центральная предельная теорема и* σ_n *удовлетворяла условию* (RD)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (RL) *и при любой последовательности натуральных чисел* $k = k(n)$ *последовательность* $\left\{\left(\dfrac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}}\right)^2\right\}$ *была равномерно интегрируема.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть к последовательности $\{\xi_n\}$ применима однородная центральная предельная теорема, то есть при любом $t \in \mathbf{R}$ и любой последовательности натуральных чисел $k = k(n)$

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}}\right\} \to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \to \infty \tag{1}$$

и σ_n удовлетворет условию (RD). Тогда

$$\left(\frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}}\right)^2 \xrightarrow{d} \mathcal{N}^2(0,1), \quad \left(\frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}}\right)^2 \ge 0, \quad \mathbf{E}\left(\frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}}\right)^2 = \mathbf{E}\mathcal{N}^2(0,1) = 1,$$

откуда следует равномерная интегрируемость последовательности $\left\{\left(\dfrac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}}\right)^2, n=1,2,...\right\}$ (см., например, [4, теорема 5.4]).

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$, $k = k(n)$. Так как σ_n^2 удовлетворет условию (RD), то для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \le c \le 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$, такая, что

$$\left(\frac{\sigma_{n_2}^{+k_2}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}\right)^2 \to c, \quad \left(\frac{\sigma_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}\right)^2 \to 1-c, \quad n \to \infty,$$

где $k_2 = k(n_2)$, $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ $(c = 1)$, то при $n \to \infty$

$$\left(\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}\right)^{-1} S_{n_2}^{+k_2} \to 0 \quad \left(\left(\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}\right)^{-1} S_{m_2}^{+(k_2+n_2)} \to 0\right)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \to 0$, $n \to \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (1)

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{S_{n_2+m_2}^{+k_2}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}\right\} \sim \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\} \sim$$

$$\sim \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{S_{n_2}^{+k_2}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}\right\}\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{S_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}\right\}$$

$n \to \infty$, то есть снова $\Delta(n_2) \to 0$, $n \to \infty$.

Мы доказали, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \to 0$, $n \to \infty$, то есть выполнено условие (RL).

Достаточность. Пусть выполнено условие (RL) и при любой последовательности натуральных чисел $k = k(n)$ последовательность $\left\{ \left(\frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}} \right)^2 \right\}$ равномерно интегрируема. В силу известной теоремы Прохорова (см.,например, [4]) последовательность $\left\{ \frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}} \right\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}, n_1 = n_1(n)$, такую, что

$$\frac{S_{n_1}^{+k_1}}{\sigma_{n_1}^{+k_1}} \xrightarrow{d} \xi, \quad \frac{S_{m_1}^{+(k_1+n_1)}}{\sigma_{m_1}^{+(k_1+n_1)}} \xrightarrow{d} \eta, \quad \frac{S_{n_1+m_1}^{+k_1}}{\sigma_{n_1+m_1}^{+k_1}} \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

где $k_1 = k(n_1),\ m_1 = m(n_1)$, а ξ, η и $\zeta-$ случайные величины. При этом поскольку последовательность $\left\{ \left(\frac{S_n^{+k}}{\sigma_n^{+k}} \right)^2 \right\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E}\xi^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left(\frac{S_{n_1}^{+k_1}}{\sigma_{n_1}^{+k_1}} \right)^2, \ \mathbf{E}\eta^2 = 1, \ \mathbf{E}\zeta^2 = 1 \tag{3}$$

[4, теорема 5.4]. Далее, из ограниченных последовательностей

$$\alpha_{n_1} = \frac{\sigma_{n_1}^{+k_1}}{\sqrt{\left(\sigma_{n_1}^{+k_1}\right)^2 + \left(\sigma_{m_1}^{+(k_1+n_1)}\right)^2}}, \quad \beta_{n_1} = \frac{\sigma_{m_1}^{+k_1}}{\sqrt{\left(\sigma_{n_1}^{+k_1}\right)^2 + \left(\sigma_{m_1}^{+(k_1+n_1)}\right)^2}}$$

выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_2}\}$ и $\{\beta_{n_2}\}$, такие, что

$$\alpha_{n_2} \to \alpha, \quad \beta_{n_2} \to \beta, \quad n \to \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{4}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{\widehat{S}_{n_2}^{+k_2} + \widehat{S}_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sqrt{\left(\sigma_{n_2}^{+k_2}\right)^2 + \left(\sigma_{m_2}^{+(k_2+n_2)}\right)^2}} = \alpha_{n_2} \frac{\widehat{S}_{n_2}^{+k_2}}{\sigma_{n_2}} + \beta_{n_2} \frac{\widehat{S}_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sigma_{m_2}^{+(k_2+n_2)}} \xrightarrow{d} \alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}. \tag{5}$$

Понятно, что $\alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (RL) и (2)

$$\frac{\widehat{S}_{n_2}^{+k_2} + \widehat{S}_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}} \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [1, с.216] из (5) и (6) вытекает

$$\frac{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}{\sqrt{\left(\sigma_{n_2}^{+k_2}\right)^2 + \left(\sigma_{m_2}^{+(k_2+n_2)}\right)^2}} \to C, \quad 0 < C < \infty.$$

Отсюда следует, что вместе с последовательностями $\left\{\left(\frac{S_{n_2}^{+k_2}}{\sigma_{n_2}^{+k_2}}\right)^2\right\}$ и $\left\{\left(\frac{\widehat{S}_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sigma_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}\right)^2\right\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\left\{\left(\frac{\widehat{S}_{n_2}^{+k_2}+\widehat{S}_{m_2}^{+(k_2+n_2)}}{\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}}\right)^2\right\}$ и из (6) получаем теперь

$$\delta_{n_2}=\frac{\left(\sigma_{n_2}^{+k_2}\right)^2+\left(\sigma_{m_2}^{+(k_2+n_2)}\right)^2}{\left(\sigma_{n_2+m_2}^{+k_2}\right)^2}\to \mathbf{E}\zeta^2=1,\quad n\to\infty.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдется подпоследовательность $\{n_2\}$, такая, что $\delta_{n_2}\to 1,\ n\to\infty$. Это означает, что $\delta_n\to 1,\ n\to\infty$, то есть выполнено (RD).

Пусть $\sigma_{k,n}$ удовлетворяет условию (RD) и выполнено условие (RL). Если $k\le l\le n+k$, то в силу условия (UN) $\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-1}\xi_l\to 0$ по вероятности, а из условия (RD) следует, что

$$\frac{\mathbf{E}\xi_l^2}{\left(\sigma_n^{+k}\right)^2}\sim\frac{\mathbf{E}\xi_l^2}{\left(\sigma_{l-1}^{+k}\right)^2+\mathbf{E}\xi_l^2+\left(\sigma_{l+1<n}^{+k}\right)^2}\ge 1,$$

так что последовательность $\left\{\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-2}\xi_l^2\right\}$ равномерно интегрируема, следовательно,

$$\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-2}\mathbf{E}\xi_l^2\to 0,\quad n\to\infty. \tag{7}$$

Пусть $j_0=k+1, j_r=\min\{l>j_{r-1}:\sigma_{j_{r-1},l}^2\ge m^{-1}\left(\sigma_n^{+k}\right)^2\},\ r=1,2,...,m$. Тогда если $m=m(n)\to\infty$ растет достаточно медленно, то в силу (7)

$$\sigma_{j_{r-1},j_r}^2\sim m^{-1}\left(\sigma_n^{+k}\right)^2,\ r=1,2,...,m. \tag{8}$$

Имеем

$$S_n^{+k}=\sum_{r=1}^m X_r,\quad X_r=\sum_{j=j_{r-1}+1}^{j_r}\xi_j,\quad r=1,...,m.$$

В силу условия (RL) если $m=m(n)$ растет достаточно медленно, то

$$\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-1}S_n^{+k}\overset{d}{\sim}\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-1}\sum_{r=1}^m\widehat{X}_r,\quad n\to\infty. \tag{9}$$

Так как

$$\sum_{r=1}^m\mathbf{D}\widehat{X}_r=\sum_{r=1}^m\sigma_{j_{r-1},j_r}^2\sim\sigma_n^{+k},$$

то для того, чтобы

$$\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-1}\sum_{r=1}^m\widehat{X}_r\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1) \tag{10}$$

(то есть чтобы к последовательности серий независимых случайных величин $\left\{\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-1}\widehat{X}_r, r=1,...,m,\ n=1,2,...\right\}$ была применима центральная предельная теорема), достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sigma_n^{+k}\right)^2}\sum_{r=1}^{m}\mathbf{E}\{\widehat{X}_r^2, |\widehat{X}_r| > \varepsilon\sigma_n^{+k}\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

По условию при каждом $r = 1,...,m$ последовательность величин $\left\{\left(\sigma_{j_{r-1},j_r}^2\right)^{-2}X_r^2\right\}$ равномерно интегрируема, так что в силу (8) при любом $1 \le r \le m$ и любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{1}{\sigma_{j_{r-1},j_r}^2}\mathbf{E}\left\{\widehat{X}_r^2, |\widehat{X}_r| > \varepsilon\sigma_n^{+k}\right\} \sim \frac{m}{\left(\sigma_n^{+k}\right)^2}\mathbf{E}\{\widehat{X}_r^2, |\widehat{X}_r| > \varepsilon\sigma_n^{+k}\} \to 0,$$

так что при достаточно медленно растущих $m = m(n)$

$$L_n(\varepsilon) \le \max_{1\le r\le m}\frac{m}{\left(\sigma_n^{+k}\right)^2}\mathbf{E}\{\widehat{X}_r^2, |\widehat{X}_r| > \varepsilon\sigma_n^{+k}\} \to 0,\ n \to \infty,$$

и из (9) и (10) следует теперь $\left(\sigma_n^{+k}\right)^{-1}S_n^{+k} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),\ n \to \infty$. Теорема доказана. ■

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962. 719 с.
2. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
3. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и ее примен. 2002. Т.47, N.3. С.554-558.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М: Наука, 1977. 351 с.