Математические структуры и моделирование
2009, вып. 19, с. 5–18

УДК 519.214.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь

It is received an asymptotic expansion with a member of an order n^{-1} in the central limit theorem for stationary sequences with uniform strong mixing.

1. Введение. Формулировки основных результатов

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть

$$\mathbf{E}\xi_1 = 0,\ \mathbf{E}\xi_1^2 < \infty,\ T_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j,\ \sigma_n^2 = \mathbf{D}T_n \to \infty,\ n \to \infty,$$

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{T_n < x\sigma_n\}, \quad \Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt,$$

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

Для последовательностей слабо зависимых величин оценки скорости стремления Δ_n к нулю последовательно улучшались на протяжении более чем тридцати лет, пока наконец Е.Рио в [1] не получил неулучшаемую по порядку оценку $\Delta_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$ для последовательностей ограниченных величин с равномерно сильным перемешиванием (φ–перемешиванием).

Настоящая работа посвящена дальнейшему уточнению центральной предельной теоремы для сумм слабо зависимых случайных величин. Выделен класс последовательностей $\{\xi_n\}$ (так называемые последовательности с симметричным распределением), для которых при экспоненциально быстром φ–перемешивании $\mathbf{E}|\xi_1|^5 < \infty$ и

$$\limsup_{t\to\infty} |\mathbf{E}\exp\{it\xi_1\}| < 1, \tag{1}$$

доказан аналог асимптотического разложения Эссеена в центральной предельной теореме (см., например [2, гл.5, теорема 20]). Из этого разложения (см. теорему 1), в частности, следует, что $\Delta_n = O(n^{-1})$.

Омский государственный университет.
E-mail: `griniran@gmail.com`
Работа поддержана грантом РФФИ 06–01–00127.

2. Последовательности с симметричным распределением

Пусть $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – случайный вектор, δ – отображение множества $\{1, 2, ..., n\}$ в множество $\{-1, 1\}$, то есть $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n), \delta_k = \pm 1,\ k = 1, 2, ..., n$, и пусть $\Delta = \{\delta\} = \{-1, 1\}^{\{1,2,...,n\}}$. Обозначим $\delta * \xi = (\delta_1 \xi_1, ..., \delta_n \xi_n)$. Распределение вектора ξ будем называть симметричным, если все векторы $\delta * \xi,\ \delta \in \Delta$ имеют одинаковое распределение. Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ имеет симметричное распределение, если все ее конечномерные распределения симметричны.

Простейшим примером последовательности с симметричным распределением является последовательность независимых одинаково распределенных величин с симметричными распределениями.

Введем характеристическую функцию вектора ξ :

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(t_1, ..., t_n) = \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{n} t_k \xi_k \right\}.$$

Будем использовать обозначение $\xi \overset{d}{=} \eta$ в случае, когда распределения случайных векторов ξ и η совпадают, и $\{\xi_n\} \overset{d}{=} \{\eta_n\}$, когда совпадают конечномерные распределения последовательностей $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$.

Лемма 1. *Следующие условия эквивалентны:*

a) последовательность $\{\xi_n\}$ имеет симметричное распределение;

b) при любом натуральном n и любых действительных $t_1, ..., t_n$

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(t_1, ..., t_n) = \mathbf{E} \prod_{k=1}^{n} \cos(t_k \xi_k); \tag{2}$$

c) $\{\xi_n\} \overset{d}{=} \{\varepsilon_n \xi_n\}$, где $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, таких, что

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -1\} = \frac{1}{2}$$

и последовательность случайных величин $\{\varepsilon_n\}$ не зависит от $\{\xi_n\}$.

Доказательство достаточно прозрачно и здесь не приводится.

З а м е ч а н и е 1. Если $\{\xi_n\}$ – стационарная последователность, удовлетворяющая условию РСП с коэффициентом $\varphi(n)$, а $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность, определенная в пункте c) леммы 1, то последовательность $\{\varepsilon_n \xi_n\}$ также удовлетворяет условию РСП с коэффициентом $\varphi_1(n) \le \varphi(n)$ [3].

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно убедиться, что если $\{\xi_n\}$ – последовательность с симметричным распределением, то при каждом натуральном p последовательность $\left\{ \sum_{l=1}^{p} \xi_{(j-1)p+l}, j = 1, 2, ... \right\}$ также имеет симметричное распределение.

Лемма 2. *Если* $\{\xi_n\}$ *– стационарная последовательность с симметричным распределением и* $\mathbf{E}|\xi_1|^4 < \infty$, *то*

a) $\mathbf{E}T_n = 0,\ \mathbf{E}T_n^3 = 0,\ n = 1, 2, ...;$

b) $\sigma_n^2 = \mathbf{D}T_n^2 = n\sigma_1^2,\ n = 1, 2, ...;$

c) $\mathbf{E}T_n^4 = n\mathbf{E}\xi_n^4 + 6 \sum\limits_{1\le i<j\le n} \mathbf{E}\xi_i^2\xi_j^2,\ n = 1, 2, ...$

Утверждения леммы являются следствием симметричности распределений величин $\xi_j, \xi_j\xi_k), \xi_j, \xi_k^3,\ j \ne k$.

3. Вспомогательные результаты

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – стационарная последовательность. Обозначим через $\mathcal{F}_{\le n}$ и $\mathcal{F}_{\ge n}$ σ–алгебры, порожденные, соответственно, семействами $\{\xi_k : k \le n\}$ и $\{\xi_k : k \ge n\}$.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{\xi_n\}$ *удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания* (*φ–перемешивания*) *с коэффициентом перемешивания* $\varphi(n)$ *и пусть случайные величины* ξ *и* η *измеримы относительно* $\mathcal{F}_{\le 0}$ *и* $\mathcal{F}_{\ge n}$ *соответственно,*

$$\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \|\eta\|_q < \infty, \quad p > 1,\ q > 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Тогда при любых комплексных a *и* b

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \le 2\varphi^{\frac{1}{p}}(n)\|\xi - a\|_p\|\eta - b\|_q. \tag{3}$$

Если же

$$\|\xi\|_1 = \mathbf{E}|\xi| < \infty,\ \|\eta\|_\infty = \mathrm{vrai}\sup|\eta| \le \infty,$$

то

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \le 2\varphi(n)\|\xi - a\|_1\|\eta - b\|_\infty. \tag{4}$$

Доказательство леммы легко получается, например, из теоремы 17.2.3 в [4] или из [5, с. 236].

Лемма 4. *Пусть последовательность* $\{\xi_n\}$ *удовлетворяет* φ*–перемешивания,* $\sigma_n \to \infty,\quad n \to \infty$ *и пусть* $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty,\ p > 2$. *Тогда* $\|T_n\|_p \le C(p)\,\sigma_n$, *где* $0 < C(p) < \infty$ *не зависит от* n.

При $2 < p < 3$ утверждение леммы доказано в [4, теорема 18.5.1], в общем случае оно следует, например, из теоремы 1.1 в [6].

Обозначим $\gamma_k(\xi)$ k–й семиинвариант случайной величины ξ.

Лемма 5. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *–стационарная последовательность с симметричным распределением, пусть* $\mathbf{E}|\xi_1|^4 < \infty$. *Тогда*

a) $\gamma_1(T_n) = 0,\ \gamma_3(T_n) = 0,\ n = 1, 2, ...;$

b) $\gamma_2(T_n) = n\sigma_1^2,\quad n = 1, 2, ...;$

c) Если $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) < \infty$, *то*

$$\gamma_4 = \gamma_4(\xi_1) + 6 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\left(\xi_0^2 - \mathbf{E}\xi_0^2\right)\left(\xi_k^2 - \mathbf{E}\xi_k^2\right) < \infty.$$

Если же $\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi^{\frac{1}{2}}(k) < \infty$, *то*

$$\sup_n |\gamma_4(T_n) - n\gamma_4| \le C < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как в наших предположениях $\gamma_k(T_n) = \mathbf{E}T_n^k,\ k = 1, 2, 3$, то утверждения a) и b) следуют из соответствующих утверждений леммы (2). Обозначим $\rho_k = \mathbf{E}\left(\xi_0^2 - \mathbf{E}\xi_0^2\right)\left(\xi_k^2 - \mathbf{E}\xi_k^2\right)$. В силу леммы 3 $|\rho_k| \le 2\left\|\xi_0^2 - \mathbf{E}\xi_0^2\right\|_2^2 \varphi^{\frac{1}{2}}(k)$, откуда следует первое утверждение пункта c) леммы. С учетом утверждений b) и c) леммы (2) получаем

$$\gamma_4(T_n) = \mathbf{E}T_n^4 - 3\left(\mathbf{E}T_n^2\right)^2 = n\mathbf{E}\xi_n^4 + 6 \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{E}\xi_i^2\xi_j^2 - 3n^2\sigma_1^4 =$$

$$= n\mathbf{E}\xi_1^4 - 3n\sigma_1^4 + 6 \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{E}\left(\xi_i^2 - \mathbf{E}\xi_i^2\right)\left(\xi_j^2 - \mathbf{E}\xi_j^2\right) =$$

$$= n\gamma_4(\xi_1) + 6\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\rho_k.$$

Отсюда

$$|\gamma_4(T_n) - n\gamma_4| \le 6n \sum_{k=n}^{\infty} |\rho_k| + 6\sum_{k=1}^{n-1} k|\rho_k| \le$$

$$\le 12\left\|\xi_0^2 - \mathbf{E}\xi_0^2\right\|_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\varphi^{\frac{1}{2}}(k) < \infty.$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$, а n и p – натуральные числа. Обозначим

$$Q_j = {\sigma_n}^{-1} \sum_{l=1}^{p} \xi_{(j-1)p+l}, \quad j = 1, 2, ... \tag{5}$$

$$f_r(t) = \mathbf{E}\exp\left\{it\sum_{j=1}^{r} Q_j\right\},\ r = 1, 2, ...$$

Введем функцию

$$F_k(z) = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{k}\left(f_1 + z\left(\exp\left\{itQ_j\right\} - f_1\right)\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} z^m f_1^{k-m} \mathbf{E} S_m(X_1, ..., X_k),$$

где $f_1 = f_1(t),\ X_j = \exp\{itQ_j\} - f_1,\ j = 1, ..., k$, а

$$S_0(x_1, ..., x_k) = 1, \quad S_m(x_1, ..., x_k) = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_m \le k} x_{j_1} ... x_{j_k} -$$

– m-й элементарный симметрический многочлен. Из формулы Тейлора для функции $F_k(z)$ (см.,например, [7, с. 67]) получаем при $l < k$

$$f_k(t) = F_k(1) = f_1^k + f_1^{k-1} \mathbf{E} S_1(X_1, ..., X_k) +$$

$$+ f_1^{k-2} \mathbf{E} S_2(X_1, ..., X_k) + ... + f_1^{k-l} \mathbf{E} S_l(X_1, ..., X_k) + R_l, \tag{6}$$

где

$$R_l = R_l(X_1, ..., X_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{F_k(z)\, dz}{(z-1)\, z^{l+1}}, \quad |\rho| > 1. \tag{7}$$

Пусть $g_l = \mathbf{E} X_1 ... X_l,\ l \ge 1,\ \beta^2 = \mathbf{E}|X_1|^2 = 1 - |f_1|^2$.

В дальнейшем будем обозначать через $\theta_i = \theta_i(t, n, ...),\ i = 1, 2, , ...$ - ограниченные величины, (т.е. $\sup\limits_{t,n,...} |\theta_i(t, n, ...)| < \infty$); если $g(t, n, ...) \le ch(t, n, ...)$, где $c \ge 0$ не зависит от $t, n, ...$, то будем писать $g \ll h$, а $g \asymp h$ будет обозначать, что $g \ll h$ и $h \ll g$.

Лемма 6. *1. Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ–перемешивания с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, то*

a) $\mathbf{E} S_1(X_1, ..., X_k) = 0$;

b) $\mathbf{E} S_2(X_1, ..., X_k) = (k-1) g_2 + O(\beta^2 k^2 \varphi^{\frac{1}{2}}(p))$;

c) $\mathbf{E} S_3(X_1, ..., X_k) = (k-2) g_3 + O(\beta^2 k^3 \varphi^{\frac{1}{2}}(p))$;

d) $\mathbf{E} S_4(X_1, ..., X_k) = (k-3) g_4 + \frac{(k-3)(k-4)}{2} g_2^2 + O(\beta^2 k^4 \varphi^{\frac{1}{2}}(p))$.

Доказательство. a) $\mathbf{E} S_1(X_1, ..., X_k) = \mathbf{E} \sum\limits_{j=1}^{k} X_j = 0$.

b) В сумме $\mathbf{E} S_2(X_1, ..., X_k)$ имеется $k-1$ слагаемое вида $\mathbf{E} X_j X_{j+1} = g_2$ и $(k-1)(k-2)/2$ слагаемых вида $\mathbf{E} X_j X_l,\ l > j+1$, каждое из которых по лемме 3 не превосходит $2\varphi^{\frac{1}{2}}(p) \|X_j\|_2 \|X_l\|_2 == 2\beta^2 \varphi^{\frac{1}{2}}(p)$, что дает нам нужную оценку для $\mathbf{E} S_2(X_1, ..., X_k)$. Соотношение c) доказывается аналогично с учетом того, что $|X_j| \le 2$ при всех j .

d) В сумме $\mathbf{E} S_4(X_1, ..., X_k)$ имеется $k-3$ слагаемых вида $\mathbf{E} X_j X_{j+1} X_{j+2} X_{j+3} = g_4$ и $(k-3)(k-4)/2$ слагаемых вида $\mathbf{E} X_j X_{j+1} X_l X_{l+1}$, $l > j+2$, каждое из которых по лемме 3 равно $g_2^2 + O\left(\beta^2 \varphi^{\frac{1}{2}}(p)\right)$. Все прочие слагаемые имеют вид $\mathbf{E} X_i X_j X_k X_l$, где либо $j > i+1$, либо $l > k+1$; по лемме 3 такие слагаемые равны $O\left(\beta^2 \varphi^{\frac{1}{2}}(p)\right)$, а количество этих слагаемых равно $C_k^4 - (k-3) - (k-3)(k-4)/2 = O(k^4)$. Сказанное доказывает утверждение d).

Лемма 7. *Пусть* $n = kp$. *Если* $\mathbf{E}|\xi_1|^5 < \infty$, *и* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j\varphi^{\frac{1}{2}}(j) < \infty$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что при* $|t| \le \varepsilon\sqrt{k}$

a)

$$f_1(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2k} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 nk} + \theta_1\left(\frac{t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{5}{2}}}\right)\right\}; \tag{8}$$

b)

$$|g_l^*| \ll \frac{t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{5}{2}}},\ g_l^* = f_1^{-l} g_l,\ l = 2, 3, 4. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) В силу леммы 5

$$\ln f_1(t) = \sum_{l=1}^{4} \frac{(it)^l \gamma_l(T_p)}{l!\sigma_n^l} + r_4(t) = -\frac{t^2}{2k} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 nk} + \theta_2\frac{t^4}{n^2} + r_4(t), \tag{10}$$

где

$$r_4(t) = \frac{t^5}{5!}\left(\frac{d^5}{dt^5}\ln f_1(t)\right)_{t=c},\ c \in (0, t).$$

Производную $\left(\frac{d^5}{dt^5}\ln f_1(t)\right)_{t=c}$ можно представить в виде дроби со знаменателем $f_1^5(c)$, а слагаемые в числителе являются произведениями производных $f_1^{(l)}(c)$, $l = 0, 1, ..., 5$, суммарный порядок которых равен 5 (считаем $f_1^{(0)}(c) = f_1(c)$). Так как при $|t| \le \varepsilon\sqrt{k}$

$$|f_1(t) - 1| \le \frac{t^2\sigma_p^2}{2\sigma_n^2} \le \frac{\varepsilon^2}{2},$$

то при достаточно малых ε $|f_1(c)| \ge \frac{1}{2}$. Далее с учетом леммы 4 получаем

$$|f_1^{(l)}(c)| \le \frac{\mathbf{E}|T_p|^l}{\sigma_n^l} \ll \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_n}\right)^l = k^{-\frac{l}{2}}.$$

Отсюда следует, что $|r_4(t)| \ll \left(\frac{|t|}{\sqrt{k}}\right)^5$ и из (10) следует теперь (8).

b) Нетрудно подсчитать, что $g_2^* = f_1^{-2} f_2 - 1$, $g_3^* = \left(f_1^{-3} f_3 - 1\right) - 2g_2^* - g_2^{**}$, $g_4^* = \left(f_1^{-4} f_4 - 1\right) - 2g_3^* - 2g_3^{**} + 3g_2^* + 2g_2^{**} + g_2^{***}$, где

$$g_2^{**} = \mathbf{E}X_1X_3,\ g_2^{***} = \mathbf{E}X_1X_4,\ g_3^{**} = f_1^{-3}\mathbf{E}\exp\{it(Q_1 + Q_2 + Q_4)\} - 1.$$

Представив все входящие в эти выражения характеристические функции в виде (8) и воспользовавшись справедливым при любом комплексном z неравенством $|\exp\{z\} - 1| \le |z|\exp\{|z|\}$, последовательно оценим g_2, g_3, g_4; при $|t| \le \varepsilon\sqrt{k/l}$ получим

$$|g_l^*| \ll \left|\exp\left\{\theta_{3l}\left(\frac{t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{5}{2}}}\right)\right\} - 1\right| \ll \frac{t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{5}{2}}},\quad l = 2, 3, 4.$$

Лемма доказана.

Пусть $2q < p$. Обозначим

$$U_j = \sigma_n^{-1} \sum_{l=1}^{p-2q} \xi_{(j-1)p+q+l}, \quad V_j = \sigma_n^{-1} \sum_{l=1}^{q} (\xi_{(j-1)p+l} + \xi_{jp-q+l}),$$

$$u = u(t) = \mathbf{E} \exp\{itU_1\}, \quad v = v(t) = \mathbf{E} \exp\{itV_1\}.$$

Тогда $Q_j = U_j + V_j,\ X_j = Y_j + Z_j,\ j = 1, 2, ...,$ где

$$Y_j = (\exp\{itU_j\} - u)v, \quad Z_j = \exp\{itU_j\}(\exp\{itV_j\} - v) + uv - f_1,$$

так что

$$F_k(z) = \mathbf{E} \prod_{j=1}^{k} \left(f_1 + z\left(Y_j + Z_j\right)\right). \tag{11}$$

Лемма 8.

$$|F_k(z)| \le \left\{1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p)\right\}^{\frac{k}{2}} + 16\rho\varphi(q)B_k, \tag{12}$$

где $\delta^2 = 1 - |v|^2, \quad \rho = |z| \ge 1,$ *а*

$$B_k = \sum_{l=2}^{k-1} \| \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j)\|_\infty \left\{1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p)\right\}^{\frac{k-l-1}{2}} +$$

$$+ \| \prod_{j=1}^{k-1} (f_1 + zX_j)\|_\infty \left\{1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p)\right\}^{\frac{k-2}{2}}.$$

Доказательство.

Так как $\mathbf{E}Y_j = 0,\ |Y_j| \le 2,$ то с помощью леммы 3 при $1 < l < k$ получаем

$$|\mathbf{E} \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j) zY_l \prod_{j=l+1}^{k} (f_1 + zZ_j)| \le$$

$$\le |\mathbf{E} \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j) \mathbf{E} zY_l \prod_{j=l+1}^{k} (f_1 + zZ_j)| +$$

$$+ 4\rho\varphi(q) \ \| \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j)\|_\infty \ \| \prod_{j=l+1}^{k} (f_1 + zZ_j)\|_1 \le$$

$$\le 4\rho\varphi(q) |\mathbf{E} \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j)| \cdot \| \prod_{j=l+1}^{k} (f_1 + zZ_j)\|_1 +$$

$$+ 4\rho\varphi(q) \ \| \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j)\|_\infty \ \| \prod_{j=l+1}^{k} (f_1 + zZ_j)\|_1 \le$$

$$\le 8\rho\varphi(q)\, b_l, \quad b_l = \| \prod_{j=1}^{l-1} (f_1 + zX_j)\|_\infty \ \| \prod_{j=l+1}^{k} (f_1 + zZ_j)\|_1. \tag{13}$$

Положим

$$b_1 = \| \prod_{j=2}^{k} (f_1 + zZ_j) \|_1, \quad b_k = \| \prod_{j=1}^{k-1} (f_1 + zX_j) \|_\infty.$$

Применяя последовательно соотношение (13), из (11) получаем

$$|F_k(z)| \le |\mathbf{E} \prod_{j=1}^{k-1} (f_1 + zX_j) zY_k| + |\mathbf{E} \prod_{j=1}^{k-1} (f_1 + zX_j)(f_1 + zZ_k)| \le$$

$$\le |\mathbf{E} \prod_{j=1}^{k-1} (f_1 + zX_j)(f_1 + zZ_k)| + 8\rho\varphi(q) b_k \le ... \le$$

$$\le |\mathbf{E} \prod_{j=1}^{k} (f_1 + zZ_j)| + 8\rho\varphi(q) \sum_{l=1}^{k} b_l. \tag{14}$$

Имеем

$$\mathbf{E} \prod_{j=1}^{r} |f_1 + zZ_j| \le \left(\mathbf{E} \prod_{j\ge1}{}' |f_1 + zZ_j|^2 \cdot \mathbf{E} \prod_{j\ge2}{}'' |f_1 + zZ_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

где $\prod'$ и $\prod''$ обозначают произведения по нечетным и четным индексам соответственно. Так как $\mathbf{E}Z_1 = 0$, то

$$\mathbf{E}|Z_1|^2 \le \mathbf{E}|Z_1 - uv + f_1|^2 = \mathbf{E}|\exp\{itV_1\} - v|^2 = 1 - |v|^2 = \delta^2.$$

Применяя последовательно соотношение (4) и учитывая, что при $\rho \ge 1$, $a = |f_1|^2 - 2\mathbf{Re} z f_1 (uv - f_1)$ имеет место $||f_1 + zZ_j|^2 - a| \le 4\rho^2$, получаем

$$\mathbf{E} \prod_{j\ge1}{}' |f_1 + zZ_j|^2 \le \left(\mathbf{E}|f_1 + zZ_1|^2 + 8\rho^2\varphi(p) \right) \mathbf{E} \prod_{j\ge3}{}' |f_1 + zZ_j|^2 \le ...$$

$$\le \left\{ 1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p) \right\}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}. \tag{16}$$

Аналогично

$$\mathbf{E} \prod_{j\ge2}{}'' |f_1 + z_j|^2 \le \left\{ 1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p) \right\}^{\left[\frac{r}{2}\right]}. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) следует

$$\mathbf{E} \prod_{j=1}^{r} |f_1 + zZ_j| \le \left\{ 1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p) \right\}^{\frac{r}{2}}. \tag{18}$$

Из (14) и (18) вытекает утверждение леммы.

4. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная последовательность с симметричным распределением и экспоненциально быстрым φ–перемешиванием и пусть $\mathbf{E}|\xi_1|^5 < \infty$ и выполнено условие (1). Тогда*

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\gamma_4(3x - x^3)}{4!\sqrt{2\pi}\sigma_1^4 n} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} + O\left(n^{-\frac{6}{5}}\right).$$

Для доказательства потребуется еще несколько лемм.

Лемма 9. *При выполнении условий теоремы 1 существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$f_n^*(t) = \mathbf{E}\exp\left\{\frac{itT_n}{\sigma_n}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_4\left(\frac{t^4 + |t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}\right)\right\}, \qquad (19)$$

где $|t| \leq \varepsilon\sqrt{k}, \quad k = k(n) = [n^a], \quad a = 1 - \frac{1}{\sqrt[6]{5}} \approx 0,235.$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Если $|t| \leq n^{-2}$, то, положив в (8) $p = n, \ k = 1$, получим

$$f_k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_5\frac{t^4}{n^2}\right\},$$

откуда следует (19).

Пусть теперь $n^{-2} \leq |t| \leq \varepsilon\sqrt{k}$. Положим

$$q = \left[n^{0,5-a}\right], \quad p = \left[n^{1-a}\right], \quad n = kp.$$

Аналогично (10) нетрудно получить

$$\ln|v(t)|^2 = -\frac{2t^2q}{n} + \theta_6\frac{t^4q^2}{n^2} \sim -\frac{t^2q}{n} \sim |v(t)|^2 - 1, \quad n \to \infty,$$

откуда при достаточно больших n выводим

$$\delta^2 = 1 - |v|^2 \leq \frac{3t^2q}{n}, \quad \delta^2 \geq \frac{t^2q}{n} \geq \frac{q}{n^5}, \qquad (20)$$

$$\beta^2 = \mathbf{E}\left|\exp\{itX_1\} - f_1\right|^2 \leq \mathbf{E}\left|\exp\{itX_1\} - 1\right|^2 \leq \frac{t^2\sigma_p^2}{\sigma_n^2} \leq \frac{1}{2}. \qquad (21)$$

Положив в (6) и (7) $l = 4$, с помощью леммы 6 получаем

$$f_k(t) = f_1^k(t)\Bigg\{1 + (k-1)g_2^* + (k-2)g_3^* + (k-3)g_4^* +$$

$$+ \frac{(k-3)(k-4)}{2}(g_2^*)^2 + \theta_7\beta^2k^4\varphi^{\frac{1}{2}}(p)\Bigg\} + R_4, \qquad (22)$$

$$|R_4| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{F_k(z)\,dz}{(z-1)\,z^5} \right| \le (\rho-1)^{-1}\rho^{-5} \sup_{|z|=\rho} |F_k(z)|, \quad |\rho|>1. \qquad (23)$$

Положим в (12) $\rho^2 = \dfrac{1-\beta^2}{k\delta^2}$. При достаточно малых ε и достаточно больших n с помощью (20), (21), (23) и леммы 8 получаем

$$\rho^{-2} = (1-\beta^2)^{-1}k\delta^2 \le 6\frac{kqt^2}{n} \le 6\varepsilon^2k^2qn^{-1} \le \frac{1}{4}, \quad \rho^2 \le \frac{n^5}{qk} \le \frac{n^5}{16}.$$

$$|R_4| \le 90f_1^k \left(\frac{kq}{n}\right)^{\frac{5}{2}} |t|^5 \left(1 + \frac{1}{k} + n^5\varphi(p)\right)^{\frac{k}{2}} + 16t^4n^9\varphi(q)B_k \ll$$

$$\ll f_1^k \left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^5 + t^4n^9\varphi(q)B_k, \qquad (24)$$

где

$$B_k \le k(1+2\rho)^k \left(1 + \frac{1}{k} + n^5\varphi(p)\right)^{\frac{k}{2}} \ll k(1+n^3)^k. \qquad (25)$$

По условию $\varphi(n) \le \exp\{-\alpha n\}$, и так как $k\ln n = o(q)$, то из (25) следует

$$n^9\varphi(q)B_k \ll \exp\left\{9\ln n + k\ln(1+n^3) - \alpha q\right\} \sim \exp\left\{-\alpha q\right\},$$

и соотношение (24) можно переписать так:

$$|R_4| \ll f_1^k \left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^5 + t^4 \exp\left\{-\alpha q\right\}. \qquad (26)$$

Из (22) с помощью (9), (21), и (26) получаем

$$f_k(t) = f_1^k(t) \left\{1 + \theta_8 \left(\frac{kt^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} + \theta_9 t^4 \exp\left\{-\alpha q\right\}. \qquad (27)$$

Далее, из (8) следует

$$f_1^k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_1 \left(\frac{kt^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}, \qquad (28)$$

откуда с помощью (27) выводим

$$f_k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_{10} \left(\frac{kt^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} + \theta_9 t^4 \exp\left\{-\alpha q\right\}. \qquad (29)$$

Нетрудно видеть, что если $|t| \le \varepsilon\sqrt{k}$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\exp\left\{-\alpha q\right\} = o\left(n^{-2} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + |\theta_{10}| \left(\frac{kt^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}\right),$$

так что (29) можно переписать так:

$$f_k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_{11}\left(\frac{kt^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}. \tag{30}$$

Будем считать (30) первой итерацией для $f_k(t)$. Обозначим $k_1 = k_1(n) = k(p) = [p^a]$. Заменив в (30) n на p, k на k_1, получим

$$f_1\left(t\frac{\sigma_n}{\sigma_p}\right) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 p} + \theta_{12}\left(\frac{k_1t^4}{p^2} + \frac{|t|^5}{k_1^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}, \quad |t| \le \varepsilon\sqrt{k_1},$$

откуда

$$f_1(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2k} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 nk} + \theta_{13}\left(\frac{k_1t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{5}{2}}k_1^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}, \quad |t| \le \varepsilon\sqrt{kk_1}.$$

Отсюда, повторив доказательство леммы 7, можно получить

$$|g_l^*| \ll \frac{k_1t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{k^{\frac{5}{2}}k_1^{\frac{3}{2}}}, \quad l = 2, 3, 4.$$

Если теперь провести приведенные выше рассуждения настоящей леммы с использованием двух последних соотношений вместо (8) и (9), то можно получить вторую итерацию для $f_k(t)$:

$$f_k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_{14}\left(\frac{kk_1t^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{(kk_1)^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}, \quad |t| \le \varepsilon\sqrt{k},$$

и т.д. После шестой итерации получим

$$f_k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4\gamma_4}{4!\sigma_1^4 n} + \theta_{15}\left(\frac{Kt^4}{n^2} + \frac{|t|^5}{K^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}, \quad |t| \le \varepsilon\sqrt{k}, \tag{31}$$

где $K = kk_1k_2k_3k_4k_5 \sim n^A, \quad A = a\sum\limits_{l=0}^{5}(1-a)^l = 1-(1-a)^6 = \frac{4}{5}$. Из (31) следует теперь утверждение леммы в случае, когда $n = kp$.

Пусть теперь $n = kp + r,\ 0 \le r < n$. Введем $Q_j,\ j = 1, ..., k$ по формулам (5) и положим

$$\tilde{Q}_{k+1} = {\sigma_n}^{-1}\sum_{l=1}^{r}\xi_{kp+l},\ \tilde{f}_1(t) = \mathbf{E}\exp\{it\tilde{Q}_{k+1}\},\ \tilde{X}_{k+1} = \exp\left\{it\tilde{Q}_{k+1}\right\} - \tilde{f}_1.$$

Необходимые изменения в доказательстве равенства (19) достаточно прозрачны: главное - для $f_1^k\tilde{f}_1$ сохраняется то же представление, что и для f_1^k в (28), а новые (по сравнению с $\mathbf{E}S_l(X_1, ..., X_k)$) слагаемые в $\mathbf{E}S_l(X_1, ..., X_k, \tilde{X}_{k+1})$ и «лишний» (по сравнению с $F_k(z)$) сомножитель в $\mathbf{E}\prod\limits_{j=1}^{k}(f_1 + zX_j)(\tilde{f}_1 + z\tilde{X}_{k+1})$ оцениваются в общем так же, как и старые. Доказательство остается принципиально тем же, хотя и более громоздким.

Лемма 10. *При* $\varepsilon\sqrt{k} \le |t| \le \varepsilon\sqrt{n}$, $\varepsilon > 0$.

$$|f_n^*(t)| \le \exp\left\{-bt^2\right\}, \quad b > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $kp \le n < (k+1)p$. Используя замечание 2 и лемму 1, аналогично (18) получаем

$$|f_n^*(t)| \le \left|\mathbf{E}\prod_{j=1}^{k}\cos\left(tQ_1\right)\right| \le \left(\mathbf{E}\cos^2\left(tQ_j\right) + 2\varphi(p)\right)^{\frac{k}{2}} \le$$

$$\le \left\{\frac{1+f_1(2t)}{2} + 2\varphi(p)\right\}^{\frac{k}{2}}. \tag{32}$$

Пусть $k = k(n) = \left[\frac{t^2}{N}\right]$, $p = \left[\frac{n}{k}\right]$. Тогда $p = p(n) \sim \frac{nN}{t^2} \ge \frac{N}{\varepsilon^2}$. В силу леммы 9

$$f_1(2t) \asymp \exp\left\{-\frac{2t^2}{k}\right\} \sim \exp\left\{-2N\right\},$$

так что $N > 0$ можно подобрать так, чтобы $2\varphi(p) < \frac{1}{8}$, $f_1(2t) < \frac{1}{4}$, и из (32) следует теперь

$$|f_n^*(t)| \le \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} \sim \exp\left\{-\frac{(\ln 4 - \ln 3)}{2N}t^2\right\}.$$

Лемма 11. *При* $|t| \ge \varepsilon\sqrt{n}$

$$|f_n^*(t)| \le \mu^n, \quad 0 < \mu < 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если имеет место (1), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\tau < 1$ такое, что $|\mathbf{E}\exp\{it\xi_1\}| = |\mathbf{E}\cos\{it\xi_1\}| \le \tau$, $|t| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ (см., например, [2, с. 22]). Выберем натуральное p так, чтобы $2\varphi(p) < (1-\tau)/8$. Тогда в силу лемм 3 и 1

$$|f_n^*(t)| = \left|\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\cos\left\{it\sigma_n^{-1}\xi_j\right\}\right| \le \mathbf{E}\prod_{j=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left|\cos\left\{it\sigma_n^{-1}\xi_{jp}\right\}\right| \le$$

$$\le \left(\mathbf{E}\left|\cos\left(t\sigma_n^{-1}\xi_1\right)\right| + 2\varphi(p)\right)^{\left[\frac{n}{p}\right|} \le \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{2}} + 2\varphi(p)\right)^{\left[\frac{n}{p}\right|} \le$$

$$\le \left(1 - \frac{1-\tau}{8}\right)^{\left[\frac{n}{p}\right|}, \quad |t| \ge \varepsilon\sigma_n|t|.$$

Из последнего соотношения следует утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.

Воспользуемся следующим вариантом классического неравенства Эссеена:

$$|F(x)-G(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right| + \frac{24m}{\pi T}, \tag{33}$$

где F - функция распределения, f – соответствующая ей характеристическая функция, G – функция ограниченной вариации, g – ее преобразование Фурье, $F(x)-G(x)\to 0,\ x\to\pm\infty,\quad g(0)=1,\ f'(0)=g'(0)=0,\ |G'(x)|\le m$ (см., например, [9, с. 603]).

Положим в (33)

$$F(x)=F_n(x),\quad G(x)=\Phi(x)+\frac{\gamma_4(3x-x^3)}{4!\sqrt{2\pi}\sigma_1^4 n}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Тогда

$$f(t)=f_n^*(t),\quad g(t)=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\left(1+\frac{\gamma_4 t^4}{4!\sigma_1^4 n}\right)$$

(см., например, [2, с. 180]).

Обозначим $\Gamma_n(t)=\dfrac{\gamma_4 t^4}{4!\sigma_1^4 n}$. С помощью соотношения (19) получаем при $|t|\le\varepsilon\sqrt{k},\quad k=[n^a]\,,\quad a=1-\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

$$|f(t)-g(t)|=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\left|\exp\left\{\Gamma_n(t)+\theta_4\left(\frac{t^4+|t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}\right)\right\}-1-\Gamma_n(t)\right|.$$

Так как $\Gamma_n(t)\to 0,\ \ \dfrac{t^4+|t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}\to 0$ при $|t|\le\varepsilon\sqrt{k},\ n\to\infty$, то, воспользовавшись справедливым при любых комплексных u и v неравенством

$$|\exp\{u+v\}-1-v|\le\left(|u|+\frac{1}{2}|v|^2\right)\exp\{\max(|u|,|v|)\},$$

получаем

$$\left|\exp\left\{\Gamma_n(t)+\theta_4\left(\frac{t^4+|t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}\right)\right\}-1-\Gamma_n(t)\right|\ll$$
$$\ll\frac{t^4+|t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}+\Gamma_n^2(t)\ll\frac{t^4+|t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}.$$

Следовательно,

$$|f(t)-g(t)|\ll\frac{t^4+|t|^5}{n^{\frac{6}{5}}}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\},\quad |t|\le\varepsilon\sqrt{k}. \tag{34}$$

Положив теперь в (33) $T=n^{\frac{6}{5}}$ и воспользовавшись для оценки $|f(t)-g(t)|$ при $|t|\le\varepsilon\sqrt{k}$ соотношением (34), а для оценки $|f(t)|=|f_n^*(t)|$ при $\varepsilon\sqrt{k}\le|t|\le\varepsilon\sqrt{n}$ – леммой 10 и при $\varepsilon\sqrt{n}\le|t|\le n^{\frac{6}{5}}$ – леммой 11, получим утверждение теоремы.

Литература

1. Rio, E. Sur le theoreme de Berry-Esseen pour les suites faiblement dependantes. (French) / E. Rio // J.Probab. Theory Relat. Fields. – 1996. – V.104. N.2. – P.255-282.
2. Петров, В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин / В.В. Петров. – М.: Наука, 1987.
3. Bradley, R. On the φ-mixing condition for stationary random sequences / R. Bradley // Duke Mathematical Journal. – 1980. – V.47. N.2. – P.421–433.
4. Ибрагимов, И.А. Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник. – М.: Наука, 1965.
5. Биллингсли, П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. – М: Наука, 1977, 351 с.
6. Peligrad, M. The convergence of moments in the central limit theorem for ρ-mixing sequences of random variables / M. Peligrad // Pros. of the American Math. Soc. – 1987. – V.101. N.1. – P.142-148.
7. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973.
8. Лоэв, М. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М.: ИЛ, 1962.
9. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. / В. Феллер. – М.: Мир, 1984.