Математические структуры и моделирование
2008, вып. 18, с. 5–8

УДК 519.214.5

О МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ МАКСИМУМОВ С НЕЛИНЕЙНОЙ НОРМИРОВКОЙ

А.Г. Гринь

In this article suggests a minimal in a certain sense conditions of weak dependence, which provided convergence of distributions of maximum random variables to a nondegenerate limit laws.

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $X_n = \max\limits_{1\le k\le n} \xi_n$, $F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n < x\}$. Символ $F_n \Rightarrow F$ обозначает, что $\{F_n\}$ слабо сходится к F.

Если $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных величин, то в качестве предельных (в смысле слабой сходимости) функций распределения для $F_n(a_n + xb_n)$ при некотором выборе нормирующих констант a_n и b_n могут выступать лишь три типа распределений со следующими представителями:

1 тип: $\exp\{-x^{-\rho}\}, x > 0,\ \rho > 0,$

2 тип: $\exp\{-(-x)^{\rho}\}, x \le 0,\ \rho > 0,$

3 тип: $\exp\{-e^{-x}\}, x > 0.$

Это классические результаты Б.В. Гнеденко (см., напр. [1]).

В статье [2] получены минимальные в некотором смысле условия слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающие сходимость $F_n(a_n + xb_n)$ к распределению первого типа. Для распределения второго типа такие же условия легко получаются аналогичными рассуждениями.

Вместе с тем, если в качестве нормирующих преобразований вместо линейных функций $a_n + xb_n$ использовать суперпозиции специально подобранных монотонных функций, то все типы предельных распределений можно свести лишь к одному, третьему закону [3, гл.5].

В данной работе как раз и изучаются предельные теоремы для величин $Z_n = G_n^{-1}(X_n)$, где нормирующие преобразования G_n - это последовательность функций, относительно которых мы будем делать предположения, использующиеся в предельных теоремах в схеме обобщенного суммирования, излагаемых

Омский государственный университет.
E-mail: `grin@math.omsu.omskreg.ru`
Работа поддержана грантом РФФИ 06–01–00127.

в [3, гл.5]. Предполагается что $G_n(x)$ - последовательность непрерывных строго возрастающих функций на $(0,\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям (условия (G)):

G1. Для любого $0<\theta\le 1$ и любого $x>0$ существует предел

$$\Xi_\theta(x)=\lim_{n\to\infty}G_{m_n}^{-1}(G_n(x)),$$

если только $m_n/n\to\theta,\ n\to\infty$.

G2. Функция $\Xi_\theta(x)$ при заданном x и разных θ принимает различные значения.

Доказывается следующее утверждение [3, лемма 5.3.1]:

Функция $\Xi_\theta(x)$ при любых $x>0,\ u,v\in(0,1)$ явлется решением функционального уравнения $\Xi_u(\Xi_v(x))=\Xi_{uv}(x)$ и имеет вид $\Xi_\theta(x)=h^{-1}(h(x)-\ln\theta)$, где $h(x)$ - непрерывная и строго возрастающая функция, областью значений которой является некоторый интервал $(c,\infty),\ c=h(0)\ge-\infty$.

Пусть $\mathbf{P}\{\xi_1<x\}<1,\ x>0$. Из теоремы 5.3.5 в [3] следует, что

$$\mathbf{P}\{G_n^{-1}(X_n)<x\}=F_n(G_n(x))\Rightarrow H(x),\tag{1}$$

($H(x)$ - функция распределения невырожденной случайной величины) тогда и только тогда, когда при $x\to\infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_1\ge x\}=L(h(x))\exp\left\{-h(x)\right\},\tag{2}$$

где $L(x)$ - медленно меняющаяся функция при $x\to\infty$. Если выполнено (2), то $H(x)=\exp\left\{-\exp\{-h(x)\}\right\}$, а в качестве нормирующих преобразований можно взять

$$G_n(x)=h^{-1}\left(h(x)+\ln\left(nL(\ln n)\right)\right).\tag{3}$$

Как и в [2], символ $n+m\to\infty$ в каком-либо соотношении будет означать, что указанное соотношение выполняется при $n\to\infty$ и при любой последовательности натуральных чисел $m=m(n)$.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n\},\ n=1,2,...\}$ – стационарная последовательность, для которой выполнено (2) и пусть нормирующие преобразования определяются соотношением (3). Для того чтобы $F_n(G_n(x))\Rightarrow\exp\left\{-\exp\{-h(x)\}\right\}$, $n\to\infty,\ x>0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения:*

а)

$$F_{n+m}(G_{n+m}(x))-F_n(G_{n+m}(x))F_m(G_{n+m}(x))\to 0,\quad n+m\to\infty;\tag{R$_1$}$$

б) при любом $x>0$ и при любой достаточно медленно растущей последовательности $k=k(n)\to\infty,\ n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{X_n\ge G_{nk}(x)\}\sim n\mathbf{P}\{\xi_1\ge G_{nk}(x)\},\ n\to\infty.\tag{R$_2$}$$

***Замечание* 1.** Теорему 1 можно интерпретировать так: условия (R_1) и (R_2) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняются предельные теоремы о сходимости к распределениям третьего типа с той же нормировкой, что и в предельных теоремах для независимых величин.

***Замечание* 2.** Достаточные условия для выполнения (R_1) и (R_2) в терминах «традиционных» условий слабой зависимости приведены в [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

Необходимость. Пусть $F_n(G_n(x)) \Rightarrow \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}, \ n \to \infty$. Функция $\exp\{-h(x)\}$ непрерывна при $x > 0$, поэтому слабая сходимость равносильна поточечной: $F_n(G_n(x)) \to \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}, \ x > 0$. Пусть $m = m(n)$ – произвольная последовательность натуральных чисел. При $x > 0$ обозначим

$$\Delta(n) = |F_{n+m}(G_{n+m}(x)) - F_n(G_{n+m}(x))F_m(G_{n+m}(x))| .$$

Для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \le \theta \le 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$\frac{n_2}{n_2+m_2} \to \theta \quad \frac{m_2}{n_2+m_2} \to 1-\theta, \quad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < \theta < 1$. В силу свойства $G1$

$$\lim_{n\to\infty} F_{n_2}\left(G_{n_2+m_2}(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{G^{-1}_{n_2+m_2}(X_{n_2}) < x\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{G^{-1}_{n_2}(X_{n_2}) < G^{-1}_{n_2}(G_{n_2+m_2}(x))\} = H(\Xi_\theta(x)) =$$

$$= H(h^{-1}(h(x) - \ln\theta)) = \exp\{-\theta\exp\{-h(x)\}\} . \tag{4}$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} F_{m_2}\left(G_{n_2+m_2}(x)\right) = \exp\{-(1-\theta)\exp\{-h(x)\}\} . \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\Delta(n_2) \to 0, \ n \to \infty$.

Если Y_n и Z_n – последовательности случайных величин и $Z_n \to 0$ по вероятности, то при $x > 0$

$$0 \le \mathbf{P}\{Y_n < x\} - \mathbf{P}\{\max\{Y_n, Z_n\} < x\} \le \mathbf{P}\{Z_n \ge x\} \to 0, \ n \to \infty. \tag{6}$$

Пусть $\theta = 0$. Тогда при $n \to \infty, \ x > 0$ $F_{n_2}\left(G_{n_2+m_2}(x)\right) \to 1, \ (G^{-1}_{n_2+m_2}(X_{n_2}) \to 0$ по вероятности) и в силу (6)

$$F_{m_2}(G_{n_2+m_2}(x)) - F_{n_2+m_2}(G_{n_2+m_2}(x)) \to 0, \ n \to \infty,$$

то есть снова $\Delta(n_2) \to 0, \ n \to \infty$. Аналогично рассматривается случай $\theta = 1$. Все сказанное означает, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность $\{\Delta(n_2)\}$. Следовательно, $\Delta(n) \to 0, \ n \to \infty$ и мы показали, что выполнено условие (R_1).

Докажем (R_2). В силу (3)

$$h(G_n(x)) = h(x) + \ln n + \ln L(\ln n). \tag{7}$$

Медленно меняющаяся функция $L(x)$ обладает свойством $\ln L(x)/\ln x \to 0$, $x \to \infty$ [4, с.48], так что из (7) следует $h(G_n(x)) \sim \ln n, n \to \infty$, а из (3) –

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geq G_n(x)\} \sim L(\ln n) \exp\{-h(x) - \ln n - \ln L(\ln n)\} = n^{-1} \exp\{-h(x)\}. \tag{8}$$

Если $k = k(n) \to \infty$ растет достаточно медленно, то в силу (1), (R_1) и (8)

$$\mathbf{P}\{X_n \geq G_{nk}(x)\} = 1 - F_{nk}^{\frac{1}{k}}(G_{nk}(x))(1 + o(1)) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{k}e^{-h(x)}\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{1}{k} \exp\{-h(x)\}(1 + o(1)) = n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq G_{nk}(x)\}(1 + o(1)). \tag{9}$$

(R_2) доказано.

Достаточность.

Пусть выполнены условия (R_1) и (R_2), $k = k(n) \to \infty$, $n = km+r$, $0 \leq r < m$. С помощью (6) и условия (R_1) при k растущем достаточно медленно получаем

$$F_n(G_n(x)) = F_m^k(G_n(x)) + o_n(1) = (1 - \mathbf{P}\{X_m > G_n(x)\})^k + o_n(1). \tag{10}$$

Так как $n^{-1}km \to 1,\ n \to \infty$, то $G_n(x) \sim G_{mk}(x),\ n \to \infty$ и из условия (R_2) и (9) вытекает

$$\mathbf{P}\{X_m > G_n(x)\} = \mathbf{P}\{X_m > G_{mk}(x)\}(1 + o_n(1)) = \frac{1}{k} \exp\{-h(x)\}(1 + o_n(1)). \tag{11}$$

Из (10) и (11) выводим

$$F_n(G_n(x)) = \left(1 - \frac{1}{k} \exp\{-h(x)\}(1 + o_n(1))\right)^k + o_n(1) \to \exp\{-\exp\{-h(x)\}\},\ n \to \infty.$$

Теорема доказана. ■

Литература

1. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
2. Гринь А.Г. Минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для максимумов // Математические структуры и моделирование. 2006. Вып. 16. С. 21-25.
3. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986. 415 с.
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.