Математические структуры и моделирование
2008, вып. 18, с. 9–30

УДК 512.642.2:517.965

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР БОЛЬШИХ РАНГОВ

И.А. Фирдман

В статье задается алгебраическая аксиоматика физических структур и доказывается классификационная теорема для структур ранга, большего $(3,3)$.

Введение

Принцип феноменологической симметрии был введен в 1960-х годах Ю. И. Кулаковым [5–8] как новый аксиоматический подход в физике и геометрии (теория физических структур). Говоря в максимальной общности, физической структурой называется многоосновная алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R — множества произвольной природы (возможно, с заданной на них дополнительной структурой), $\langle,\rangle$ — отображение $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$. Предполагается также наличие пары натуральных чисел m, n (говорят о физической структуре ранга $(n+1, m+1)$), таких, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ обладают в некотором смысле размерностью m и n соответственно над R, и наборы из mn комбинаций n-ок элементов из $\mathcal{M}$ и m-ок элементов из $\mathcal{N}$ посредством биформы $\langle,\rangle$ зависимы в определенном смысле. Кулаковым была построена развитая затем Г.Г. Михайличенко аналитическая интерпретация принципа феноменологической симметрии и даны его применения в физике и геометрии [5–8, 10–12, 14]. Множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ при этом понимались (в случае физической интерпретации) как множества физических объектов, в качестве R рассматривалось множество вещественных чисел - доступный измерению результат взаимодействия пар объектов из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Михайличенко был доказан ряд классификационных теорем [9,13] для аналитических физических структур, позволяющих определять конкретный вид биформы $\langle,\rangle$ из достаточно общих условий феноменологической симметрии ее действия, что можно было в некоторой перспективе интерпретировать как возможность выводить точные формулы физических законов, исходя из некоторых достаточно общих сведений об их структуре на уровне метаязыка.

Между тем для формулировки основных идей и результатов ранней теории физических структур не требовалась, по сути, аналитичность функции и даже наличие аналитической структуры в множестве R. Это наблюдение послужило

Омский государственный университет.

толчком к развитию алгебраической ветви теории физических структур, рассматривавшей в качестве R произвольное множество и отказывавшейся, таким образом, от требований аналитичности. Первая алгебраическая аксиоматика теории физических структур была дана в 1990-м году В. К. Иониным в работе [3] (для физических структур ранга (2,2) с отождествлением $\mathcal{M} = R = \mathcal{N}$). Им было показано, для ранга (2,2) наличие на R бинарной операции, согласующейся некоторым естественным образом с $\langle , \rangle$ (и описывающей ее действие) и задающей на R структуру группы. Тем самым была, с одной стороны, дана аксиоматика абстрактной группы на основе феноменологической симметрии, с другой стороны, построена классификация алгебраических (абстрактных) физических структур ранга $(2,2)$ (в предложенной аксиоматике). В работе [4] Иониным была сформулирована аксиоматика теории физических структур в большой степени общности и указана возможность получения из нее, в частности, алгебраической аксиоматики.

Отталкиваясь от работ Ионина, А.А. Симонов [15, 16] построил алгебраическую аксиоматику бинарной физической структуры произвольного ранга, некоторым образом конкретизирующую аксиоматику [4]. На ее основе им было доказано (для структур ранга $(n+1, 2)$ при произвольном $n \geq 2$) существование согласованных с действием $\langle , \rangle$ бинарных операций $\cdot$ и $\oplus$ на R, определяющих на R, при дополнительных предположениях, структуру почти кольца, и указаны возможности применения соответствующего результата к классификации физических структур соответствующих рангов. В работе [17] идеи феноменологической симметрии структуры ранга $(3, 2)$ были использованы Симоновым для построения связи между точно дважды транзитивными группами и алгебраическими системами, близкими к почти области.

В работах автора [18, 19] исследуются алгебраические аспекты феноменологической симметрии для физических структур более высоких рангов в аксиоматике, родственной аксиоматике Симонова, с дополнительным условием наличия вырожденных элементов (нулей) в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, а также (в [19]) наделенных топологией. В [18] проводится их классификация, позволяющая, в частности, дать основанную на принципе феноменологической симметрии аксиоматику пары векторных пространств над телом R, связанную невырожденной билинейной формой (не задавая при этом явным образом структуры тела на R).

Данная работа обобщает работы [18, 19] автора на случай отсутствия нулей в $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, упрощая тем самым аксиоматику и позволяя расширить класс объектов, определяемых посредством феноменологической симметрии.

1. Алгебраическая классификация физических структур

1.1. Некоторые факты из теории билинейных форм

Приведем для полноты изложения некоторые факты из теории билинейных форм, на которые мы будем опираться в этом разделе. Все факты, даются по [2].

Далее в этом пункте F — тело, V — левое линейное пространство над F, W — правое линейное пространство над F, $\Phi : V \times W \to F$ — билинейная форма.

Теорема 1. *Пусть V и W конечномерны над F. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Φ невырождена слева;*
2. *Φ невырождена справа;*
3. *Φ невырождена.*

Теорема 2. *Пусть V, W конечномерны над F, билинейная форма Φ, определенная над ними, невырождена. Тогда $\dim V = \dim W$, и для всякого базиса (e_k) пространства V существует такой базис (f_l) пространства W, что $\Phi(e_k, f_l) = \delta_{kl}$ $(k, l = 1, \ldots, \dim V$, δ_{kl} — символ Кронекера).*

Базисы (e_k), (f_l), описанные в теореме 2, будем называть дуальными базисами пространств V, W.

Лемма 1. *Пусть (e_k), (f_l) — дуальные базисы конечномерных пространств V, W соответственно, форма Φ невырождена. Тогда для любых $x \in V$, $y \in W$*

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{1}$$

где $n = \dim V = \dim W$, $x_k = \Phi(x, f_k)$, $y_k = \Phi(e_k, y)$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} x'_k \cdot e_k$ — разложение x по базису e_k. Тогда для произвольного $k = 1, \ldots, n$ $x_k = \Phi(x, f_k) = \sum_{l=1}^{n} x'_l \cdot \Phi(e_l, f_k) = x'_k$. Таким образом, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$ и аналогично $y = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot y_k$. Теперь, расписывая $\Phi(x, y)$ по билинейности и пользуясь тождеством $\Phi(e_k, f_l) = \delta_{kl}$, сразу получаем (1). ■

1.2. Система аксиом и формулировка основной теоремы

1.2.1. Базовая система аксиом

Пусть дана (многоосновная) алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R — произвольные множества (R содержит более одного элемента), $\langle,\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — некоторое отображение, называемое *биформой* и удовлетворяющее условию *невырожденности*:

$$\text{для любых } i, i' \in \mathcal{M},\ i \neq i' \text{ найдется } \alpha \in \mathcal{N},\ \text{такой, что } \langle i, \alpha\rangle \neq \langle i', \alpha\rangle,$$

$$\text{для любых } \alpha, \alpha' \in \mathcal{N},\ \alpha \neq \alpha' \text{ найдется } i \in \mathcal{M},\ \text{такой, что } \langle i, \alpha\rangle \neq \langle i, \alpha'\rangle.$$

(то есть элементы $\mathcal{M}$ и, соответственно, $\mathcal{N}$ считаются равными, если $\langle,\rangle$ действует на них одинаково).

Мы считаем заданными также целые положительные числа n и m; пару $(n+1, m+1)$ будем называть *рангом* данной системы.

В дальнейшем мы будем использовать следующую сокращенную форму записи: для $i_1, \ldots, i_k, i \in \mathcal{M}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha \in \mathcal{N}$ мы можем обозначить $(i_1, \ldots, i_k) =$

$I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$. В этом случае будем под $\langle I, \alpha \rangle$ понимать вектор (здесь и далее мы, допуская некоторую вольность в употреблении терминов, называем так упорядоченные наборы элементов R, не подразумевая этим наличия линейной структуры) $(\langle i_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha \rangle) \in R^k$, под $\langle i, \mathfrak{A} \rangle$ — вектор $(\langle i, \alpha_1 \rangle, \ldots, \langle i, \alpha_l \rangle) \in R^l$, под $\langle I, \mathfrak{A} \rangle$ — матрицу

$$\langle I, \mathfrak{A} \rangle = \begin{pmatrix} \langle i_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle i_1, \alpha_l \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle i_k, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle i_k, \alpha_l \rangle \end{pmatrix} \in R^{kl}.$$

Мы будем часто иметь дело с отображениями $\langle I, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^k$, $I \in \mathcal{M}^k$, определенными по правилу $\langle I, \cdot \rangle : \alpha \mapsto \langle I, \alpha \rangle$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Будем в случаях, когда сочтем это удобным, обозначать такие отображения как $\pi_I : \mathcal{N} \to R^k$. Аналогично определенные отображения $\langle \cdot \,, \mathfrak{A} \rangle : \mathcal{M} \to R^k$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ будем обозначать $\pi^{\mathfrak{A}} : \mathcal{M} \to R^k$.

Пусть заданы некоторые упорядоченные наборы $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathcal{N}^m$; мы будем далее называть их базами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно.

Пусть выполняются следующие аксиомы на $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ (будем называть их базовым набором аксиом).

Аксиома A1 Пусть $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^m$, $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$. Пусть $\langle Z, \mathfrak{A}' \rangle = \langle I', \Omega \rangle$, $\langle i', \Omega \rangle = \langle i, \mathfrak{A}' \rangle$, $\langle Z, \alpha' \rangle = \langle I', \alpha \rangle$. Тогда $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$.

Аксиома A2 Для любого $r \in R^n$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha \rangle = r$; для любого $r \in R^m$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \Omega \rangle = r$.

Введем на $\mathcal{M}$ следующее отношение *зависимости*. Будем говорить, что $i \in \mathcal{M}$ зависит от системы элементов $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$

$$\langle I, \alpha \rangle = \langle I, \alpha' \rangle \text{ влечет } \langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle.$$

Совокупность всех элементов $\mathcal{M}$, зависящих от $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$, будем обозначать $[i_1, \ldots, i_k]$. Будем называть систему элементов $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$ *независимой*, если она не зависит ни от какой меньшей системы элементов $\mathcal{M}$, то есть не существует таких $i'_1, \ldots, i'_{k-1} \in \mathcal{M}$, что $i_1, \ldots, i_k \in [i'_1, \ldots, i'_{k-1}]$. В случае $k = 1$ независимость элемента i означает, что $i \notin [\emptyset]$. Значение зависимости такого рода будет детально рассмотрено позже.

Аналогично определяется отношение зависимости на $\mathcal{N}$ и вытекающие из него понятия.

Будем предполагать выполненной следующую аксиому.

Аксиома A3 Пусть $k \in \{1, 2, 3\}$, $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$ независимы. Тогда для любого вектора $r \in R^k$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ независимы. Тогда для любого $r \in R^k$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = r$.

Определение 1. Многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, удовлетворяющую указанным выше условиям (R содержит более одного элемента, биформа невырождена, выполняются аксиомы A1, A2, A3), будем называть (абстрактной) физической структурой ранга $(n+1, m+1)$.

Определение 2. Две физические структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ и $(\mathcal{M}', \mathcal{N}', R', \langle,\rangle')$ ранга $(n+1, m+1)$ будем называть сильно эквивалентными, если найдутся такие биективные отображения $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ будет выполнено

$$\langle \mu(i), \nu(\alpha)\rangle' = \langle i, \alpha\rangle.$$

1.2.2. Дополнительные аксиомы

Как было показано в [18], из базовых аксиом A1–A3 получаются следующие утверждения (которые мы будем называть аксиомами A4–A6; вся совокупность аксиом A1–A6 при этом, конечно, может быть (и будет) зависима).

Аксиома A6 Если $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, то из $\langle Z, \alpha\rangle = \langle Z, \alpha'\rangle$ следует $\alpha = \alpha'$. Если $i, i' \in \mathcal{M}$, то из $\langle i, \Omega\rangle = \langle i', \Omega\rangle$ следует $i = i'$.

Нами получена, с учетом аксиомы A2, биективность отображений π_Z и π^Ω (будем называть их координатизующими отображениями). Для произвольного элемента $i \in \mathcal{M}$ будем теперь называть вектор $\langle i, \mathfrak{A}\rangle \in R^m$ дуальными координатами i (в базе Ω); аналогично для $\alpha \in \mathcal{N}$ будем называть $\langle I, \alpha\rangle \in R^n$ дуальными координатами α (в базе Z).

Определим для каждого элемента $i \in \mathcal{M}$ функцию $U[i] : R^n \to R$ следующим равенством:

$$U[i](\langle Z, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{N}.$$

Определение корректно в силу аксиомы A6; функции определены на всем R^n в силу аксиомы A2. Пусть теперь

$$U^n_{\mathcal{M}} = \{U[i] \mid i \in \mathcal{M}\}.$$

Для $k = 0, \ldots, n$ определим $U^k_{\mathcal{M}}$ как подмножество функций из $U^n_{\mathcal{M}}$, постоянных на последних $n-k$ координатах (и рассматриваемых лишь на первых k — элементы $U^k_{\mathcal{M}}$ являются функциями $R^k \to R$). Обозначим $U_{\mathcal{M}} = \bigsqcup_{k=0}^n U^k_{\mathcal{M}}$. Заметим, что оператор $U : \mathcal{M} \to U^n_{\mathcal{M}}$ не только сюръективен, но и инъективен. Действительно, пусть $i, i' \in \mathcal{M}$, $U[i] = U[i']$. Тогда $\langle i, \alpha\rangle = U[i](\langle Z, \alpha\rangle) = \langle i', \alpha\rangle$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, откуда, ввиду невырожденности биформы, $i = i'$. Таким образом, оператор U обратим. Далее мы будем обозначать за $V : U^n_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ обратный оператор, сопоставляющий каждой функции из $U^n_{\mathcal{M}}$ элемент $\mathcal{M}$, которым она задана.

Аналогично с помощью базы Ω определяется набор функций $U_{\mathcal{N}}$ и операторы $U : \mathcal{N} \to U^m_{\mathcal{N}}$ и $V : U^m_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$.

Введем для удобства обозначений следующие операторы: $L_k : U^k_{\mathcal{M}} \to U^n_{\mathcal{M}}$, $P_k : U^n_{\mathcal{M}} \to U^k_{\mathcal{M}}$, $L^k_l : U^l_{\mathcal{M}} \to U^k_{\mathcal{M}}$, $P^k_l : U^k_{\mathcal{M}} \to U^l_{\mathcal{M}}$, $k, l = 0, \ldots, n$, $l \leq k$. P_k —

это оператор, сопоставляющий функции из $U^n_{\mathcal{M}}$ постоянной на последних $n-k$ координатах, соответствующую функцию из $U^k_{\mathcal{M}}$ (ее ограничение на первые k координат). На других функциях из $U^n_{\mathcal{M}}$ P_k не определяется. L_k — это оператор, обратный к P_k. Он определен на всем $U^k_{\mathcal{M}}$, согласно определению $U^k_{\mathcal{M}}$. По определению полагаем $L^k_l = P_k \circ L_l$, $P^k_l = L_l \circ P_k$. Аналогично действующие операторы вводятся и для функций из $U_{\mathcal{N}}$. Обозначать мы их будем так же — область определения всякий раз будет очевидна из контекста.

Отметим некоторые свойства $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$.

Аксиома A4 Множества функций $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$ замкнуты относительно взятия суперпозиции (в которой участвуют функции лишь из одного множества).

Аксиома A5 Пусть $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$, $u \in U^k_{\mathcal{M}}$. Тогда найдется такой элемент $i \in [i_1, \ldots, i_k]$, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha\rangle = u(\langle I, \alpha\rangle)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{N}$, $u \in U^k_{\mathcal{N}}$.

Как показано в [18], аксиомы A4 и A5 эквивалентны при выполнении аксиом A1, A2, A6.

Мы можем теперь ввести для каждого набора $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$ оператор $V_I[u] : U^k_{\mathcal{M}} \to [i_1, \ldots, i_k] \subseteq \mathcal{M}$, определенный на всем $U^k_{\mathcal{M}}$, следующим образом: для $u \in U^k_{\mathcal{M}}$ полагаем $V_I[u] = i \in [i_1, \ldots, i_k]$, такому, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha\rangle = u(\langle I, \alpha\rangle)$.

Мы определим также обратные операторы $U_I : [i_1, \ldots, i_k] \to R^{R^k}$, сопоставляющие каждому элементу $i \in [i_1, \ldots, i_k]$ функцию $u : R^k \to R$ (не обязательно лежащую в $U^k_{\mathcal{M}}$), такую, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha\rangle = u(\langle I, \alpha\rangle)$.

Аналогично вводятся операторы $V_{\mathfrak{A}}$, $U_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$.

1.2.3. Формулировка классификационной теоремы

Пусть F — произвольное тело. Далее нам понадобятся обозначения для следующих множеств функций n переменных над F.

$$
\begin{aligned}
L^l_n(F) &= \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n \mid a_1, \ldots, a_n \in F\};\\
L^{l,a}_n(F) &= \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n + a_{n+1} \mid a_1, \ldots, a_{n+1} \in F\};\\
L^{l,s}_n(F) &= \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n \mid\\
&\qquad\qquad a_1, \ldots, a_n \in F,\ a_1 + \ldots a_n = e\};\\
L^{l,s,a}_n(F) &= \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n + a_{n+1} \mid\\
&\qquad\qquad a_1, \ldots, a_{n+1} \in F,\ a_1 + \ldots a_n = e\}.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом, но с домножением переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $a_1, \ldots, a_n$ справа определяются множества функций $L^r_n(F)$, $L^{r,a}_n(F)$, $L^{r,s}_n(F)$, $L^{r,s,a}_n$.

Теорема 3. *Пусть для системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, такого, что $m, n \geq 2$, $(n+1, m+1) \neq (3,3)$, выполнена следующая совокупность аксиом: A2, A3, одно из следующих трех сочетаний: A1; A4 и A6; A5 и A6, а также невырожденность биформы и наличие в R более, чем одного элемента.*

Тогда

1. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве e можно взять произвольный элемент R, не равный O) и задать на R бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет телом.*

2. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются, соответственно, левым m-мерным и правым n-мерным линейными пространствами над телом R, определенным в предыдущем пункте.*

3. *$m = n$, $m = n + 1$ или $m = n - 1$.*

4. *Можно выбрать такие наборы элементов $(z'_1, \ldots, z'_n) = Z' \in \mathcal{M}^n$, $(\omega'_1, \ldots, \omega'_m) = \Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^m$ биективны и для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ биформа $\langle , \rangle$ представляется в одном из следующих видов (в первом и последнем случаях $m = n$, во втором — $m = n + 1$, в третьем — $m = n - 1$) :*

$$\langle i, \alpha\rangle = x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n; \tag{2}$$

$$\langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1}; \tag{3}$$

$$\langle i, \alpha\rangle = x_1 \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + x_{n-1} \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + \xi_n; \tag{4}$$

$$\langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_n) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n, \tag{5}$$

где $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \ldots, x_m)$, $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $+$ и $\cdot$ — операции в теле R.

5. *Наборы функций $U^n_{\mathcal{M}}$ и $U^m_{\mathcal{N}}$, определенных в аксиомах A4 и A5, имеют следующий вид, в зависимости от того, какой из формул (2)–(5) задана $\langle , \rangle$:*

$$\begin{aligned}
(2) &: U^n_{\mathcal{M}} = L^l_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^r_n(R);\\
(3) &: U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,a}_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s}_{n+1}(R);\\
(4) &: U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s}_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,a}_{n-1}(R);\\
(5) &: U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s,a}_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s,a}_n(R).
\end{aligned}$$

***Замечание* 1.** Теорема классифицирует физические структуры соответствующего ранга с точностью до сильной эквивалентности. Отметим, что примеры структур, для которых выполняются приведенные теоремы формулы, нетрудно построить на основе пространств строк (см. [20]), и, таким образом, теорема является содержательной.

Отметим, что формула (5) для биформы появлялась ранее как пример в работе А.А. Симонова [17].

Как было отмечено выше, вариант аксиоматики A2, A3, A4 (или A5), A6 является слабейшим из рассматривающихся в условии, поэтому нам достаточно доказать теорему только для него, причем мы можем считать выполненными сразу обе аксиомы A4, A5 как эквивалентные по модулю остальных.

1.3. Доказательство теорем

Мы предполагаем далее выполненными утверждения аксиом A2, A3, A4, A5, A6 (которые выполняются в любом из вариантов аксиоматики теоремы 3). Аксиома A1 прямо использоваться не будет.

1.3.1. Предварительные леммы

Отметим, что пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в условиях доказываемой теоремы симметричны. Поэтому, помимо каждого из сформулированных здесь утверждений, будет подразумеваться выполненным также и утверждение, получаемое из него перестановкой множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями (мы не будем формулировать их отдельно). Иногда мы будем называть такие утверждения дуальными.

В этом пункте не будет использоваться аксиома A3.

Далее всюду, где не оговорено противного, k предполагается произвольным целым числом от 1 до n.

Напомним сначала следующие утверждения, доказанные в [18] (при их доказательстве использовались лишь аксиомы A1-A6 и не использовалась определенная в [18] дополнительная аксиома A0).

Лемма 2. *Набор $U^k_{\mathcal{M}}$ содержит все функции $u_t : R^k \to R$, такие, что $\rho_t(r_1, \ldots, r_k) = r_t$ для любых $r_1, \ldots, r_k \in R$, $t = 1, \ldots, k$. Будем называть такие функции координатными.*

Далее мы закрепим обозначение ρ_t (t —целое) для координатных функций $R^k \to R$ (всюду, где это будет неочевидно, мы будем явно указывать k).

Лемма 3. *Пусть $\tau : R^k \to R^k$ — некоторая перестановка координат в декартовом произведении: для любых $r_1, \ldots, r_k \in R^k$ полагаем $\tau(r_1, \ldots, r_k) = (r_{\sigma(1)}, \ldots, r_{\sigma(k)})$, где $\sigma \in S_k$. Пусть $u \in U^k_{\mathcal{M}}$. Тогда $u \circ \tau \in U^k_{\mathcal{M}}$.*

Следующее утверждение (формулирующееся несколько более общим образом) показывает, что функции из наборов $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$ коммутируют между собой, при надлежащем понимании их суперпозиции.

Предложение 1. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий.*

1. *$(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$, $a_{pq} = \langle i_p, \alpha_q \rangle$, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$, и заданы некоторые функции: $u^* \in U^l_{\mathcal{N}}$; $u : R^k \to R$, определенная как $u = U_I[i]$ для некоторого $i \in [i_1, \ldots, i_k]$.*

2. *a_{pq}, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$ — произвольные элементы R, $u \in U^k_{\mathcal{M}}$, $u^* \in U^l_{\mathcal{N}}$.*

Тогда

$$u(u^*(a_{11}, \ldots, a_{1l}), \ldots, u^*(a_{k1}, \ldots, a_{kl})) = \\ = u^*(u(a_{11}, \ldots, a_{k1}), \ldots, u(a_{1l}, \ldots, a_{kl})).$$

Сформулируем еще следующие два тривиальных утверждения, связанных с понятием зависимости.

Лемма 4. *Если* $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$, $i'_1, \ldots, i'_l \in [i_1, \ldots, i_k]$, *то* $[i'_1, \ldots, i'_l] \subseteq [i_1, \ldots, i_k]$.

Лемма 5. $[z_1, \ldots, z_n] = \mathcal{M}$.

Следующие два утверждения связывают понятие зависимости с функциями из $U_\mathcal{M}$ на уровне дуальных координат.

Лемма 6. *Пусть элементы* $i_1, \ldots, i_k, i \in \mathcal{M}$ *имеют в базе* Ω *дуальные координаты* $(a_1^1, \ldots, a_1^m), \ldots, (a_k^1, \ldots, a_k^m)$, $(a^1, \ldots, a^m)$ *соответственно, и существует такая* $u \in U_\mathcal{M}^k$, *что* $a^t = u(a_1^t, \ldots, a_k^t)$, $t = 1, \ldots, m$. *Тогда* $i = V_I[u] \in [i_1, \ldots, i_k]$, *где* $I = (i_1, \ldots, i_k)$.

Отметим, что некоторые из исходных посылок следующих двух утверждений носят искусственный характер, но будут доказаны в дальнейшем при малых k.

Лемма 7. *Предположим, что для* $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$ *область значений оператора* U_I *лежит в* $U_\mathcal{M}^k$. *Пусть элементы* $i_1, \ldots, i_k, i \in \mathcal{M}$ *имеют в базе* Ω *дуальные координаты* $(a_1^1, \ldots, a_1^m), \ldots, (a_k^1, \ldots, a_k^m)$, $(a^1, \ldots, a^m)$ *соответственно, и при этом* $i \in [i_1, \ldots, i_k]$. *Тогда существует такая* $u \in U_\mathcal{M}^k$, *что* $a^t = u(a_1^t, \ldots, a_k^t)$, $t = 1, \ldots, m$ *(причем* $u = U_I[i]$*).*

Доказательство. Если $i \in [i_1, \ldots, i_k]$, то для $u = U_I[i] \in U_\mathcal{M}^k$ выполнено $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle i_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha \rangle)$ (для всех $\alpha \in \mathcal{N}$). Подставляя сюда $\alpha = \omega_1, \ldots, \omega_m$, получаем требуемое. ■

Дополнительное предположение, при котором будет выполняться следующее предложение 2, удобно будет сформулировать отдельно. Отметим, что это будет фактически несколько различных предположений, могущих быть сформулированными отдельно для каждого интересующего нас значения k.

Условие У1 Фиксируем k. Пусть $(i'_1, \ldots, i'_k) = I' \in \mathcal{M}^k$, $i_1, \ldots, i_k \in [i'_1, \ldots, i'_k] \subseteq \mathcal{M}$ независимы, $u_1 = U_{I'}[i_1], \ldots,\ u_k = U_{I'}[i_k]$. Тогда отображение $(u_1, \ldots, u_k) : R^k \to R^k$ (декартово произведение k отображений $R^k \to R$) биективно, и найдутся такие $u'_1, \ldots, u'_k \in U_\mathcal{M}^k$, что отображение $(u'_1, \ldots, u'_k) : R^k \to R^k$ является обратным к отображению $(u_1, \ldots, u_k)$.

Предложение 2. *Фиксируем* k, *для которого выполняется условие У1. Пусть* $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$ *независимы,* $i'_1, \ldots, i'_k \in \mathcal{M}$, $i_1, \ldots, i_k \in [i'_1, \ldots, i'_k]$. *Тогда* $[i_1, \ldots, i_k] = [i'_1, \ldots, i'_k]$.

Доказательство. Обозначим $(i'_1, \ldots, i'_k) = I'$, $u_1 = U_{I'}[i_1], \ldots,$ $u_k = U_{I'}[i_k]$. Тогда по условию У1 найдутся такие $u'_1, \ldots, u'_k \in U_\mathcal{M}^k$, что $(u_1, \ldots, u_k) \circ (u'_1, \ldots, u'_k) = \mathrm{id}$. Отсюда для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ получаем $\langle i'_p, \alpha \rangle = u'_p(u_1(\langle I', \alpha \rangle), \ldots, u_k(\langle I', \alpha \rangle)) = u'_p(\langle i_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha \rangle)$, $p = 1, \ldots, k$, что дает $i'_1, \ldots, i'_k \in [i_1, \ldots, i_k]$. Отсюда следует, согласно лемме 4, $[i'_1, \ldots, i'_k] \subseteq [i_1, \ldots, i_k]$, а из условия предложения и той же леммы — обратное включение. ■

Следствие 3.1. *Пусть для фиксированного k выполняется условие У1. Пусть $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$ независимы, $i \in \mathcal{M}$, $i_1, \dots, i_k, i$ — зависимы. Тогда $i \in [i_1, \dots, i_k]$.*

Доказательство. Из зависимости $i_1, \dots, i_k, i$ следует, что $i_1, \dots, i_k, i \in [i'_1, \dots, i'_k]$ для некоторых $i'_1, \dots, i'_k \in \mathcal{M}$. Тогда ввиду предложения 2 $[i_1, \dots, i_k] = [i'_1, \dots, i'_k]$, откуда и следует $i \in [i_1, \dots, i_k]$. ■

Для дальнейших рассуждений важным будет понятие нулей в множествах (далее для удобства восприятия мы будем также называть их пространствами, подразумевая этим наличие определяемой биформой структуры) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Будем называть элемент $i \in \mathcal{M}$ нулевым, вырожденным, или же просто нулем пространства $\mathcal{M}$, если $i \in [\emptyset]$, то есть, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$. Иными словами, нулевой элемент i пространства $\mathcal{M}$ — такой элемент, для которого функция $\langle i, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R$ постоянна (очевидно, постоянной в этом случае будет и функция $U[i]$). Аналогично определяются нулевые элементы пространства $\mathcal{N}$.

Отметим, что как в $\mathcal{M}$, так и в $\mathcal{N}$ может быть несколько различных нулевых элементов или не быть вовсе. Ненулевые элементы этих пространств будем называть также невырожденными. Заметим, что все элементы баз Z и Ω являются невырожденными - в противном случае утверждение аксиомы А2, очевидно, не выполнялось бы.

Пусть далее z_0 — некоторый нулевой элемент пространства $\mathcal{M}$, такой, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ $\langle z_0, \alpha \rangle = O$, где O — некоторый элемент R. Условия утверждений, сформулированных далее в этом пункте, предполагают наличие такого элемента.

Очевидно из определения, что $U[z_0]$ есть функция, тождественно равная нулевому элементу R.

Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть $u \in U^k_{\mathcal{M}}$ (здесь и далее этой записью подразумевается $0 \le k \le n$). Определим функцию $u' : R^l \to R$, $l \le k$ следующим равенством: $u'(r_1, \dots, r_l) = u(r_1, \dots, r_l, O, \dots, O)$ для всех $r_1, \dots, r_l \in R$. Тогда $u' \in U^l_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. $u' = u(P_l(U[z_1]), \dots, P_l(U[z_k]), P_l(U[z_0]), \dots, P_l(U[z_0]))$. Таким образом, $u' \in U^l_{\mathcal{M}}$, ввиду аксиомы А4. ■

Мы можем теперь ввести операторы $O^k_l : U^k_{\mathcal{M}} \to U^l_{\mathcal{M}}$, $0 \le l \le k \le n$, сопоставляющие каждой $u \in U^k_{\mathcal{M}}$ функцию $u' \in U^l_{\mathcal{M}}$, определенную как в лемме 8.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений нулевого элемента R и набора $U_{\mathcal{N}}$.

Лемма 9. *Пусть $u = U_{\mathfrak{A}}[a]$ для некоторых $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{N}^k$, $\alpha \in [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ (в частности, $u \in U^k_{\mathcal{N}}$). Тогда $u(O, \dots, O) = O$.*

Доказательство. По определению зависимости для всех $i \in \mathcal{M}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle i, \alpha_1 \rangle, \dots, \langle i, \alpha_k \rangle)$. Подставляя сюда $i = z_0$, получаем требуемое. ■

Для дальнейшего хода доказательства имеет принципиальное значение наличие или отсутствие нулей в пространствах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Мы получаем, таким образом, следующие четыре случая: «в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ есть нули», «в $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ нет нулей», «в $\mathcal{M}$ нет нулей, в $\mathcal{N}$ есть нуль», «в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ нет нулей».

Отметим, что второй и третий из этих случаев получаются друг из друга, если поменять ролями пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, поэтому нам далее достаточно будет подробно рассмотреть только один из них. Первый случай соответствует выполнению аксиомы A0 [18] и полностью разобран в [18]. Поэтому необходимо рассмотреть только два оставшихся случая. Для краткости изложения рассмотрим здесь только случай наличия нуля в одном из пространств и отсутствия в другом. Случай отсутствия нуля в обоих пространствах решается в аналогичной технике и разобран в препринте автора [20].

Относительно случая, когда $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ содержат нули, напомним утверждение из [?], которое будет полезно для нас в дальнейшем.

Предложение 3. *Определенное нами в аксиоматике физической структуры понятие зависимости отвечает линейной зависимости (принадлежности линейной оболочке) в векторных пространствах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.*

1.3.2. В $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ нет нуля

Обозначим нулевой элемент $\mathcal{M}$ как z_0, $\langle z_0, \Omega\rangle = (O,\ldots,O)$. Согласно аксиоме A2, в $\mathcal{N}$ найдется такой элемент $\omega_0 \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \omega_0\rangle = (O,\ldots,O)$. Мы будем ссылаться на него в дальнейшем. Отметим, что, поскольку в $\mathcal{N}$ нет нулей, элемент ω_0 будет невырожденным.

В дальнейших рассуждениях фиксируем произвольный элемент $e \in R$, $e \neq O$. Во всех доказываемых далее утверждениях неявно используется условие наличие нуля в $\mathcal{M}$ и отсутствия в $\mathcal{N}$.

Предложение 4. *Для любого $r \in R$ существует (очевидно, единственная) функция $u \in U^0_{\mathcal{M}}$, тождественно равная r.*

Доказательство. Фиксируем $r \in R$. Согласно аксиоме A3, существует элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \omega_0\rangle = r$. Возьмем $u = O^n_0(U[i])$. Поскольку $U[i](O,\ldots,O) = U[i](\langle Z, \omega_0\rangle) = \langle i, \omega_0\rangle = r$, функция u будет тождественно равна r. ■

Предложение 5. *Пусть $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\alpha' \in [\alpha]$. Тогда $\alpha' = \alpha$.*

Доказательство. Пусть функция $v : R \to R$ такова, что для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha'\rangle = v(\langle i, \alpha\rangle)$. Фиксируем i. Обозначим за u' постоянную функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$, равную $\langle i, \alpha\rangle$ (мы можем поднять соответствующую функцию из $U^0_{\mathcal{M}}$ до функции из $U^1_{\mathcal{M}}$ оператором L^1_0). Тогда, в силу предложения 1, $\langle i, \alpha'\rangle = v(\langle i, \alpha\rangle) = v(u'(\langle i, \alpha\rangle)) = u'(\langle i, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle$. Поскольку это выполняется для любого i, отсюда следует $\alpha = \alpha'$. ■

Следствие 3.2. *Тождественная функция является единственной функцией, лежащей в $U^1_{\mathcal{N}}$.*

Доказательство. Согласно предложению 5, $[\omega_1] = \{\omega_1\}$. Требуемое утверждение получается теперь непосредственно из определения $U^1_{\mathcal{N}}$, ■

Предложение 6. *Для любых $a_1, a_2, r_1, r_2 \in R$, $a_1 \neq a_2$ существует единственная $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(a_1) = r_1$, $u(a_2) = r_2$.*

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, O, \ldots, O)$, $(a_2, O, \ldots, O)$ соответственно. Ввиду предложения 5, если найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$, то $\alpha_1 = \alpha = \alpha_2$ — противоречие. Поэтому α_1, α_2 независимы. Возьмем, пользуясь аксиомой А3, $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha_1\rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2\rangle = r_2$. Возьмем $u = O^n_1(U[i])$. Тогда $u(a_1) = U[i](a_1, O, \ldots, O) = U[i](\langle Z, \alpha_1\rangle) = \langle i, \alpha_1\rangle = r_1$ и аналогично $u(a_2) = r_2$.

Пусть нашлись две функции $u, u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющие требованиям второго утверждения предложения. Возьмем $j \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, a_2, a_2, \ldots, a_2)$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, $\langle j, \omega_1\rangle \neq \langle j, \omega_2\rangle$ и j невырожден. Обозначим $i = V_{(j)}[u]$, $i' = V_{(j)}[u']$. Тогда $\langle i, \Omega\rangle = (r_1, r_2, r_2, \ldots, r_2) = \langle i', \Omega\rangle$, откуда, ввиду предложения 2, $i = i'$. Теперь $u(\langle j, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle = \langle i', \alpha\rangle = u'(\langle j, \alpha\rangle)$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, и поскольку, ввиду аксиомы А3, $\langle j, \alpha\rangle$ может принимать любые значения из R, $u = u'$. ■

Предложение 7. *Для любых $a_1, a_2, r \in R$, $a_1 \neq a_2$ существует единственная функция $u \in U^2_{\mathcal{N}}$, для которой $u(a_1, a_2) = r$.*

Доказательство. Докажем существование. Возьмем $i \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(a_1, a_2, a_2, \ldots, a_2)$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, он невырожден. Тогда найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle i, \alpha\rangle = r$. Пусть теперь $u = U[\alpha] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2, \ldots, \rho_2)$, где $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$ — координатные функции (см. предложение 7). Как суперпозиция функции из $U^m_{\mathcal{N}}$ с m функциями из $U^2_{\mathcal{N}}$, она будет, согласно аксиоме А4, принадлежать $U^2_{\mathcal{N}}$. При этом $u(a_1, a_2) = U[\alpha](a_1, a_2, \ldots, a_2) = \langle i, \alpha\rangle = r$, поэтому функция u удовлетворяет требуемым нами условиям.

Для доказательства единственности рассмотрим $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, \ldots, a_1)$, $(a_2, \ldots, a_2)$ соответственно. β_1, β_2 не равны, и значит, согласно предложению 5, независимы. Пусть $u, u' \in U^2_{\mathcal{N}}$ удовлетворяют условиям предложения. Обозначим $\alpha = V_{(\beta_1, \beta_2)}[u]$, $\alpha' = V_{(\beta_1, \beta_2)}[u']$. Тогда $\langle Z, \alpha\rangle = (r, \ldots, r) = \langle Z, \alpha'\rangle$, $\alpha = \alpha'$, откуда, как и раньше, когда мы доказывали единственность, $u = u'$. ■

Предложение 8. *Пусть $i \in \mathcal{M}$, $j \in [i]$. Тогда найдется такая $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $j = V_{(i)}[u]$.*

Доказательство. Обозначим $\langle i, \Omega\rangle = (a_1, \ldots, a_m)$, $\langle j, \Omega\rangle = (b_1, \ldots, b_m)$. В силу леммы 6 нам достаточно найти функцию $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $u(a_q) = b_q$, $q = 1, \ldots, m$.

Предположим сначала, что i невырожден, то есть не все $a_1, \ldots, a_m$ равны друг другу. Пусть s таково, что $a_s \neq a_1$. Тогда, согласно предложению 7, для $q = 2, \ldots, \hat{s}, \ldots, m$ найдутся такие функции $u^q \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $a_q = u^q(a_1, a_s)$. Пусть $v = U_{(i)}[j]$, то есть $\langle j, \alpha\rangle = v(\langle i, \alpha\rangle)$ для всех $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда при подстановке на место α элементов $\omega_1, \ldots, \omega_m$ получаем $b^t = v(a_t)$, $t = 1, \ldots, m$. Пользуясь предложением 1, получим теперь $b_q = v(a_q) = v(u^q(a_1, a_s)) = u^q(v(a_1), v(a_s)) = u^q(b_1, b_s)$, $q = 2, \ldots, \hat{s}, \ldots, m$.

В качестве u возьмем функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющую условиям $u(a_1) = b_1$, $u(a_s) = b_s$. Для $q = 2, \ldots, \hat{s}, \ldots, m$ теперь имеем в силу ранее доказанного : $u(a_q) = u(u^q(a_1, a_s)) = u^q(u(a_1), u(a_s)) = u^q(b_1, b_s) = b_q$, что нам и требовалось.

В случае вырожденного i элемент $j \in [i]$, очевидно, тоже вырожден, и в качестве u можно взять постоянную функцию. ■

Лемма 10. *Пусть $i' \in \mathcal{M}$, $i \in [i'] \subseteq \mathcal{M}$ невырожден, и $u = U_{(i')}[i]$ ($u \in U^1_{\mathcal{M}}$ по предложению 8). Тогда найдется такая $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $u \circ u' = \mathrm{id} : R \to R$. Иными словами, для $k = 1$ и пространства $\mathcal{M}$ выполняется условие У1.*

Доказательство. Обозначим $u(\langle i', \omega_q \rangle) = a_q$, $q = 1, \ldots, m$. Тогда $(a_1, \ldots, a_m) = (u(\langle i', \omega_1 \rangle, \ldots, \langle i', \omega_m \rangle)) = \langle i, \Omega \rangle$. Поскольку i невырожден, найдется такой индекс s, что $a_s \neq a_1$. Тогда, согласно предложению 6, можно построить функцию $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $u'(a_1) = \langle i', \omega_1 \rangle$, $u'(a_s) = \langle i', \omega_s \rangle$. Покажем, что u' удовлетворяет условиям леммы. Обозначим $u \circ u' = v$. Согласно аксиоме А4, $v \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $v(a_1) = a_1$, $v(a_s) = a_s$, что, ввиду утверждения единственности предложения 6, дает требуемое $v = \mathrm{id}$. ■

Следствие 3.3. *Пусть $u \in U^1_{\mathcal{M}}$. u не является тождественной функцией. Тогда u обратима, и обратная ей функция также лежит в $U^1_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. Беря $i' = z_1$ (он невырожден, например, в силу аксиомы А2), $i = V_{(z_1)}[u]$, мы получаем, что $u = U_{(i')}[i]$ и элементы i, i' удовлетворяют условиям леммы. Требуемое нам утверждение теперь следует из утверждения леммы. ■

Предложение 9. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Пусть $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда найдется такая $u \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $\alpha = V_{(\alpha_1, \alpha_2)}[u]$.*

Доказательство. Обозначим $\langle Z, \alpha \rangle = (b_1, \ldots, b_n)$, $\langle Z, \alpha_p \rangle = (a_{p1}, \ldots, a_{pn})$, $p = 1, 2$. Поскольку $\alpha_1 \neq \alpha_2$, найдется такой индекс s, что $a_{1s} \neq a_{2s}$. Обозначим за $u_q \in U^1_{\mathcal{M}}$, $q = 1, \ldots, \hat{s}, \ldots, n$ функции, заданные следующими соотношениями: $u_q(a_{1s}) = a_{1q}$, $u_q(a_{2s}) = a_{2q}$. Если $v = U_{(\alpha_1, \alpha_2)}[\alpha]$, то есть $\langle i, \alpha \rangle = v(\langle i, \alpha_1 \rangle, \langle i, \alpha_2 \rangle)$, для всех $i \in \mathcal{M}$, то при подстановке на место i элементов $z_1, \ldots, z_n$ получаем $b_t = v(a_{1t}, a_{2t})$, $t = 1, \ldots, n$. Тогда $b_q = v((a_{1q}, a_{2q}) = v(u_q(a_{1s}), u_q(a_{2s})) = u_q(v(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_s)$, $q = 1, \ldots, \hat{s}, \ldots, n$. Беря в качестве u функцию из $U^2_{\mathcal{N}}$, для которой $u(a_{1s}, a_{2s}) = b_s$, получаем теперь для $q \neq s$: $u(a_{1q}, a_{2q}) = u(u_q(a_{1s}), u_q(a_{2s})) = u_q(u(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_s) = b_q$, что, с учетом леммы 6, и дает нам требуемое. ■

Лемма 11. *Пусть $(\alpha'_1, \alpha'_2) = \mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^k$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha'_1, \alpha'_2] \subseteq \mathcal{N}$ независимы, $u_1 = U_{\mathfrak{A}'}[\alpha_1]$, $u_2 = U_{\mathfrak{A}'}[\alpha_2]$ ($u_1, u_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$ по предложению 9). Тогда отображение $(u_1, u_2) : R^2 \to R^2$ (декартово произведение двух отображений $R^2 \to R$) биективно, и найдутся такие $u'_1, u'_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$, что отображение $(u'_1, u'_2) : R^2 \to R^2$ является обратным к отображению (u_1, u_2). Иными словами, для $k = 2$ и пространства $\mathcal{N}$ выполняется условие У1.*

Доказательство. Обозначим $(u_1, u_2)(\langle z_q, \mathfrak{A}'\rangle) = (a_{1q}, a_{2q})$, $q = 1, \ldots, n$. Тогда $(a_{p1}, \ldots, a_{pn}) = (u_p(\langle z_1, \mathfrak{A}'\rangle), \ldots, u_p(\langle z_n, \mathfrak{A}'\rangle)) = (\langle z_1, \alpha_p\rangle, \ldots, \langle z_n, \alpha_p\rangle) = \langle Z, \alpha_p\rangle$, $p = 1, 2$.

Поскольку α_1, α_2 независимы, найдется такой индекс s, что $a_{1s} \neq a_{2s}$. Определим $u'_p \in U^2_{\mathcal{N}}$ равенством $u'_p(a_{1s}, a_{2s}) = \langle z_s, \alpha'_p\rangle$, $p = 1, 2$. Согласно аксиоме A4 $(u_1, u_2) \circ (u'_1, u'_2) = (v_1, v_2) : R^2 \to R^2$ для некоторых $v_1, v_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$. Покажем, что v_1, v_2 являются координатными функциями. Действительно, $v_p(a_{1s}, a_{2s}) = u_p(u'_1(a_{1s}, a_{2s}), u'_2(a_{1s}, a_{2s})) = u_p(\langle z_s, \alpha'_\rangle, \langle z_s, \alpha'_2\rangle) = a_{ps}$, $p = 1, 2$, по построению функций v_p. Поскольку координатные функции лежат в $U^2_{\mathcal{N}}$, отсюда следует, в силу единственности, что функции v_1, v_2 являются координатными и, значит, отображение (v_1, v_2) тождественно. ■

Лемма 12. *Пусть элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ имеют дуальные координаты $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$ соответственно. Тогда система $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима.*

Доказательство. Покажем, что $\omega_0 \notin [\alpha_1, \alpha_2]$. Действительно, в противном случае согласно лемме 7 (условие У1 выполняется ввиду леммы 11) нашлась бы такая функция $u \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $u(e, O) = O$, $u(O, e) = O$. Но из первого из этих условий, в силу утверждения единственности предложения 7, следует, что u совпадает со второй координатной функцией (поскольку координатные функции лежат в $U^2_{\mathcal{N}}$ и для второй координатной функции ρ_2 также выполнено $\rho_2(e, O) = O$). Аналогично из условия $u(O, e) = O$ следует, что u совпадает с первой координатной функцией — противоречие. Поскольку, ввиду предложения 5, α_1 и α_2 независимы, отсюда следует, согласно следствию 3.1 предложения 2, что система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. ■

Предложение 10. $m \geq 3$.

Доказательство. Предположим противное — $m = 2$. Тогда, согласно предложению 5, $\mathcal{N} = [\omega_1, \omega_2]$. Рассмотрим элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, имеющие дуальные координаты $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно. Согласно лемме 12, система $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. Но $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$ — противоречие. ■

Предложение 11. *Для любых $r_1, r_2, r_3 \in R$ существует единственная функция $u \in U^2_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(e, O) = r_1$, $u(O, e) = r_2$, $u(O, O) = r_3$.*

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$ соответственно. Согласно лемме 12, система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. Тогда мы можем выбрать $i \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i, \alpha_1\rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2\rangle = r_2$, $\langle i, \omega_0\rangle = r_3$. Функция $u = O^n_2(U[i])$, легко видеть, будет удовлетворять нашим требованиям.

Для доказательства единственности возьмем $j_1, j_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$ соответственно. Очевидно, j_2 невырожден. Заметим, что $j_1 \notin [j_2]$, так как в противном случае нашлась бы, согласно предложению 8 и лемме 7 (мы пользуемся также доказанным $m \geq 3$) , такая функция $v \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $v(O) = e$, $v(e) = O$, $v(O) = O$ — противоречие. Теперь ввиду следствия 3.1 предложения 2 (условие У1 выполнено по лемме 10), получаем, что j_1 и j_2 независимы. Если теперь $u, u' \in U^2_{\mathcal{M}}$ удовлетворяют условиям предложения, то для элементов $i = V_{(j_1,j_2)}[u]$, $i' = V_{(j_1,j_2)}[u']$ получаем $\langle i, \Omega\rangle = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_3) = \langle i', \Omega\rangle$, откуда $i = i'$, и, применяя для j_1, j_2, аксиому А3, как и в других доказательствах единственности, получаем $u = u'$. ■

Предложение 12. *Для любых $r_1, r_2 \in R$ существует единственная функция $u \in U^3_{\mathcal{N}}$, такая, что $u(e, O, O) = r_1$, $u(O, e, O) = r_2$.*

Доказательство. Докажем существование. Возьмем $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i_1, \Omega\rangle = (e, O, \dots, O)$, $\langle i_2, \Omega\rangle = (O, e, O, \dots, O)$. Как мы показали при доказательстве предложения 11, они независимы. Тогда найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle i_1, \alpha\rangle = r_1$, $\langle i_2, \alpha\rangle = r_2$. Возьмем $u = U[\alpha] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_3, \dots, \rho_3) \in U^3_{\mathcal{N}}$, где $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in U^3_{\mathcal{N}}$ — координатные функции. Как и в предыдущих случаях, легко проверяется, что она удовлетворяет нашим требованиям.

Для доказательства единственности рассмотрим элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$ соответственно. Для $u, u' \in U^3_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющих условиям предложения, обозначаем $\alpha = V_{(\alpha_1,\alpha_2,\omega_0)}[u]$, $\alpha' = V_{(\alpha_1,\alpha_2,\omega_0)}[u']$ и, применяя обычные рассуждения, получаем, что $i = i'$ и, ввиду независимости $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ (лемма 12), $u = u'$. ■

Отметим, что выше нами было доказано выполнение условия У1 для пространства $\mathcal{M}$ при $k = 1$ (лемма 10) и для пространства $\mathcal{N}$ при $k = 1, 2$ (следствие 3.2, лемма 11). Поэтому далее мы будем свободно ссылаться в соответствующих ситуациях на предложение 2 и его следствие 3.1.

Введем на R операцию умножения $\cdot$ следующим образом. Пусть $a, b \in R$. По предложению 6 найдется единственная функция $\varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $\varphi_a(e) = a$, $\varphi_a(O) = O$. Умножение в R определяется по отношению к функции φ_a так же, как и в случае наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$a \cdot b := \varphi_a(b), \quad \varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}} : \varphi_a(e) = a,\ \varphi_a(O) = O.$$

Введем на R операцию сложения следующим образом. Пусть $f \in U^2_{\mathcal{M}}$ — функция, существующая ввиду предложения 11, такая, что $f(e, O) = e$, $f(O, e) = e$, $f(O, O) = O$. Для $a, b \in R$ положим

$$a + b := f(a, b).$$

Покажем, что умножение на R можно ввести двойственным образом с помощью функций из $U_{\mathcal{N}}$. Пусть $a, b \in R$. По предложению 7 найдется единственная функция $\varphi^b \in U^2_{\mathcal{N}}$, такая, что $\varphi^b(e, O) = a$. Покажем, что

$$a \cdot b = \varphi^b(a, O).$$

Действительно, согласно предложению 1, $\varphi^b(a, O) = \varphi^b(\varphi_a(e), \varphi_a(O)) = \varphi_a(\varphi^b(e, O)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$.

Далее для произвольных $a, b \in R$ через φ_a, φ^b, f будут обозначаться определенные выше функции.

Предложение 13. *Алгебраическая система* $(R, +\cdot, O, e)$ *является телом.*

Доказательство. Покажем, что для всех $a \in R$ верно $e \cdot a = a \cdot e = a$. Ввиду утверждения единственности предложения 6, φ_e совпадает с тождественной функцией (очевидно, лежащей в $U^1_{\mathcal{M}}$), и потому $e \cdot a = \varphi_e(a) = a$. Что же касается функции $\varphi^e \in U^2_{\mathcal{N}}$, ввиду предложения 7 она совпадает с координатной функцией $\rho_1 \in U^2_{\mathcal{N}}$, для которой также $\rho_1(e, O) = e$, $\rho_1(O, O) = O$. Теперь вследствие двойственного определения умножения $a \cdot e = \varphi^e(a, O) = \rho_1(a, O) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Действительно, $a \cdot (b \cdot c) = \varphi_a(b \cdot c) = \varphi_a(\varphi_b(c)) = \varphi(c)$, где $\varphi = \varphi_a \circ \varphi_b \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $\varphi(e) = \varphi_a(\varphi_b(e)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$, $\varphi(O) = \varphi_a(\varphi_b(O)) = O$, откуда $\varphi = \varphi_{a \cdot b}$ и, по определению умножения, $\varphi(c) = (a \cdot b) \cdot c$, что нам и требовалось.

Покажем, что для всех $a \in R^*$ найдется единственный элемент $b \in R$, такой, что $a \cdot b = b \cdot a = e$. Функция φ_a обратима в $U^1_{\mathcal{M}}$ по следствию 3.3 леммы 10. Обозначим $\varphi_a^{-1} = \varphi$. Возьмем $b = \varphi(e)$. $\varphi(O) = O$ по построению, и из предложения 6 получаем $\varphi = \varphi_b$. Тогда $b \cdot a = \varphi(a) = e$.

Рассмотрим теперь такую (существующую, согласно предложению 7) функцию $\varphi' \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $\varphi(a, O) = e$, $\varphi(O, O) = O$. Обозначим $\varphi(e, O) = b'$, тогда, по предложению 7, $\varphi = \varphi^{b'}$, и $a \cdot b' = \varphi(a, O) = e$. Равенство $b = b'$ и единственность обратного элемента следуют теперь из ранее доказанных ассоциативности и свойства единицы.

Покажем, что для любых $a, b \in R$ выполняется $a + b = b + a$. Пусть $\tau : R^2 \to R^2$ — перестановка координат. Согласно лемме 3, $f' = f \circ \tau \in U^2_{\mathcal{M}}$. При этом $f'(e, O) = f(O, e) = e$, $f'(O, e) = e$, $f'(O, O) = O$. Тогда в силу предложения 11 $f' = f$. При этом $b + a = f(b, a) = f'(a, b)$, и потому $b + a = a + b$.

Покажем, что для всех $a \in R$ верно $a + O = a$. Обозначим $f' = O^2_1(f) \in U^1_{\mathcal{M}}$. Тогда $f'(e) = e$, $f'(O) = O$, и f' является тождественной функцией. Теперь $a + O = f(a, O) = f'(a) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a + b) + c = a + (b + c)$. Мы можем далее считать a отличным от O — в противном случае сразу получаем из уже доказанного $(O + b) + c = b + c = O + (b + c)$. Пусть $\beta \in \mathcal{N}$ таково, что $\langle z_1, \beta \rangle = a$, $\langle z_2, \beta \rangle = c$. Рассмотрим функцию $\varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $\varphi(a) = b$, $\varphi(O) = O$. Обозначим $j = V_{(z_1)}[\varphi] \in [z_1]$. Тогда $\langle j, \beta \rangle = \varphi(\langle z_1, \beta \rangle) = b$, $\langle j, \omega_0 \rangle = \varphi(\langle z_1, \omega_0 \rangle) = O$. Пусть $j_1 = V_{(z_1, j)}[f]$, $j_2 = V_{(j, z_2)}[f]$ — тогда $\langle j_1, \beta \rangle = a + b$, $\langle j_2, \beta \rangle = b + c$, $\langle j_1, \omega_0 \rangle = f(O, O) = O$, $\langle j_2, \omega_0 \rangle = O$. Наконец, пусть $i_1 = V_{(j_1, z_2)}[f]$, $i_2 = V_{(z_1, j_2)}[f]$. Тогда $\langle i_1, \omega_0 \rangle = \langle i_2, \omega_0 \rangle = O$,

$$\langle i_1, \beta \rangle = (a + b) + c\,, \quad \langle i_2, \beta \rangle = a + (b + c). \tag{6}$$

Отметим, что в силу леммы 4 и построения все элементы j, j_1, j_2, i_1, i_2 лежат в $[z_1, z_2]$. Рассмотрим элементы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathcal{E} \in \mathcal{N}^2$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$ соответственно. Обозначим $(\langle j, \mathcal{E} \rangle) = (x, y)$. По построению, $\langle i_1, \varepsilon_1 \rangle = f(\langle j_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle) = f(f(\langle z_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle j, \varepsilon_1 \rangle), \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle) = f(f(e, x), O) = f(e, x)$. Аналогично получаем $\langle i_1, \varepsilon_2 \rangle = f(f(O, y), e) = f(y, e)$, $\langle i_2, \varepsilon_1 \rangle = f(e, f(x, O)) = f(e, x)$, $\langle i_2, \varepsilon_2 \rangle = f(O, f(y, e)) = f(y, e)$. Таким образом, $\langle i_1, \mathcal{E} \rangle = \langle i_2, \mathcal{E} \rangle$. Обозначим $u_1 = U_{(z_1, z_2)}[i_1]$, $u_2 = U_{(z_1, z_2)}[i_2]$. Тогда

$u_1(e, O) = u_1(\langle z_1, \varepsilon_1\rangle, \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = \langle i_1, \varepsilon_1\rangle = \langle i_2, \varepsilon_1\rangle = u_2(e, O)$ и аналогично $u_1(O, e) = u_2(O, e)$. Кроме того, $u_1(O, O) = u_1(\langle z_1, \omega_0\rangle, \langle z_2, \omega_0\rangle = \langle i_1, \omega_0\rangle = O$ и аналогично $u_2(O, O) = O$. Тогда, в силу предложения 11, $u_1 = u_2$. Поэтому $\langle i_1, \beta\rangle = u_1(\langle z_1, \beta\rangle, \langle z_2, \beta\rangle) = u_2(\langle z_1, \beta\rangle, \langle z_2, \beta\rangle) = \langle i_2, \beta\rangle$, что, в силу равенств (6), и дает нам требуемую ассоциативность.

Покажем, что для каждого $a \in R$ найдется элемент $b \in R$, для которого $a + b = O$ (его единственность известным образом следует из ассоциативности и коммутативности сложения). Обозначим $z = V_{(z_1,z_2)}[f]$ Заметим, что z и z_1 независимы. Действительно, в противном случае, согласно следствию 3.1 предложения 2 , либо $z \in [z_1]$, либо z_1 вырожден. Последняя возможность, очевидно, исключена (например, ввиду аксиомы A2). Пусть $z \in [z_1]$. Возьмем такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha\rangle = O$, $\langle z_2, \alpha\rangle = e$. Тогда $\langle z_1, \alpha\rangle = \langle z_1, \omega_0\rangle$, откуда, согласно определению зависимости, $\langle z, \alpha\rangle = \langle z, \omega_0\rangle$, и $e = f(O, e) = \langle z, \alpha\rangle = \langle z, \omega_0\rangle = f(O, O) = O$ — противоречие, из которого следует, что z, z_1 независимы. Возьмем теперь такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha\rangle = a$, $\langle z, \alpha\rangle = O$. Обозначим $\langle z_2, \alpha\rangle = b$. Тогда $a + b = f(a, b) = f(\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_2, \alpha\rangle) = \langle z, \alpha\rangle = O$, что нам и требовалось.

Покажем левую дистрибутивность. Пусть $a, b, c \in R$. $c \cdot (a + b) = \varphi_c(f(a, b))$. Обозначим $u = \varphi_c \circ f \in U^2_{\mathcal{M}}$. Тогда $u(e, O) = \varphi_c(e) = c$, $u(O, e) = c$, $u(O, O) = O$. С другой стороны, $c \cdot a + c \cdot b = f(\varphi_c(a), \varphi_c(b)) = u'(a, b)$ для некоторой $u' \in U^2_{\mathcal{M}}$. При этом $u'(e, O) = f(c, O) = c$, $u'(O, e) = c$, $u'(O, O) = O$. Таким образом, в силу предложения 11, $u = u'$, что дает левую дистрибутивность.

Покажем правую дистрибутивность. $(a + b) \cdot c = \varphi^c(f(a, b), O)$. Преобразуем далее, пользуясь предложением 1: $\varphi^c(f(a, b), O) = \varphi^c(f(a, b), f(O, O)) = f(\varphi^c(a, O), \varphi^c(b, O)) = a \cdot c + b \cdot c$ — правая дистрибутивность доказана. ■

Пусть $f^* \in U^3_{\mathcal{N}}$ — функция, существующая по предложению 12, такая, что $f^*(e, O, O) = e$, $f^*(O, e, O) = e$. Покажем, что для любых $a, b \in R$

$$a + b = f^*(a, b, O).$$

Прежде всего покажем, что $f^*(a, O, O) = a$. Пусть $f' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{N}}$, где $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$ — координатные функции. Тогда $f'(e, O) = f^*(e, O, O) = e$ и $f' = \varphi^e$ ввиду предложения 7. Отсюда $f^*(a, O, O) = \varphi^e(a, O) = a \cdot e = a$. Аналогично, с помощью функции $f'' = f \circ (\rho_2, \rho_1, \rho_2)$, показывается $f^*(O, b, O) = b$. Теперь, согласно предложению 1, $f^*(a, b, O) = f^*(f(a, O), f(O, b), f(O, O)) = f(f^*(a, O, O), f^*(O, b, O)) = f(a, b) = a + b$.

Зададим на $\mathcal{M}$ операции сложения и домножения на элемент из R. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$. Положим по определению

$$i + j := V_{(i,j)}[f]; \qquad a \cdot i := V_{(i)}[\varphi_a].$$

В качестве нуля $\mathcal{M}$ (в смысле заданной структуры) возьмем z_0.

Для доказательства того, что введенные операции задают на $\mathcal{M}$ структуру векторного пространства, установим его изоморфизм (биекцию, сохраняющую операции и ноль) с левым векторным пространством строк длины m над R.

Согласно аксиомам A2 и A6, отображение $\pi^{\Omega} : \mathcal{M} \to R^m$ является биекцией. Очевидно, $\pi^{\Omega}(z_0) = (O, \ldots, O)$. Покажем, что π^W сохраняет операции. Для $i, j \in \mathcal{M}$ имеем в силу определения оператора $V_{(i,j)}$: $\langle (i+j), \Omega\rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \Omega\rangle = (f(\langle i, \alpha_1\rangle, \langle j, \alpha_1\rangle), \ldots, f(\langle i, \alpha_n\rangle, \langle j, \alpha_n\rangle)) = \langle i, \Omega\rangle + \langle j, \Omega\rangle$. Далее, если $a \in R$, то $\langle a \cdot i, \Omega\rangle = (\varphi_a(\langle i, \alpha_1\rangle), \ldots, \varphi_a(\langle i, \alpha_n\rangle)) = a \cdot \langle i, \Omega\rangle$, что нам и требуется.

Зададим теперь операции сложения и умножения на скаляр в $\mathcal{N}$ следующим образом. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, $a \in R$, $\varphi^a \in U^1_{\mathcal{N}}$ определена, как раньше. Положим

$$\alpha + \beta := V_{(\alpha,\beta,\omega_0)}[f]; \quad \alpha \cdot a := V_{(\alpha,\omega_0)}[\varphi^a]. \tag{7}$$

В качестве нуля $\mathcal{N}$ в смысле заданной структуры возьмем ω_0. Тогда биективное отображение $\pi^Z : \mathcal{N} \to R^n$ на векторное пространство строк длины n будет сохранять нуль и операции сложения и домножения на скаляр, задавая тем самым изоморфизм векторных пространств. Покажем это. Для $\alpha, \beta \in R$ имеем $\pi^Z(\alpha + \beta) = \langle Z, V_{(a,\beta,\omega_0)}[f]\rangle = (f(\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_1, \beta\rangle, \langle z_1, \omega_0\rangle, \ldots, f(\langle z_n, \alpha\rangle, \langle z_n, \beta\rangle, \langle z_n, \omega_0\rangle) = \langle Z, \alpha\rangle + \langle Z, \beta\rangle$ по определению сложения и поскольку $\langle Z, \omega_0\rangle = (O, \ldots, O)$. Аналогично для $a \in R$ получаем $\pi^Z(\alpha \cdot a) = (\varphi^a(\langle z_1, \alpha\rangle, O), \ldots, \varphi^a(\langle z_n, \alpha\rangle, O)) = \langle Z, \alpha\rangle \cdot a$. Сохранение нуля очевидно. Таким образом, доказано следующее.

Предложение 14. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенными операциями являются левым размерности m и правым размерности n соответственно, линейными пространствами над телом R (с нулями z_0 и ω_0 соответственно).*

Лемма 13. *Биформа $\langle,\rangle$ линейна слева на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $a \in R$, $\varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}}$ такова, что $\varphi_a(e) = a$. Тогда $\langle i+j, \alpha\rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \alpha\rangle = f(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle + \langle j, \alpha\rangle$ и аналогично $\langle a \cdot i, \alpha\rangle = \varphi_a(\langle i, \alpha\rangle) = a \cdot \langle i, \alpha\rangle$. ■

Определим подмножество $\overline{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\overline{\mathcal{M}} = \{i \in \mathcal{M} : \langle i, \omega_0\rangle = O\}.$$

Лемма 14. *$\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством коразмерности 1 в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \overline{\mathcal{M}}$, $a \in R$. Тогда, согласно определению операций на $\mathcal{M}$ и определению зависимости, а также доказанной нами линейности биформы по первому аргументу $\langle a \cdot i, \omega_0\rangle = \varphi_a(\langle i, \omega_0\rangle) = \varphi_a(O) = O$, $\langle i+j, \omega_0\rangle = f(\langle i, \omega_0\rangle, \langle j, \omega_0\rangle) = O$, откуда соответственно $a \cdot i \in \overline{\mathcal{M}}$ и $i + j \in \overline{\mathcal{M}}$. Мы показали, что $\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством.

Обозначим за z любой элемент $\mathcal{M}$, для которого $\langle z, \omega_0\rangle = e$ (он найдется по аксиоме A3). Тогда $R \cdot z + \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Действительно, пусть $i \in \mathcal{M}$. Обозначим $\langle i, \omega_0\rangle = r$. Тогда $\langle i - r \cdot z, \omega_0\rangle = \langle i, \omega_0\rangle - r \cdot \langle z, \omega_0\rangle = O$, откуда $i - r \cdot z \in \overline{\mathcal{M}}$, что и требовалось. Отсюда следует утверждение о коразмерности. ■

Лемма 15. *Биформа билинейна и невырождена на множестве аргументов $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$.*

Доказательство. Левая линейность доказана леммой 13. Покажем правую линейность. Пусть $i \in \overline{\mathcal{M}}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle i, \alpha + \beta \rangle = \langle i, V_{(\alpha,\beta,\omega_0)}[f] \rangle = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, \langle i, \omega_0 \rangle) = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, O) = \langle i, \alpha \rangle + \langle i, \beta \rangle$ и аналогично с домножением на элемент из R.

Невырожденность биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ слева тривиально следует из аксиомы невырожденности. Согласно теореме 1, это дает ее (двустороннюю) невырожденность. ■

Невырожденность биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ доказана, и мы получаем из теоремы 2, что размерности $\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{N}$ равны, то есть $m - 1 = n$.

Выберем теперь в $\overline{\mathcal{M}}$ и N дуальные базисы $z'_1, \ldots, z'_n$ и $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ соответственно. Рассмотрим также элемент $z_e \in \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{M}}$, такой, что $\langle z_e, \alpha \rangle = e$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ (такой элемент найдется в силу предложения 4: $z_e = V[u]$ для функции $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, тождественно равной e). Обозначим $(z'_1, \ldots, z'_n) = Z'$, $(\omega'_1, \ldots, \omega'_n, w_0) = \Omega'$. (Обозначаем также $\omega_0 = \omega'_{n+1}$).

Докажем выполнение формулы 3. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Обозначим $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Заметим, что

$$i = x_{n+1} \cdot z_e + i', \tag{8}$$

где $i' \in \overline{\mathcal{M}}$. Действительно, формула 8 означает просто, что $i' = i - x_{n+1} \cdot z_e$, и тогда $\langle i', \omega_0 \rangle = \langle i, \omega_0 \rangle - \langle x_{n+1} \cdot z_e, \omega_0 \rangle = x_{n+1} - x_{n+1} \cdot e = O$, откуда получаем нужное нам $i' \in \mathcal{M}$. Заметим, что для $k = 1, \ldots, n$ $\langle i', \omega'_k \rangle = \langle i, \omega'_k \rangle - \langle x_{n+1} \cdot z_e, \omega'_k \rangle = x_k - x_{n+1}$. Поскольку $\langle , \rangle$ билинейна на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, мы получаем из леммы 1 $\langle i', \alpha \rangle = \langle i', \omega'_1 \rangle \cdot \langle z'_1, \alpha \rangle + \ldots + \langle i', \omega'_n \rangle \cdot \langle z'_n, \alpha \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 +, \ldots, +(x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n$.

Теперь получаем, пользуясь левой линейностью биформы: $\langle i, \alpha \rangle = \langle x_{n+1} \cdot z_e, \alpha \rangle + \langle i', \alpha \rangle = x_{n+1} + (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n$, что и требовалось.

Покажем оставшиеся утверждения доказываемой теоремы для рассматриваемого случая.

Предложение 15. *Отображения* $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$, $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \to R^{n+1}$ *биективны.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что, согласно определению операций линейного пространства в $\mathcal{M}$, любая линейная комбинация элементов $z'_1, \ldots, z'_n$ лежит в $[z'_1, \ldots, z'_n]$, а поскольку $z'_1, \ldots, z'_n$ — линейный базис $\mathcal{M}$, то $[z'_1, \ldots, z'_n] = \mathcal{M}$. Тогда если для $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle Z', \alpha \rangle = \langle Z', \alpha' \rangle$, то и для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$, откуда $\alpha = \alpha'$. Это означает инъективность отображения $\langle Z', \cdot \rangle$. Аналогично, $[\omega'_1, \ldots, \omega'_n, \omega_0] = \mathcal{N}$, что дает инъективность отображения $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна слева, то и отображение $\langle \cdot, \Omega' \rangle$ (действующее из $\mathcal{M}$ в линейное пространство строк длины $n + 1$) линейно. При этом образы элементов $z'_1, \ldots, z'_n, z_e$, будучи строками вида $(e, O, \ldots, O), \ldots, (O, \ldots, O, e, O), (e, \ldots, e)$ соответственно, образуют базис пространства строк R^{n+1}, поэтому любая строка из R^{n+1} может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна справа на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$, а все $z'_1, \ldots, z'_n$ лежат в $\overline{\mathcal{M}}$, то и отображение $\langle Z', \cdot \rangle$ линейно. При этом образы элементов $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ образуют канонический базис пространства строк R^n, поэтому любая строка из R^n может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle Z', \cdot \rangle$. ■

Предложение 16. *$U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,a}_n(R)$, $U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s}_{n+1}(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = \{U_{Z'}[i] \,|\, i \in \mathcal{M}\}$, $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = \{U_{Z'}[i] \,|\, i \in \mathcal{M}\}$. Из аксиомы A5 следует $U^n_{\mathcal{M}} \subseteq \bar{U}^n_{\mathcal{M}}$, $U^m_{\mathcal{N}} \subseteq \bar{U}^m_{\mathcal{N}}$. Равенство $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = L^{l,a}_n(R)$ следует непосредственно из формулы 3 (в качестве коэффициентов функции $U_{Z'}[i]$ берутся $(x_1 - x_{n+1}), \ldots, (x_n - x_{n+1}), x_{n+1})$. Покажем, что $\bar{U}^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s}_{n+1}(R)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда $U_{\Omega'}[\alpha](x_1, \ldots, x_{n+1}) = \langle i, \alpha \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1} = x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n + x_{n+1}(-\xi_1 - \ldots - \xi_n + e)$. При этом коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_n, (-\xi_1 - \ldots - \xi_n + e)$ могут принимать любые значения, в сумме дающие e, откуда следует требуемое.

Мы получили $U^n_{\mathcal{M}} \subseteq L^{l,a}_n(R)$, $U^m_{\mathcal{N}} \subseteq L^{r,s}_{n+1}(R)$. Покажем, что справедливы обратные включения. Пусть $u \in L^{r,s}_{n+1}(R)$, $u(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_{n+1} \cdot a_{n+1}$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $\langle Z', \alpha \rangle = (\sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_1, \omega_k \rangle \cdot a_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_n, \omega_k \rangle \cdot a_k)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, обозначим $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Тогда, с учетом равенства $a_1 + \ldots + a_{n+1} = e$, получаем

$$\begin{aligned}
&\langle i, \alpha \rangle = \\
&= (x_1 - x_{n+1}) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_1, \omega_k \rangle \cdot a_k + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_n, \omega_k \rangle \cdot a_k + x_{n+1} = \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n+1} (\sum_{l=1}^{n} (x_l - x_{n+1}) \cdot \langle z'_l, \omega_k \rangle + x_{n+1}) \cdot a_k - = \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1} \cdot a_k + x_{n+1} = \\
&\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{n+1} \langle i, \omega_k \rangle \cdot a_k + O = u(\langle i, \Omega \rangle),
\end{aligned}$$

и мы получили, что $V[u] = \alpha$, что означает $u \in U^m_{\mathcal{N}}$. Таким образом, мы показали, что $L^{r,s}_{n+1}(R) \subseteq U^m_{\mathcal{N}}$.

Покажем теперь включение $L^{l,a}_n(R) \subseteq U^n_{\mathcal{M}}$. Пусть $u \in L^{l,a}_n(R)$, $u(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n + a_{n+1}$. Рассмотрим элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что

$$\langle i, \Omega' \rangle = (\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_1 \rangle + a_{n+1}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle + a_{n+1}).$$

Пусть $\alpha \in \mathcal{N}$, обозначим $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда

$$\langle i, \alpha\rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_1\rangle + a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle - a_{n+1}\right) \cdot \xi_1 + \ldots +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n\rangle + a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle - a_{n+1}\right) \cdot \xi_n +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle + a_{n+1} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\langle z_k, \omega'_1\rangle - \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle) \cdot \xi_1 + \ldots +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\langle z_k, \omega'_n\rangle - \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle) \cdot \xi_n + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle + a_{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\sum_{l=1}^{n} (\langle z_k, \omega'_l - \langle z_k, \omega'_{n+1}) \cdot \xi_l + \langle z_k, \omega'_{n+1}\rangle) + a_{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \alpha\rangle + a_{n+1} = u(\langle Z, \alpha\rangle),$$

и мы получаем, что $u \in U^n_{\mathcal{M}}$, как нам и требовалось. ■

Таким образом, все утверждения теоремы 3 в рассматриваемом случае доказаны.

Замечание 2. Из построения Z', Ω' следует, что для $k, l = 1, \ldots, n$ $\langle z'_k, \omega'_l\rangle = e$, если $k = l$, и $\langle z'_k, \omega'_l\rangle = O$, если $k \neq l$. Кроме того, $\langle Z', \omega'_{n+1}\rangle = \langle Z', \omega_0\rangle = (O, \ldots, O)$.

Отметим теперь, что случай наличия нуля в $\mathcal{N}$ и отсутствия в $\mathcal{M}$ получается из только что рассмотренного лишь перестановкой пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями. Тогда равенство $m = n+1$ переходит в $n = m+1$, формула (3) — в формулу (4), а множества $U^n_{\mathcal{M}}$ и $U^m_{\mathcal{N}}$ переходят друг в друга.

Литература

1. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраичесие структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Физматгиз, 1966. 556 с.
3. Ионин В.К. Абстрактные группы как физические структуры. // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып.135: Вычислительные системы. С. 40–43.
4. Ионин В.К. К определению физических структур. // Труды института математики. Новосибирск. 1992. Т. 21. С. 42–51.

5. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г.). Новосибирск: НГУ, 1968.
6. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, N. 1. С. 72–75.
7. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, N. 5. С. 985–987.
8. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, N. 3. С. 570–572.
9. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, N. 5. С. 1056–1058.
10. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, N. 4. С. 803–805.
11. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, N. 2. С. 284–288.
12. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур). // Докл. АН СССР. 1985. Т. 24, N. 1. С. 39–41.
13. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические струкутуры ранга (n+1,2). // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, N. 3. С. 132–143.
14. Михайличенко Г.Г. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии. // Изв. вузов. Математика. 1994. N. 4. С. 21–23.
15. Симонов А.А. Физическая структура ранга (3,2) на абстрактных множествах. // Материалы XXXV Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 22–24 апр. 1997 г.) Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. С. 100–101.
16. Симонов А.А. Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур. // Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М., 2004. 847 с. Приложение: с. 675–707.
17. Симонов А.А. О соответствии между почтиобластями и группами. // Алгебра и логика. 2006. N. 2. С. 239–251.
18. Фирдман И.А. Алгебраическая классификация физических структур с нулем. I. // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, N. 4(24). С. 131–148
19. Фирдман И.А. Алгебраическая классификация физических структур с нулем. II. Топологические аспекты. // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, N. 1(25). С. 135–146
20. Фирдман И.А. Алгебраическая теория биформ. Случай больших рангов. Препринт N. ВМ07-01. Омск, 2007. 73 с.