Математические структуры и моделирование
2007, вып. 17, с. 26–39

УДК 513.814

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ ПОЛНЫХ СТРОГО ПРИЧИННЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Е.А. Мещеряков

Классифицируются полные плоские строго причинные лоренцевы многообразия малых размерностей, не более 8.

Любое полное плоское лоренцево многообразие M может быть реализовано как фактор-пространство $\mathbb{M}_n/\Gamma$, где $\mathbb{M}_n$ – n-мерное пространство-время Минковского, а Γ – дискретная подгруппа группы Пуанкаре, действующая свободно и собственно разрывно на $\mathbb{M}_n$. Заметим, что $\Gamma \cong \pi_1(M)$. Лоренцева метрика определяет в каждом касательном пространстве пару замкнутых выпуклых круглых конусов. Выбор одного из них задает локальное поле конусов. Оно продолжается до глобального поля на M или на двулистной накрывающей M; условимся считать, что поле определено на M. Это равносильно тому, что линейные части отображений из Γ не переставляют конусов прошлого и будущего в $\mathbb{M}_n$. Если многообразие M не допускает замкнутых времениподобых кривых, то оно называется *причинным.* Для Γ это означает, что орбита любой точки не пересекает конуса с вершиной в этой точке из поля параллельных конусов на $\mathbb{M}_n$, заданного метрикой. Выбор начала координат $o \in \mathbb{M}_n$ позволяет отождествить $\mathbb{M}_n$ с вещественным векторным пространством V, в котором задана лоренцева форма ℓ сигнатуры $(+, - \dots, -)$; причинная структура задается конусом C (один из двух конусов, определяемых соотношением $\ell(v, v) \geq 0$). Будем называть M *строго причинным,* если M причинно, а прошлое и будущее любой точки $p \in M$ замкнуты в некоторой окрестности p (это не означает глобальной их замкнутости). В работе [8] такие многообразия были найдены с точностью до конечных накрытий.

В дальнейшем, если не оговорено противное, лоренцево многообразие M считается плоским, полным и строго причинным. В работе [8] было получено параметрическое описание таких многообразий (с точностью до конечных накрытий). В статье [7] каждому такому многообразию с унипотентной группой голономии сопоставлялась парабола в конусе P_m положительно определенных квадратичных форм на некотором евклидовом пространстве T (здесь $m = \dim T$); там же было показано, что многообразие может быть восстановлено

Омский филиал института математики СО РАН им. С.Л.Соболева.

по этой параболе, рассматриваемой с точностью до линейных автоморфизмов конуса и аффинных замен параметра.

В данной работе уточняется алгоритм восстановления многообразия по характеристичекой параболе для малых размерностей (не более 8). Любой квадратный трехчлен с матричными коэффициентами, задающий характеристическую параболу, будем называть *характеристическим многочленом* данного многообразия. В статье вводится каноническая запись характеристического многочлена (которая, в случае парабол общего положения, единственна), классифицированы многообразия указанного типа в размерностях до 8, а также найдены размерности пространств модулей таких многообразий.

1. Предварительные сведения

Обозначим через V вещественное векторное пространство, в котором задана лоренцева метрика ℓ сигнатуры $(+, -, \dots, -)$. Будем рассматривать пространство Минковского $\mathbb{M}_n$, где $n = \dim V$, как пару (V, ℓ). В работе [7] приведен способ построения многообразия M, состоящий из трех этапов:

(A) фиксируем изотропные векторы v_0, v_1, такие, что $\ell(v_0, v_1) = 1$, определяем подпространства L, W, N соотношениями

$$L = \mathbb{R}v_0, \quad W = L^\perp, \quad N = W \cap v_1^\perp$$

и выбираем подпространство $T \subseteq N$;

(B) для произвольного ℓ-симметрического линейного оператора $a' : T \to T$ и каждого его собственного подпространства Λ_j задаем невырожденный линейный оператор $a''_j : \Lambda_j \to R = T^\perp \cap N$, после чего полагаем

$$a'' = \sum_j a''_j, \quad a = a' + a'';$$

(C) выбираем линейный базис в T и определяем Γ как порожденную им подгруппу векторной группы T.

Вектор v называется изотропным, если $\ell(v, v) = 0$. Отображение a определяет аффинное действие T (и поэтому Γ) на $\mathbb{M}_n$:

$$\begin{gathered}
\gamma_x(v) = \lambda_x v + \tau_x, \quad x \in T; \\
\lambda_x v = v + \ell(v, v_0)ax - \big(\ell(v, ax) + \tfrac{1}{2}\,\ell(v, v_0)\,\ell(ax, ax)\big)\,v_0; \\
\tau_x = x - \tfrac{1}{2}\,\ell(ax, x)\,v_0.
\end{gathered}$$

Положим

$$n = \dim M, \quad m = \dim T, \quad r = \dim R, \quad k = \dim\ker a$$

и, следуя [7], будем называть набор $\sigma = (n, m, r, k)$ *сигнатурой* M. Очевидно, эти числа удовлетворяют неравенствам

$$m + r + 2 \le n, \quad r + k \le m. \tag{1}$$

Согласно [7, Предложение 1], группа T может быть определена инвариантным образом, а именно как алгебраическое замыкание Γ в группе Пуанкаре. Плоские полные строго причинные лоренцевы многообразия $M = \mathbb{M}/\Gamma$ и $\tilde{M} = \mathbb{M}/\tilde{\Gamma}$ будем называть *почти причинно изометричными*, если фактор-пространства $\mathbb{M}/T$ и $\mathbb{M}/\tilde{T}$, где T и $\tilde{T}$ — алгебраические замыкания Γ и $\tilde{\Gamma}$, соответственно, изометричны. Это равносильно тому, что их построение по алгоритму (A)–(C) различается только последним пунктом.

В работе будут использоваться утверждения из [7], которые сформулированы ниже в удобном для нас виде.

Теорема 1. (i) *Пусть M и $\tilde{M}$ — плоские полные строго причинные лоренцевы многообразия. Они причинно изометричны тогда и только тогда, когда их сигнатуры совпадают и*

$$Q_M(s) = X^\top Q_{\tilde{M}}(\alpha s + \beta) X \tag{2}$$

для некоторых $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Замена включения $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ на $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ дает критерий почти причинной изометричности M и $\tilde{M}$.

(ii) *Полином $Q(s) = A + 2sB + s^2C$, где A, B и C — m-матрицы, определяет характеристическую кривую для некоторого строго причинного многообразия M сигнатуры $(n, m, r, 0)$ тогда и только тогда, когда $n \ge m + r + 2$,*

$$Q(s) > 0 \text{ для любого } s \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$C - BA^{-1}B \ge 0, \tag{4}$$

$$r = \operatorname{rank}(C - BA^{-1}B). \tag{5}$$

(iii) *Любое многообразие сигнатуры (n, m, r, k) почти причинно изометрично произведению многообразия сигнатуры $(n - k, m - k, r, 0)$ и плоского k-тора. Равенство $k = 0$ равносильно невырожденности C.*

(iv) *Пусть полиномы $Q_M(s) = A + 2sB + s^2C$, $Q_{\tilde{M}}(s) = \tilde{A} + 2s\tilde{B} + s^2\tilde{C}$ являются характеристическими для почти причинно изометричных многообразий M и $\tilde{M}$. Допустим, что $C > 0$, $\tilde{C} > 0$. Тогда*

$$\operatorname{sp}\left(BC^{-1}\right) = \phi\big(\operatorname{sp}\left(\tilde{B}\tilde{C}^{-1}\right)\big) \tag{6}$$

для некоторого $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

Здесь через $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ обозначена группа аффинных преобразований прямой, сохраняющих её ориентацию.

***Замечание* 1.** Пусть многочлен $Q(s)$ задает характеристическую кривую некоторого строго причинного многообразия M. Тогда при любых $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ то же самое верно для многочлена $XQ(\alpha s + \beta)X^\top$. Для доказательства достаточно заметить, что эти преобразования сохраняют условия (3), (4) и (5); сигнатура тоже сохраняется.

Согласно (iii), с точностью до почти причинной изометрии можно считать, что многообразие имеет сигнатуру $(n, m, r, 0)$ и что $C > 0$ (тем самым исключается эллиптический случай). В дальнейшем это предполагается по умолчанию.

Будем обозначать через $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_p)$ диагональную p-матрицу с элементами $d_1, \ldots, d_p$ по диагонали; $\mathrm{sp}(A)$ обозначает спектр матрицы A; I – единичная матрица соответствующего размера.

Предложение 1. *Для любого плоского полного строго причинного лоренцева многообразия M существует матрица $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ и преобразование $\alpha \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ такие, что*

$$Q_M^{'} = XQ_M(\alpha(s))X^\top = A^{'} + 2sD + Is^2, \tag{7}$$

где $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1, d_2, \ldots, d_{m-k})$, k – количество нулей и $1 \le d_2 \le \cdots \le d_{m-k}$. Если спектр BC^{-1} содержит более одной точки, то преобразование α определяется этим условием однозначно.

Доказательство. Пусть $C^{1/2}$ — симметрический неотрицательно определенный квадратный корень из C. Поскольку матрица $C^{-1/2}BC^{-1/2}$ симметрическая, существует ортогональная матрица H, такая, что $D' = H^\top C^{-1/2}BC^{-1/2}H$ диагональна. Тогда

$$A + 2sB + Cs^2 = (C^{1/2}H)(A'' + 2sD' + s^2 I)(C^{1/2}H)^\top.$$

Согласно замечанию 1, многочлен $A'' + 2sD' + s^2 I$ соответсвует некоторому полному плоскому строго причинному многообразию $\tilde{M}$, которое почти причинно изометрично M в силу теоремы 1. Поэтому можно считать, что $Q_M = A'' + 2sD' + s^2 I$, где D' диагональна.

Заметим, что спектр D совпадает со спектром BC^{-1}, так как эти матрицы подобны согласно (7):

$$D = (XC^{-1/2})(BC^{-1})(XC^{-1/2})^{-1}.$$

Пусть $\mathrm{sp}(BC^{-1}) = \{s_1, \ldots, s_m\}$, причем $s_1 = s_2 = \cdots = s_k < s_{k+1} \le \cdots \le s_m$. Если $k < m$, то существует единственное аффинное преобразование прямой, переводящее $\mathrm{sp}(BC^{-1})$ в набор $\{0, \ldots, 0, 1, d_2, \ldots, d_{m-1-k}\}$ (именно, $\alpha(s) = \frac{s - s_1}{s_{k+1} - s_1}$). ■

Если спектр BC^{-1} состоит из одного собственного числа, то его можно перевести в ноль сдвигом: $\alpha(s) = s - s_1$.

***Замечание* 2.** Сопрягая характеристический многочлен ортогональной матрицей, сохраняющей структуру D, можно добиться того, чтобы диагональные блоки A', соответствующие одинаковым числам на диагонали D, стали диагональными.

Характеристический многочлен многообразия M будем называть *каноническим*, если он имеет вид:

$$Q_M(s) = A + 2sD + Is^2, \tag{8}$$

где $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1, d_2, \ldots, d_{m-k})$, k – количество нулей и $1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{m-k}$. Диагональные блоки матрицы A, отвечающие одинаковым диагональным элементам D, в соответствии с замечанием 2, будем считать диагональными матрицами. Кроме того, будем считать, что диагональные элементы в каждом диагональном блоке матрицы A не убывают и элементы $(k+1)$-ой строчки, кроме элементов на диагонали, неположительны. Например, при $m = 3$ и $D = \mathrm{diag}(d_1, d_1, d_2)$, где $d_1 \neq d_2$, A должна иметь вид $\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

***Замечание* 3.** В качестве канонического можно было бы принять вид $I + 2sD + Cs^2$. Выбор (8) в качестве канонического вида был обусловлен тем, что при $C = I$ один из инвариантов многообразия (а именно, $\mathrm{sp}(BC^{-1})$) присутствует в каноническом многочлене явным образом (как множество диагональных элементов матрицы D).

Пусть характеристический многочлен имеет вид $Q_M(s) = Cs^2 + 2Bs + A$. Будем говорить, что плоское полное строго причинное лоренцево многообразие имеет *простой спектр*, если спектр BC^{-1} прост (т. е. у матрицы BC^{-1} нет кратных собственных чисел). Предложение 1 и замечание 2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 2. *Полные плоские строго причинные многообразия с простым спектром почти причинно изометричны тогда и только тогда, когда совпадают их сигнатуры, а канонические характеристические многочлены сопряжены, как в (2), матрицей вида* $X = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$.

Доказательство. Если сигнатуры многообразий совпадают и многочлены сопряжены указанной матрицей X, то многобразия причинно изометричны согласно теореме 1, (i).

Так как мы условились не различать почти причинно изометричные многообразия, то задача сводится к доказательству единственности канонического характеристического многочлена с точностью до сопряжения матрицами X указанного в теореме вида. Пусть Q_1 и Q_2 – два канонических многочлена многообразия M. Тогда, согласно теореме 1, существует матрица X, такая, что $Q_2 = XQ_1X^\top$. Так как коэфициент при s^2 сохраняется, то X ортогональна. Следовательно, $Q_2 = XQ_1X^{-1}$. Поскольку $\mathrm{sp}(BC^{-1})$ является инвариантом многообразия согласно теореме 1, (iv), матрицы D_1 и D_2 (коэфициенты при s) имеют одинаковый спектр. Так как эти матрицы диагональны, то они отличаются лишь порядком следования диагональных элементов. Поскольку их диагональные элементы упорядочены, $D_1 = D_2$. Поэтому X коммутирует с D_1. Следовательно, X – блочно-диагональная матрица, причем нетривиальные блоки отвечают одинаковым собственным числам на диагонали. Так как собственные числа различны, то X диагональна. Из диагональности и ортогональности X и следует утверждение теоремы. ■

***Замечание* 4.** В условиях теоремы 2 можно добиться единственности канонического многочлена, если потребовать, чтобы элементы некоторой фиксированной строки (столбца) матрицы A, кроме элементов на диагонали, были отрицательными (или положительными). Если у A нет строк без нулей, то имеются разные канонические многочлены, отвечающие одному многообразию.

При не простом спектре многообразия канонический характеристический многочлен неединственен. Легко показать, что все многочлены одного многообразия сопряжены блочно-ортогональной матрицей X (блоки соответствуют одинаковым собственным числам D). Согласно определению канонического вида, диагональные блоки A, отвечающие одинаковым числам на диагонали D, можно считать диагональными матрицами. Условие упорядоченности элементов этих матриц (например, неубывание) определяет X с точностью до сопряжения матрицей вида $\operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$. Однако если какой-нибудь диагональный блок матрицы A имеет одинаковые элементы, то возникает дополнительная группа блочно-ортогональных матриц, сопряжение которыми не изменяет I, D и диагональные элементы A.

Запись канонического многочлена с точностью до $\operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ позволяет найти размерность пространства модулей многообразий: согласно теореме 2, она равна размерности пространства канонических многочленов. Далее предполагается, что характеристический многочлен записан в каноническом виде.

Лемма 1. *Пусть* $D = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 1, d_2, \ldots, d_{m-k})$ *(где k – количество нулей),* $A > 0$ *и выполнено любое из условий:*

(a) $I - DA^{-1}D > 0$;

(b) $I - DA^{-1}D \geq 0$ *и* $\det(Q(s)) > 0$ *для всех* $s \in \mathbb{R}$.

Тогда

(c) $Q(s) > 0$ *для любого* $s \in \mathbb{R}$.

Более того, условия (b) *и* (c) *равносильны.*

Доказательство. Так как $A > 0$, то из A извлекается единственный положительный квадратный корень $A^{1/2}$. Преобразуем многочлен $Q(s)$:

$$\begin{aligned} Q(s) = s^2 I + 2sD + A = A^{1/2}(s^2 A^{-1} + 2sA^{-1/2} D A^{-1/2} + I) A^{1/2} = \\ = s^2 (I - DA^{-1}D) + A^{1/2}(I + sA^{-1/2} D A^{-1/2})^2 A^{1/2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть верно (a). Если $s \neq 0$, то $Q(s) > 0$ согласно (9); при $s = 0$ утверждение леммы выполняется, так как $Q(0) = A > 0$.

Покажем, что (b) эквивалентно (c). Если $I - DA^{-1}D \geq 0$, то, согласно (9), $Q(s) \geq 0$; кроме того, из (b) следует, что $Q(s)$ невырождена. Следовательно, $Q(s) > 0$. Обратно, если $Q(s) > 0$ для любого s, то $\det(Q(s)) > 0$ для любого $s \in \mathbb{R}$, и, очевидно, коэфициент при s^2 в (9) неотрицателен, то есть выполняется (b). ■

Для классификации с точностью до причинной почти изометрии (т.е. с точностью до выбора решетки Γ в T) плоских полных строго причинных лоренцевых многообразий достаточно описать все многочлены вида (8), удовлетворяющие условиям пункта (ii) Теоремы 1, и указать, когда полученные многообразия эквивалентны.

2. Классификация

Пусть $Q_M(s)$ — канонический многочлен вида (8). Положим $k_D = \dim(\ker D)$.

Лемма 2. *Пусть M — многообразие сигнатуры $(m, n, r, 0)$. Тогда $r \geq k_D$.*

Доказательство. Обозначим $F = I - DA^{-1}D$. Поскольку k_D первых диагональных элементов матрицы D равны нулю, $F = \begin{pmatrix} I_{k_D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f \end{pmatrix}$. Утверждение леммы следует из равенства (5), которое в данном случае может быть записано в виде $r = \mathrm{rank}(F)$. ■

Введем обозначения для серий многообразий, выделяемых условиями на сигнатуры и k_D.

$$\begin{aligned} S_1 : &\quad (n, m, m, 0), \quad k_D = m; \\ S_2 : &\quad (n, m, k_D, 0); \\ S_1 : &\quad (n, m, k_D + 1, 0). \end{aligned}$$

Предложение 2. *Плоское полное строго причинное лоренцево многообразие сигнатуры $(n, m, r, 0)$ и размерности не более 8 либо принадлежит одной из серий S_1, S_2, S_3, либо имеет сигнатуру $(8, 3, 3, 0)$ при $k_D = 1$.*

Доказательство. Перебирая все возможные варианты для n, m, r и k_D, с соблюдением неравенств $n \leq 8$, $m + r = n - 2$, $r \leq m$ и $k_D \leq r$, получаем таблицу 1, из которой следует предложение. ■

***Замечание* 5.** Предложение 2 не исчерпывает всех многообразий в размерностях до 8, поскольку не указаны сигнатуры (n, m, r, k) при $k \neq 0$. Любое многообразие такой сигнатуры почти причинно изометрично произведению многообразия сигнатуры $(n - k, m - k, r, 0)$ и k-мерного тора $\mathbb{T}^k$, согласно теореме 1, (iii).

На множестве парабол в конусе P_m положительно определенных матриц, рассматриваемых с точностью до преобразований (2) с $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, имеется естественная топология, которую можно определить, например, так. Стандартная евклидова метрика ρ в пространстве матриц однозначно определяет вершину параболы – это точка, в которой касательная перпендикулярна оси. Это свойство не зависит от параметризации. Переместим параболу так, чтобы вершина попала в единичную матрицу I. Пусть $\mathcal{B}$ – замкнутый шар достаточно

Таблица 1.

$n = \dim M$	$m = \dim T$	$r = \dim R$	$k_D = \dim(\ker(D))$	Серия
4	1	1	1	S_1
5	2	1	1	S_2
6	2	2	1	S_3
			2	S_1
	3	1	1	S_2
7	3	2	1	S_3
			2	S_2
	4	1	1	S_2
8	3	3	1	отдельный
			2	S_3
			3	S_1
	4	2	1	S_3
			2	S_2
	5	1	1	S_2

малого радиуса относительно ρ с центром в I. Расстояние по Хаусдорфу на множестве $\mathcal{P}$ пересечений парабол с вершинами в I с шаром $\mathcal{B}$ задает метрику на $\mathcal{P}$. Очевидно, она инвариантна относительно стационарной группы $K = \mathrm{SO}(m)$ точки I, которая естественным образом действует на $\mathcal{P}$. Поскольку K компактна, метрика Хаусдорфа на семействе K-орбит в $\mathcal{P}$ определяет метрику на пространстве модулей рассматриваемого класса многообразий фиксированной сигнатуры σ. Обозначим последнее через $\mathcal{M}_\sigma$ и будем считать в дальнейшем, что оно снабжено отвечающей метрике топологией. Очевидно, замыкание множества невырожденных парабол содержит семейство лучей (но не точек, которые соответствуют эллиптическим многообразиям), а семейство многообразий с простым спектром плотно в $\mathcal{M}_\sigma$.

Обозначим через $\mathcal{M}_\sigma(S_k)$ множество многообразий из $\mathcal{M}_\sigma$, принадлежащих серии S_k, $k = 1, 2, 3$.

Предложение 3. *Многочлен вида (8) соответствует многоообразию серии S_1 тогда и только тогда, когда $D = \mathbf{0}$ и $A > 0$. При этом A диагональна. Семейство многообразий серии S_1 сигнатуры $(n, m, m, 0)$ параметризуется $(m-1)$ вещественным параметром.*

Доказательство. Условие $k_D = m$ эквивалентно равенству $D = 0$. Поэтому условие (3) принимает вид

$$Is^2 + A > 0 \quad \text{для любого} \quad s \in \mathbb{R},$$

что равносильно неравенству $A > 0$. Так как $C = I$ и $B = D = \mathbf{0}$, то выполняются условия (4) и (5). Первое утверждение следует из теоремы 1, (ii).

Матрица A имеет блочно-дигональную структуру (один блок), что влечет ее диагональность согласно определению канонического многочлена. Таким образом, $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$ и $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_m$. Проводя замену $s \to \alpha s$ и сопрягая некоторой скалярной матрицей, можно добиться выполнения равенства $a_1 = 1$. Канонический многочлен однозначно определяется диагональными элементами матрицы A, что и доказывает последнее утверждение. ∎

Пусть $Q(s)$ — многочлен вида (8). Введем обозначения:

$$F = I - DA^{-1}D, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & b \\ b^\top & G \end{pmatrix} = (a^{ij})_{ij=1}^m,$$

$$D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, d_1, d_2, \ldots, d_{m-k_D}),$$

причем $d_1 = 1$; $F = (f_{ij})_{ij=1}^m$. В силу определения канонического вида многочлена, $\tilde{A}$ -диагональная матрица размера k_D. Непосредственные вычисления дают

$$\begin{gathered} f_{ij} = \delta^{ij} \quad \text{при} \quad i \leq k_D \quad \text{или} \quad j \leq k_D, \\ f_{ij} = \delta^{ij} - d_{i-k_D} d_{j-k_D} a^{ij} \quad \text{для} \quad i > k_D, j > k_D, \end{gathered} \tag{10}$$

где δ^{ij} – символ Кронекера. Таким образом, F имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} I_{k_D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{F} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Лемма 3. *Для канонического характеристического многочлена многообразия серии S_2 условия (4) и (5) эквивалентны тому, что*

$$G = \mathrm{diag}(1, d_2^{-2}, \ldots, d_{m-k_D}^{-2}). \tag{12}$$

Доказательство. Используя (11), из условия (5) получаем, что $\tilde{F} = 0$. Согласно (10), $\delta^{ij} - d_{i-k_D} d_{j-k_D} a^{ij} = 0$ для всех i, j, таких, что $i > k_D$ и $j > k_D$ Таким образом, $a^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{d_{i-k_D} d_{j-k_D}}$. Но элементы с такими индексами образуют матрицу G, откуда следует (12). Таким образом, из (4) и (5) следует утверждение леммы. Обратное получается непосредственной подстановкой A^{-1} (определяемой G) в (4) и (5). ∎

Предложение 4. *Многочлен $Q(s)$ вида (8) определяет некоторое многообразие M серии S_2 сигнатуры $(n, m, k_D, 0)$ тогда и только тогда, когда матрица A такова, что*

(a) $\det Q(s) > 0$ *для любого s;*

(b) $A^{-1} > 0$ *и выполняется (12).*

Множество многообразий таких, что спектр $\tilde{A}$ прост, все d_i различны и $d_i \neq 1$, образует $k_D(m - k_D) + m - 1$ – параметрическое семейство, плотное в $\mathcal{M}_\sigma(S_2)$.

Доказательство. Очевидна эквивалентность (a), (b) и (3)–(5), в силу лемм 1 и 3.

При фиксированных матрицах $\tilde{A}$ и G на элементы матрицы b ограничения могут быть, например, следующим способом: выделим полные квадраты в квадратичной форме, соответствующей матрице A^{-1}. Положительность коэффициентов при квадратах и даст условия на b.

Матрицы D и $\tilde{A}$ задаются своими диагональными элементами, это $m-1$ параметр; при фиксированных $\tilde{A} > 0$ и $G > 0$ условие $A^{-1} > 0$ выполняется при любой достаточно малой матрице b, что дает еще $k_D(m-k_D)$ параметр. Последнее утверждение очевидно. ■

Лемма 4. *Для канонического характеристического многочлена многообразия серии S_3 условия (4) и (5) эквивалентны следующим ограничениям на элементы A^{-1}:*

$$a_{i+k_D i+k_D} \le d_i^{-2} \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, m-k_D, \tag{13}$$

$$a_{i+k_D j+k_D} = -\frac{\sqrt{(1-d_i^2 a_{i+k_D i+k_D})(1-d_j^2 a_{j+k_D j+k_D})}}{d_i d_j} \text{ при } d_i \ne d_j, \tag{14}$$

$$a_{i+k_D j+k_D} = 0 \text{ и } (1-g_{i+k_D i+k_D} d_i^2)(1-g_{j+k_D j+k_D} d_j^2) = 0 \text{ при } d_i = d_j. \tag{15}$$

При этом в (13) хотя бы одно неравенство строгое.

Доказательство. Покажем, что (4) и (5) влекут (13)–(15). Из (5) следует $\operatorname{rank}(F) = k_D + 1$, то есть $\operatorname{rank}(f) = 1$. Это равносильно тому, что любой минор порядка два равен нулю и $f \ne 0$. Из условия равенства нулю диагональных миноров получаем

$$a_{i+k_D j+k_D} = \epsilon_{ij} \frac{\sqrt{(1-d_i^2 a_{i+k_D i+k_D})(1-d_j^2 a_{j+k_D j+k_D})}}{d_i d_j} \text{ для всех } i \ne j \in \overline{1, m-k_D}, \tag{16}$$

где $\epsilon_{ij} = \pm 1$ отвечает за выбор знака. При выборе других миноров получаем соотношения на ϵ, а именно

$$\begin{gathered} \epsilon_{i_1 j_1}\epsilon_{i_2 j_2} = \epsilon_{i_1 j_2}\epsilon_{i_2 j_1} \text{ для всех попарно не равных } i_1, j_1, i_2, j_2, \\ -\epsilon_{i_1 j_1} = \epsilon_{i_2 j_1}\epsilon_{i_1 i_2}. \end{gathered} \tag{17}$$

Очевидно, что выбор знаков некоторой строчки однозначно определяет знаки всех остальных элементов (пусть выбраны знаки k-той строки, в силу симметричности матрицы, и k-того столбца, тогда $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ik}\epsilon_{kj}$, согласно (17)). Согласно определению канонического многочлена элементы (k_D+1)-ой строки A неположительны. Если эта строка не содержит нулей, то знаки всех элементов определены однозначно (так как заданы знаки одной строки). Если же в соответствующей строке присутствуют нули, то $\epsilon_{i,j}$ определены неоднозначно. Это соответствует сопряжению канонического многочлена матрицей $X = \operatorname{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$, в которой все элементы кроме одного однозначно определены. Таким образом, условие отрицательности элементов (k_D+1)-ой строки A (по определению канонического многочлена) и (16) влекут (14). Если $d_i = d_j$, то, согласно определению канонического вида (A – блочно-диагональная), данная часть матрицы A^{-1} диагональна, откуда следует (15). Кроме того, необходимо, чтобы хотя бы один элемент матрицы f не был равен нулю. Заметим, что матрица f равна нулю, если все ее диагональные элементы равны нулю. Это невозможно, если $\operatorname{rank}(f) = 1$. Таким образом, мы получаем в качестве необходимого следующее условие:

$$a_{i+k_D i+k_D} \neq d_i^{-2} \quad \text{для некоторого} \quad i \in \{1, \dots, m - k_D\}. \tag{18}$$

Из (4) следует $\langle Fe_{i+k_D}, e_{i+k_D} \rangle = 1 - d_i^2 a_{i+k_D i+k_D} \geq 0$ для любого $i \in \{1, \dots, m - k_D\}$. В сочетании с (18) это приводит к (13).

Обратно, из (14) и (15) следует (5) (проверяется непосредственной подстановкой). Кроме того, (14) влечет положительность следа матрицы f (так как все диагональные элементы f неотрицательны), что, в сочетании с условием $\operatorname{rank}(f) = 1$ (оно же (5)), дает $f \geq 0$. Поэтому $F \geq 0$, а это и есть (4). ∎

Предложение 5. *Многочлен $Q(s)$ вида (8) определяет некоторое унипотентное многообразие M серии S_3, тогда и только тогда, когда*

(a) $\det Q(s) > 0$ *для любого s;*

(b) *матрица $A^{-1} > 0$ удовлетворяет условиям (13)–(15) леммы 4.*

Множество многообразий, таких, что спектр $\tilde{A}$ прост, все d_i различны и $d_i \neq 1$, образует $(k_D(m - k_D) + 2m - k_D - 1)$–параметрическое семейство, плотное в $\mathcal{M}_\sigma(S_3)$.

Доказательство. Покажем, что (a) и (b) эквивалентны (3)-(5). Условия (13)–(15) эквивалентны (4) и (5) (см. лемму 4), тогда как (a) и $A^{-1} > 0$ (или, что тоже самое, $A > 0$) эквивалентны условию (3) (см. лемму 1). Если $A^{-1} > 0$, то небольшое возмущение b не приводит к нарушению условия положительности; это $k_D(m - k_D)$ параметр. Матрицы D, $\tilde{A}$ и G определяются своими диагональными элементами, что дает еще $2m - k_D - 1$ параметр. Последнее утверждение очевидно. ∎

Предложение 6. *Многочлен $Q(s)$ вида (8) определяет некоторое унипотентное многообразие M сигнатуры $(8, 3, 3, 0)$, при $k_D = 1$, тогда и только тогда, когда*

(a) $A > 0$*;*

(b) *элементы матрицы $A^{-1} = (\tilde{a}^{ij})_{ij=1}^3$ удовлетворяют соотношениям*

$$a^{2,2} < 1, \quad a^{3,3} < \frac{1}{d_2}, \quad (a^{2,3})^2 < \frac{(1 - a^{2,2})(1 - d_2^2 a^{3,3})}{d_2^2}.$$

Канонические характеристические многочлены многообразий общего положения ($d \neq 1$), имеющих данную сигнатуру, образуют 7-ми параметрическое семейство.

Доказательство. Пусть $D = \operatorname{diag}(0, 1, d)$. Тогда $F = I_3 - DA^{-1}D$ имеет вид:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^{2,2} & da^{2,3} \\ 0 & da^{2,3} & 1 - d^2 a^{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix},$$

где f – 2×2-матрица. Покажем, что условия (3)-(5) влекут (a) и (b). Очевидно, что из (3) следует (a). Так как выполнены условия пункта (a) леммы 1, то (a) и (b) влекут (3).

В условиях предложения условия (4) и (5) эквивалентны условию $F > 0$. Последнее равносильно тому, что $f > 0$. Так как f должна быть положительно определена, то условие $\langle fe_i, e_i \rangle > 0$, где e_i — базисные векторы, необходимо. Таким образом, получены необходимые условия: $1 - a^{2,2} > 0$ и $1 - d^2 a^{3,3} > 0$. Таким образом, след f положителен. Так как f имеет порядок 2, то для положительности f необходимо и достаточно, чтобы $\det f > 0$. Это условие и задает нужный вид матрицы A. Поскольку симметрическая матрица A^{-1} определяется своими элементами на диагонали и выше, это дает 6 параметров. Осталось заметить, что матрица D зависит от одного параметра. ■

В качестве следствия из предложений 3 – 6 получаем таблицу 2.

Таблица 2.

Серия	Размерность $M_\sigma(S_i)$
S_1	$m - 1$
S_2	$r(m - r) + m - 1$
S_3	$r(m - r) + r + m - 1$
отдельный	7

Полученные результаты позволяют конкретизировать алгоритм (A)–(C) на странице 27 для размерностей не выше 8.

(α) Фиксируем изотропные векторы v_0, v_1, такие, что $\ell(v_0, v_1) = 1$, определяем подпространства L, W, N соотношениями

$$L = \mathbb{R}v_0, \quad W = L^\perp, \quad N = W \cup v_1^\perp.$$

Выбор подпространств N и $T \subseteq N$ в пространстве V определяет сигнатуру

$$(n, m, r, 0) = (\dim V, \dim T, \dim(T_N^\perp), 0).$$

После этого выбирается диагональная неотрицательная матрица D так, чтобы

$$k_D = \dim(\ker D) \le r,$$

и определяется, к какой серии принадлежит многообразие, согласно таблице 1. Матрица A определяется из предожений 3 – 6 (в зависимости от серии). Это задает характеристический многочлен $Is^2 + 2Ds + A$.

(β) Отображение a определяется из соотношений

$$\langle Az, z\rangle = \langle x, x\rangle\,,$$
$$\langle Dz, z\rangle = \langle a'x, x\rangle\,,$$
$$\langle Iz, z\rangle = \langle a'x, a'x\rangle + \langle a''x, a''x\rangle\,,$$

где $x = \iota\, z \in T$, $z \in \mathbb{R}^m$; кроме того, $\Gamma = \iota\mathbb{Z}^m$ (см. [7] (Теорема 3)).

Согласно [7], алгоритм (A)–(C) позволяет построить любое плоское полное лоренцево строго причинное многообразие.

В следующей теореме сформулированы основные результаты работы.

Теорема 3. *(1) Любое плоское полное лоренцево строго причинное многообразие размерности не выше 8 может быть построено по уточненному алгоритму* (α)–(β).

(2) Размерности пространств модулей $\mathcal{M}_\sigma$ задаются таблицей 3:

Таблица 3.

Сигнатура $\sigma = (n, m, r, 0)$	Размерность $\mathcal{M}_\sigma$
$(4, 1, 1, 0)$	0
$(5, 2, 1, 0)$	2
$(6, 2, 2, 0)$	3
$(6, 3, 1, 0)$	4
$(7, 3, 2, 0)$	6
$(7, 4, 1, 0)$	6
$(8, 3, 3, 0)$	7
$(8, 4, 2, 0)$	9
$(8, 5, 1, 0)$	8

Доказательство. Пункт (1) следует из возможности построения многообразия по алгоритму (A)–(C) и существования для данного многообразия канонического многочлена. Пункт (2) следует из предложения 2 и таблицы 2. ■

Литература

1. Abels H. Properly Discontinuous Groups of Affine Transformations: A Survey // Geometriae Dedicata. 2001. N.87. P.309-333.
2. Barbot T. Globally hyperbolic flat space-times // Journal of Geometry and Physics. 2005. N.53. P.123-165.
3. Beem J.K., Ehrlich P.E. Global Lorentzian geometry // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2nd ed., vol. 202, Marcel Dekker, New York. 1996.
4. Charette V., Drumm T., Goldman W., Morill M. Complete Flat Affine and Lorentzian Manifolds // Geometriae Dedicata. 2003. N.97. P.187-198.
5. Ellis G., Hawking S. The large scale structure of space-time // Cambridge Monographs on Mathematical Physics. N.1. Cambridge University Press, London, New York, 1973.

6. Fried D. Flat Spacetimes // J. Diff. Geom. 1987. N.26. P.385-396.
7. Гичев В.М., Мещеряков Е.А. О геометрии плоских полных лоренцевых строго причинных многообразий // Принята к печати в Сибирский Математический Журнал.
8. Gichev V.M., Morozov O.S. On flat complete causal Lorentzian manifolds // Geometriae Dedicata. 2005. N.116. P.37-59.
9. Milnor J. On fundamental groups of complete affinely flat manifolds // Adv. in Math. 1977. N.25. P.178-187.
10. Wolf J.A. Spaces of constant curvature. University of Californnia, Berkley, California, 1972.