

ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО ЯДРА В МОДЕЛИ ЖИДКОЙ КАПЛИ

Р.С. Курманов, Г.Б. Тодер

В общем виде получено вариационное уравнение для поверхности ядра, на которой реализуется минимум энергии статической формы ядра. В варьируемом функционале учтены ядерная и кулоновская части энергии, а также дополнительные условия сохранения объема ядра и расстояния между центрами масс будущих осколков. Получено многомерное уравнение Эйлера-Лагранжа для профильной функции ядра с резким краем и кулоновской энергии, записанной в новой форме: $E_C = K_C \int (d\vec{S} d\vec{S}') \sigma$. Обсуждаются граничные условия. Показано, что в случае симметричного деления найденное уравнение сводится к известному вариационному уравнению, полученному В.М. Струтинским для аксиально-симметричных форм.

1. Введение

Расчет фигур равновесия ядер является очень важным в теории деления. Точность и правильность расчета непосредственно влияют на выводы, которые делаются для конкретных физических моделей, применяемых при вычислении вероятностей выходов различных продуктов реакций деления и слияния.

В модели жидкой капли (МЖК) при нахождении фигур равновесия ядер обычно используются прямые вариационные методы. Варьируются параметры, задающие форму поверхности ядра. Включение того или иного параметра в рассмотрение часто определяется авторским выбором способа параметризации уравнения поверхности.

В работах [1, 2] предложена последовательная физически обоснованная и математически корректная процедура введения параметров в МЖК и получено одномерное интегродифференциальное уравнение для аксиально-симметричных форм профильной функции деформированного ядра, развит [3] эффективный метод решения полученного уравнения, проведен систематический анализ найденных решений.

Однако в работах [1–3] варьировался функционал энергии только для аксиально-симметричных форм ядра с резким краем. Детально изучались только аксиально-симметричные формы поверхности ядра. Профильная функция ядра зависела только от одной переменной — координаты вдоль оси симметрии делящегося ядра.

Предложенный в работах [1, 2] подход

- состоит в получении уравнений Эйлера-Лагранжа из требования минимума функционала потенциальной энергии с дополнительными условиями сохранения объема и деформации атомного ядра;
- дает регулярный способ введения параметров описывающих форму делящегося ядра;
- приводит к задаче на расчет формы поверхности ядра, реализующей условный экстремум.

Цели нашей статьи: 1) сформулировать в рамках многомерного вариационного подхода задачу расчета формы произвольно деформированного ядра; 2) найти общий вид уравнений Эйлера-Лагранжа для функции, описывающей произвольную форму поверхности ядра с осколками равной массы; 3) рассмотреть случай ядра с резким краем и получить для этого случая уравнения Эйлера-Лагранжа с соответствующими граничными условиями; 4) в качестве проверки правильности формализма получить уравнение для профильной функции аксиально-симметричного ядра, совпадающее с полученными ранее в работах [1–3].

2. Функционал энергии и дополнительные условия

Запишем функционал потенциальной энергии в виде:

$$E = E_n + E_C, \quad (1)$$

где E_n — ядерная, а E_C — кулоновская энергия ядра, которые могут быть представлены в виде поверхностных интегралов (см., например, [4, 5]) по всей поверхности ядра.

Энергия ядерного взаимодействия имеет вид:

$$E_n = K_n \oint \left(d\vec{S}, \vec{F}_n(\vec{r}) \right), \quad (2)$$

где K_n — размерный множитель; $\vec{F}_n(\vec{r})$ — вектор-функция, описывающая ядерное взаимодействие.

Энергия кулоновского взаимодействия:

$$E_C = K_C \oint \left(d\vec{S}, \vec{F}_C(\vec{r}) \right), \quad (3)$$

где K_C — размерный множитель; $\vec{F}_C(\vec{r})$ — вектор-функция, описывающая кулоновское взаимодействие; $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор элемента $d\vec{S}$ поверхности ядра.

Отметим, что явный вид вектор-функций \vec{F}_n и \vec{F}_C зависит от выбора модели и математически неоднозначен [4, 5].

Выражение для объема ядра имеет вид:

$$V = \int dV = \frac{1}{3} \oint (d\vec{S}, \vec{r}) = \oint (d\vec{S}, \vec{P}_1). \quad (4)$$

Второе равенство в формуле (4) вытекает из теоремы Гаусса. Обозначение подинтегральной функции

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{3} \vec{r} \quad (5)$$

введено для удобства.

Расстояние между центрами масс будущих осколков деления запишем в следующей форме:

$$\rho = |\vec{\rho}| = \left| \frac{\int_{V_{right}} \vec{r} \rho_m dV}{M_{right}} - \frac{\int_{V_{left}} \vec{r} \rho_m dV}{M_{left}} \right|, \quad (6)$$

где вектор $\vec{\rho}$ соединяет центры масс будущих осколков; $\rho_m = M/V$ — плотность атомного ядра массой M и объемом V ¹; $M_{left} = \rho_m V_{left}$ и $M_{right} = \rho_m V_{right}$ — массы левого и правого будущих осколков ядра, пропорциональные их объемам $V_{left} = \varkappa V$ и $V_{right} = (1 - \varkappa)V$, по которым проводится интегрирование. Здесь \varkappa — константа, фиксирующая отношение объема левой части ко объему ядра. Смысл названий «левый» и «правый» для осколков станет ясен ниже.

Заметим, что общность результатов не теряется, а вычисления упрощаются, если выбрать систему координат так, чтобы одна из пространственных осей, например ось OZ , была направлена вдоль вектора $\vec{\rho}$ ², а перпендикулярная этой оси плоскость XOY делила ядро на две части, отвечающие двум будущим осколкам, — правую и левую — так, чтобы все точки, принадлежащие правой части ядра, имели координату $z > 0$, все точки, принадлежащие левой части, имели координату $z < 0$ (рис. 1).

В такой системе координат поверхность ядра³ задается функцией $z = z(x, y)$, а выражение (6) принимает следующий вид:

$$\rho = \left| \frac{\int_{V_{right}} z \rho_m dV}{M_{right}} - \frac{\int_{V_{left}} z \rho_m dV}{M_{left}} \right|. \quad (7)$$

¹Как это обычно принято при изучении рассматриваемой модели, в данной работе плотность ядра считается постоянной вследствие слабой сжимаемости ядерного вещества.

²Это означает, что ось OZ направлена вдоль линии, соединяющей центры масс будущих осколков.

³Поверхность ядра в представляемом рассмотрении считается односвязной.

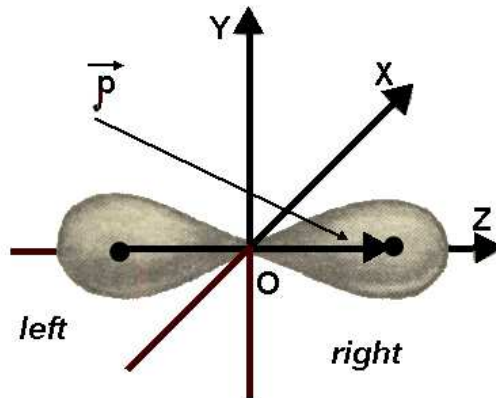


Рис. 1. Выбор системы координат

Используя теорему Гаусса, преобразуем правую часть равенства (7) к поверхностному интегралу:

$$\rho = \oint (d\vec{S}, \vec{P}_2), \quad (8)$$

в котором для подынтегральной функции введено специальное обозначение:

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{4} \frac{\theta(z)\vec{r}z}{\varkappa V} - \frac{1}{4} \frac{\theta(-z)\vec{r}z}{(1-\varkappa)V}, \quad (9)$$

где $\theta(z)$ - ступенчатая функция.

Требование сохранения объема и расстояния между центрами масс будущих осколков приводит к вариационной задаче на условный экстремум.

3. Общее вариационное уравнение

Следуя Струтинскому и др. [1], дополним задачу определения экстремальных форм поверхности ядра условиями постоянства объема и расстояния между центрами масс будущих осколков, тогда вариационная задача становится задачей на экстремум следующего функционала:

$$I = E_n + E_C + \lambda_1 V + \lambda_2 \rho, \quad (10)$$

где λ_1 и λ_2 — неопределенные лагранжевы множители.

Запишем функционал I в виде поверхностного интеграла

$$I = \oint (d\vec{S}, \vec{F}), \quad (11)$$

где вектор-функция \vec{F} с учетом (2), (3),(4) и (8) имеет следующую структуру:

$$\vec{F} = K_n \vec{F}_n + K_C \vec{F}_C + \lambda_1 \vec{P}_1 + \lambda_2 \vec{P}_2. \quad (12)$$

Элемент поверхности в формуле (11) может быть записан как⁴ [7]:

$$d\vec{S} = dS \vec{n} = (\vec{k} - z_x \vec{i} - z_y \vec{j}) dx dy, \quad (13)$$

где \vec{n} — нормаль к поверхности;

$$dS = dx dy \sqrt{g} \quad - \quad (14)$$

модуль элемента поверхности;

$$g = 1 + z_x^2 + z_y^2 \quad - \quad (15)$$

метрика, индуцированная на поверхности.

Записывая интеграл (11) с учетом выражения (13), предварительно разбив всю поверхность ядра на части, однозначно проектируемые на плоскость XOY , получаем:

$$I = \sum \int \int dx dy G(z, z_x, z_y, x, y), \quad (16)$$

где сумма берется по всем областям интегрирования в плоскости XOY ;

$$G(z, z_x, z_y, x, y) = F_z - z_x F_x - z_y F_y; \quad (17)$$

F_x, F_y, F_z — проекции вектора \vec{F} (12) на соответствующие оси.

Стандартная процедура варьирования [7] функционала (16) приводит к следующему общему виду вариационного уравнения Эйлера-Лагранжа⁵, которое является уравнением в частных производных на функцию $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial G}{\partial z_y} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) справедливо для каждой из частей, на которые разбита поверхность ядра. Для нахождения функции $z = z(x, y)$, описывающей всю поверхность делящегося ядра, используются (в качестве граничных) условия гладкого сшивания на граничных контурах решений в различных областях поверхности.

⁴Нижний индекс у функции $z = z(x, y)$ или любой другой координаты будет означать ее производную по соответствующей переменной. Например, z_x — производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x ; z_{xy} — вторая производная функции $z = z(x, y)$ по переменным x и y .

⁵Интегралы по границам областей возникают при варьировании попарно, но с противоположными знаками. Поэтому их суммарный вклад в вариацию функционала (16) равен нулю.

4. Симметричное деление ядра в МЖК с резким краем

Рассмотрим модель жидкой капли с резким краем. В этом случае подынтегральная вектор-функция для ядерной энергии (2) имеет вид:

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \vec{n}, \quad (19)$$

а ядерная часть энергии вычисляется по формуле:

$$E_n = K_n \oint \left(d\vec{S}, \vec{n} \right) = K_n \oint dS = K_n \oint dx dy \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \quad (20)$$

и оказывается пропорциональной площади поверхности ядра (см., например, [1]).

Подставим кулоновский функционал в форме

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = \oint d\vec{S}' \sigma, \quad (21)$$

полученной в работе [6], в (3), тогда кулоновская энергия вычисляется по формуле:

$$E_C = K_C \oint \oint \left(d\vec{S}, d\vec{S}' \right) \sigma, \quad (22)$$

где

$$\sigma = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (23)$$

расстояние между элементами поверхностей $d\vec{S}$ и $d\vec{S}'$, задаваемыми радиусами-векторами \vec{r} и \vec{r}' соответственно.

Рассмотрим симметричное деление, т.е. деление на два осколка равной массы $M_{left} = M_{right} = 0,5M$ и одинакового объема $V_{left} = V_{right} = 0,5V$ ($\varkappa = 0,5$). В этом случае, введя модуль $|z|$, можно объединить интегралы в числителе правой части выражения (7), которое станет более компактным:

$$\rho = \left[\frac{\int_{V_{right}} z \rho_m dV - \int_{V_{left}} z \rho_m dV}{0,5M} \right] = \left[\frac{\int |z| \rho_m dV}{0,5M} \right] = \left[\frac{\int |z| dV}{0,5V} \right]. \quad (24)$$

Используя теорему Гаусса, преобразуем правую часть равенства (24) к поверхностному интегралу:

$$\rho = \frac{1}{2} \oint (d\vec{S}, \vec{r}) \frac{|z|}{V} = \oint (d\vec{S}, \vec{P}_2), \quad (25)$$

в котором для подынтегральной функции введено специальное обозначение:

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{2} \frac{\vec{r} |z|}{V}. \quad (26)$$

Подставив выражения (20), (22) с учетом формулы (23) в общее вариационное уравнение (18), получим уравнение Эйлера-Лагранжа в виде:

$$K_n \left\{ \frac{z_{xx} + z_{yy} + z_{xx}z_yz_y + z_{yy}z_xz_x - 2z_{xy}z_xz_y}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} \right\} + K_C \oint dx'dy' \left\{ \frac{-(z - z') + z'_{x'}(x - x') + z'_{y'}(y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right\} + \lambda_1 + \lambda_2|z| = 0. \quad (27)$$

Заметим, что в отсутствие кулоновского взаимодействия ($K_C = 0$) и дополнительных условий ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$) уравнение (27) сводится к известному вариационному уравнению минимальных поверхностей [7]. Такой результат является естественным, т.к. энергия поверхностного натяжения стремится уменьшить площадь поверхности.

5. Аксиально-симметричное ядро

Покажем, что уравнение, полученное в работах [1, 2] для аксиально-симметричной формы ядра, является частным случаем уравнения (27).

Предварительно (вследствие цилиндрической симметрии задачи) удобно перейти к полярным координатам (ρ, ϕ, z) ⁶ и задавать поверхность ядра функцией:

$$z = z(\sqrt{x^2 + y^2}) = z(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус.

Используемые для вычислений производные в полярной системе координат имеют вид:

$$z_x = z_\rho \cos \phi; \quad z_y = z_\rho \sin \phi; \quad z_{xx} = z_{\rho\rho} \cos^2 \phi + z_\rho \sin^2 \phi / \rho; \quad (28)$$

$$z_{yy} = z_{\rho\rho} \sin^2 \phi + z_\rho \cos^2 \phi / \rho; \quad z_{xy} = (z_{\rho\rho} - z_\rho / \rho) \cos \phi \sin \phi. \quad (29)$$

Подставив производные (28), (29) в первое слагаемое правой части формулы (27), после упрощения получим:

$$\frac{z_{xx} + z_{yy} + z_{xx}z_yz_y + z_{yy}z_xz_x - 2z_{xy}z_xz_y}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} = \frac{z_{\rho\rho} + z_\rho / \rho + z_\rho^3 / \rho}{(1 + z_\rho^2)^{3/2}}.$$

Запишем второе слагаемое в уравнении (27) в полярной системе координат, тогда

$$\oint dx'dy' \left\{ \frac{-(z - z') + z'_{x'}(x - x') + z'_{y'}(y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right\}$$

⁶ Декартовы (x, y, z) и полярные координаты связаны стандартными формулами: $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$.

$$= \oint \rho' d\rho' d\phi' \left\{ \frac{-(z - z') + z'_{\rho'}(\rho \cos(\phi - \phi') - \rho')}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2)^{1/2}} \right\} = \Phi(z, \rho),$$

где $z = z(\rho)$; $z' = z'(\rho')$; обозначение $\Phi(z, \rho)$ введено для удобства.

Теперь вариационное уравнение на профильную функцию ядра выглядит следующим образом:

$$K_n \frac{(z_{\rho\rho} + z_{\rho}/\rho + z_{\rho}^3/\rho)}{(1 + z_{\rho}^2)^{3/2}} + K_C \Phi(z, \rho) + \lambda_1 + \lambda_2 |z| = 0. \quad (30)$$

Это интегро-дифференциальное уравнение на профильную функцию $z = z(\rho)$.

Так как используется аксиальная симметрия задачи (ось симметрии является OZ), удобнее искать зависимость $\rho = \rho(z)$, а не $z = z(\rho)$. Для этого в уравнении (30) заменим производные функции $z = z(\rho)$ производными функции $\rho = \rho(z)$:

$$z_{\rho} = \frac{1}{\rho_z}; \quad z_{\rho\rho} = -\frac{\rho_{zz}}{\rho_z^3}. \quad (31)$$

Подставляя в равенство (30) выражения (31) и упрощая получившееся соотношение, приходим к уравнению:

$$-\rho_{zz}\rho + 1 + \rho_z^2 + \frac{\rho}{K_n}(1 + \rho_z^2)^{3/2}(K_C \Phi(z, \rho) + \lambda_1 + \lambda_2 |z|) = 0. \quad (32)$$

Отличие уравнения (32) от найденных в работах [1]– [3] состоит только в обозначениях и виде функции $\Phi(z, \rho)$, выражающей кулоновский потенциал на поверхности.

Если кулоновскую энергию записать в форме:

$$E_C = K_C \oint \oint (d\vec{S}, d\vec{S}') \sigma, \quad (33)$$

использованной в этих работах, то вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа (32) будет с точностью до обозначений совпадать с вариационными уравнениями, полученными в [1–3].

Это соответствие доказывает правильность предложенного в настоящей работе общего подхода к получению многомерных уравнений Эйлера-Лагранжа на основе стандартной многомерной вариационной задачи, позволяющего рассчитывать форму и потенциальную энергию произвольно деформированного ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Струтинский В.М., Лященко Н.Я., Попов. Н.А. Симметричные фигуры равновесия в модели ядра с резкой поверхностью (капельная модель) // ЖЭТФ. М. 1962. Т. 43. С. 584–594.

-
2. Stutinsky V.M., Lyashchenko N.Ya., Popov N.A. Symmetrical shapes of equilibrium for a liquid drop model // Nucl. Phys. 1963. V. 46. P. 639–659.
 3. Иванюк Ф.А. Определение равновесных форм ядер в модели жидкой капли с ограничениями. Препринт КИЯИ-86-44. Киев: ИЯИ АН УССР, 1986. 38 с.
 4. Курманов Р.С., Косенко Г.И. Новый метод расчета потенциальной энергии деформированных ядер в модели жидкой капли // ЯФ. 2004. Т. 67, N. 11. С. 1–7.
 5. Sierk A.J. Macroscopic model of rotation nuclei / Phys.Rev. 1986. N. 33. P. 2039–2053.
 6. Курманов Р.С., Косенко Г.И., Адеев Г.Д. Новая формула для вычисления кулоновской энергии в модели жидкой капли // ЯФ. 2000. Т. 63. N. 11. С. 1978–1981.
 7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М. Наука. 1986. 761 с.