Математические
структуры и моделирование
2009, вып. 20, с. 26–47

УДК 514.82

ОПИСАНИЕ ОДНОРОДНЫХ АФФИННЫХ ПРИЧИННЫХ ПОРЯДКОВ НА ТРЕХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Е.В. Мякишева

В статье исследуются однородные аффинные причинные порядки на трехмерных разрешимых группах Ли относительно аффинной структуры С.П. Гаврилова.

Введение

В данной работе ставилась задача исследования однородных аффинных причинных порядковых структур, задаваемых эллиптическими конусами на трехмерных разрешимых группах Ли, снабженных полной левоинвариантной аффинной канонической [5] структурой.

Однородные конусы в n-мерном аффинном пространстве изучались Э.Б. Винбергом [4]. Он алгебраически описал выпуклые конусы с острой вершиной, внутри которых транзитивно действует группа порядковых автоморфизмов $Aut(\mathcal{P})$. Семейство равных и параллельных конусов $\{C_x\}$ в A^n, $n \geq 3$, где C_x - множество лучей, исходящих из одной точки x, исследовал А.Д. Александров [3]. Он описал конусы C_x, на которых транзитивно действует группа Γ – биекций $f\colon A^n \to A^n$ таких, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, удовлетворяющая условию: для любых $y \in C_x$, $y' \in C_{x'}$ существует $h \in \Gamma$ такая, что $h(x) = x'$ и $h(y) = y'$.

В настоящей работе рассматривались эллиптические конусы, задающие левоинвариантный аффинный причинный порядок относительно канонической аффинной структуры на трехмерных связных односвязных группах Ли. Проводилось исследование для выявления однородных порядков.

Исследование показало, что на группах Ли G_3I, G_3VI_0, G_3VII_0 класса 1 (в обозначениях С.П. Гаврилова [5]) аффинный причинный порядок является одновременно int - однородным, ∂ - однородным и ext - однородным. В остальных случаях порядок не является однородным ни в одном из указанных смыслов (Теорема 2).

Получен был также следующий результат. Если через H обозначим группу Ли аффинных преобразований относительно канонической аффинной структуры, сохраняющих изотропные векторы левоинвариантной лоренцевой метрики

Омский государственный университет.
E-mail: elena-myakisheva@yandex.ru

g на G_3, то в случае групп Ли $G_3II - G_3VII$, класса 1 $H \subset Isom(G_3)$, для групп Ли G_3I, G_3VI_0, G_3VII_0 класса 1, когда метрика g плоская $H \subset Hom(G_3)$. В случае групп Ли $G_3II - G_3V$, G_3VII класса 2 $H \subset Hom(G_3)$. Для группы Ли G_3IV, класса 2 $H \subset Isom(G_3)$. Для группы Ли G_3VI, $H \subset Hom(G_3)$, за исключением того случая, когда метрика g является конформно-плоской (Теорема 3).

1. Аффинная структура групп Ли

Пусть V^n обозначает n - мерное дифференцируемое многообразие, $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ - n - мерное арифметическое пространство.

Определение 1. Аффинный атлас $\mathcal{A}$ на V^n есть совокупность накрывающих V^n локальных карт таких, что каждая функция перехода между картами из $\mathcal{A}$ может быть продолжена до преобразования пространства $\mathbb{R}^n$. Максимальный аффинный атлас есть аффинная структура.

Определение 2. Аффинным многообразием называется V^n, оснащенное аффинной структурой.

Каждая локальная карта аффинной структуры определяет аффинные координаты.

Определение 3. Отображение $f\colon V^n \to V^m$, где V^n, V^m - аффинные многообразия, называется аффинным, если в локальных координатах аффинного атласа задается аффинным преобразованием из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Множество всех аффинных отображений аффинного многообразия V^n в себя обозначим через $\mathrm{Aff}(V^n)$.

На аффинном многообразии V^n имеется естественная линейная связность ∇ с нулевыми кривизной и кручением, в аффинных координатах она является стандартной связностью на $\mathbb{R}^n$.
Аффинное многообразие можно определять через связность следующим образом.

Определение 4. Многообразие V^n допускает аффинную структуру, если на расслоение реперов многообразия V^n можно ввести линейную связность ∇ с тождественно равными нулю кривизной и кручением.

Если связность ∇ полная, то будем говорить о полной аффинной структуре. Геодезические связности ∇ назовем прямыми, полугеодезические - лучами.

Пусть V^n аффинное многообразие с лоренцевой метрикой g. Нас будут интересовать лоренцевы многообразия V^n с просто транзитивной разрешимой группой аффинных изометрий T. Следовательно, оснащение однородного V^n (полной) аффинной структурой равносильно оснащению (полной) левоинвариантной аффинной структурой группы Ли T. Левоинвариантность означает, что левые сдвиги являются аффинными преобразованиями в рассматриваемых аффинных координатах. Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать лоренцевы разрешимые группы Ли, т.е. группы Ли, оснащенные левоинвариантной лоренцевой метрикой.

В каком случае группа Ли T допускает левоинвариантную аффинную структуру? Согласно гипотезе Дж. Милнора [8], таковой является любая разрешимая группа Ли. С. Ямагучи установил, что полную левоинвариантную аффинную структуру допускают разрешимые группы Ли размерности $\leqslant 4$ [7].

2. Основные определения и обозначения

Пусть G_3 - связная односвязная 3-х-мерная разрешимая группа Ли, снабженная полной левоинвариантной аффинной структурой.

Определение 5. Аффинный причинный конус K_x в G_3 есть объединение всех лучей с началом $x \in G_3$, с направляющими векторами ξ, принадлежащими одной половине касательного конуса $\{\eta \in T_xG_3 \colon g_x(\eta,\eta) \geq 0\}$, где g –левоинваринтная лоренцева метрика на G_3, T_xG_3 - касательное пространство к G_3 в точке x.

Определение 6. Пусть $\mathcal{P} = \{P_x, x \in G_3\}$ семейство подмножеств G_3. Говорим, что $\mathcal{P}$ задает инвариантный порядок на группе G_3, если выполнены следующие условия:

P I: $x \in P_x$;

P II : если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$;

P III : если $x \neq y$, то $P_x \neq P_y$;

P IV : если $L_x \colon G_3 \to G_3$ левый сдвиг, то $L_x(P_y) = P_{L_x(y)}$ для любого $x \in G_3$.

Определение 7. Порядок $\mathcal{P}$ на G_3 назовем аффинным причинным, если он задается семейством конусов $\{P_x, x \in G_3\}$ в G_3 таким, что P_x есть аффинный причинный конус в полной аффинной структуре, заданной на G_3.

Определение 8. Биекция $f \colon G_3 \to G_3$ называется порядковым автоморфизмом, если для любого $x \in G_3$ $f(P_x) = P_{f(x)}$.
Группу непрерывных порядковых автоморфизмов группы G_3 обозначим $Aut(\mathcal{P})$.

Пусть $Aut(\mathcal{P})_e$ - группа непрерывных порядковых автоморфизмов группы G_3 относительно порядка $\mathcal{P}$, оставляющих единицу группы e неподвижной.

Определение 9. Группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на множестве $B \subset G_3$, если для любых $x, y \in B$ существует автоморфизм $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ такой, что $f(x) = y$.

Определение 10. Порядок $\mathcal{P}$ называется

1) внутренне однородным или int - однородным, если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $int(P_e)$;

2) гранично однородным или ∂ - однородным, если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $\partial P_e \setminus \{e\}$;

3) внешне однородным или ext - однородным, если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $G_3 \setminus (P_e \cup P_e^-)$.
Здесь $int(B)$ - внутренность множества B, ∂B - граница множества B,
$P_x^- = \{y \in G_3 \colon x \in P_y\}$.

Определение 11. Гладкое отображение $f \colon G_3 \to G_3$ сохраняет изотропные векторы, если $g_x(\xi, \xi) = 0 \Leftrightarrow g_{f(x)}(df_x(\xi), df_x(\xi)) = 0$, где $\xi \in T_xG_3$, T_xG_3 , - касательное пространство к G_3 в точке x, df_x - дифференциал отображения f, $df_x \colon T_xG_3 \to T_{f(x)}G_3$.

3. Однородные аффинные причинные порядки на разрешимых группах Ли G_3

Пусть G_3 - односвязная разрешимая группа Ли, $\mathcal{G}_3$ - ее алгебра Ли.

Известная классификация Бианки трехмерных вещественных алгебр Ли содержит девять типов, из них с I по VII охватывают все разрешимые алгебры, а типы VIII - IX - неразрешимые. Каждый из типов I - VII содержит коммутативный идеал $\mathcal{I}$ коразмерности 1.

Поскольку каждая левоинвариантная метрика g на группе Ли G_3 полностью задается невырожденной билинейной симметричной формой $a \colon \mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_3 \to R$ на алгебре Ли $\mathcal{G}_3$, то все левоинвариантные метрики на односвязной группе Ли с абелевой нормальной подгруппой N коразмерности 1 можно разбить на два больших класса в зависимости от ранга формы a на идеале $\mathcal{I}$ коразмерности 1, отвечающем N, а именно: класс 1, когда rank $a_{/\mathcal{I}} = 2$, т.е. форма a не вырождена на $\mathcal{I}$, и класс 2, когда rank $a_{/\mathcal{I}} = 1$, т.е форма вырождена на $\mathcal{I}$ (через rank $a_{/\mathcal{I}}$ обозначается ранг формы на идеале $\mathcal{I}$) [5]. С.П. Гаврилов предлагает упростить компоненты формы на $G_{\alpha\beta}$ формы a на $\mathcal{G}_3$ автоморфизмами алгебры Ли $\mathcal{G}_3$ [5]. Он получил, что для формы a класса 1 матрицу формы всегда можно записать в виде

$$(a) = (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь $G_{33} \neq 0,\ G_{11}G_{22} - {G_{12}}^2 \neq 0$.

Затем вводится полная левоинвариантная аффинная структура, в которой левоинвариантные лоренцевы метрики из класса 1, в некоторой глобальной аффинной карте на G_3 имеют вид

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x^3) & g_{12}(x^3) & 0 \\ g_{12}(x^3) & g_{22}(x^3) & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix}.$$

В данной глобальной аффинной карте $e = (0, 0, 0)$.

Для форм a класса 2, либо с помощью автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}_3$, либо путем преобразования идеала $\mathcal{I} = \langle e_1, e_2 \rangle$ и выбора трансверсального к $\mathcal{I}$ вектора e_3 всегда можно привести матрицу формы к виду

$$(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & G_{13} \\ 0 & G_{22} & 0 \\ G_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После этого на G_3 вводится полная левоинвариантная структура, в которой левоинвариантные метрики из класса 2 в некоторой глобальной аффинной карте на G_3 ($e = (0,0,0)$) имеют вид

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x^3) & g_{12}(x^3) & g_{13}(x^3) \\ g_{12}(x^3) & g_{22}(x^3) & g_{23}(x^3) \\ g_{13}(x^3) & g_{23}(x^3) & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, максимальная абелева подгруппа в G_3, в данных координатах, задается уравнением $x^3 = 0$.

Описанную выше полную левоинвариантную аффинную структуру на G_3 назовем канонической.

Для краткости формулировок будем называть разрешимые группы Ли с левоинвариантной метрикой класса 1 (класса 2) разрешимыми группами Ли класса 1 (класса 2).

Пусть семейство $\mathcal{P} = \{P_x\}$ задает на G_3 аффинный причинный порядок относительно канонической аффинной структуры. Нас интересует теперь задача вычисления группы порядковых автоморфизмов $Aut(\mathcal{P})$ для группы Ли G_3. Верна следующая

Теорема 1. *Пусть порядок на связной односвязной разрешимой группе G_3 такой, что P_x есть эллиптический конус в канонической аффинной структуре группы G_3. Тогда любой автоморфизм $f \in Aut(\mathcal{P})$ является аффинным преобразованием. [2]*

Аффинный порядковый автоморфизм $f\colon G_3 \to G_3$ в таком случае сохраняет изотропные векторы. Но тогда f, как известно, будет конформным преобразованием. Для группы Ли конформных преобразований вида

$$f^i = \sum_{k=1}^{3} a^i_k x^k + \alpha^i$$

векторы Киллинга имеют вид

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{3} b^i_k x^k + \beta^i.$$

Напомним также, что векторы Киллинга должны удовлетворять уравнениям

$$\xi^n \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} + g_{in}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^k} + g_{kn}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^i} = \lambda g_{ik}.$$

Если $\lambda = 0$, то f - изометрия; если $\lambda = const$, то f - гомотетия; если $\lambda = \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ - некоторая функция x, то f - конформное преобразование.

Группу изометрий группы Ли G_3 обозначим $Isom(G_3)$, группу гомотетий - $Hom(G_3)$, группу конформных преобразований - $Conf(G_3)$. Ясно, что $Isom(G_3) \subset Hom(G_3) \subset Conf(G_3)$.

Далее будут использоваться следующие факты.

Предложение 1. *Пусть G_3 – связная односвязная разрешимая группа Ли. На G_3 задан аффинный причинный порядок $\mathcal{P}$ относительно канонической аффинной структуры $f \in Aff(G_3) \cap Aut(\mathcal{P})$, то $f \in Aut(\mathcal{P})_e \Leftrightarrow f^i = \sum_{k=1}^{3} a_k^i x^k$.*

Доказательство. Очевидно. ■

Предложение 2. *Пусть группа Ли G_3 и $\mathcal{P} = \{P_x\}$ порядок, заданный на ней, удовлетворяют условиям Предложения 1. Если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит из порядковых автоморфизмов вида $f^j = \sum_{k=1}^{3} a_k^j x^k$, $j = 1, 2$, $f^3 = x^3$, то порядок $\mathcal{P}$ не будет ни int - однородным, ни ∂ - однородным, ни ext - однородным.*

Доказательство. Пусть $f^j = \sum_{k=1}^{3} a_k^j x^k$, $j = 1, 2$, $f^3 = x^3$ и $H_\alpha = \{x^3 = \alpha\}$. На G_3 задано семейство эллиптических конусов $\{P_x\}$. Очевидно: $f^3(H_\alpha) = H_\alpha$. При некотором выборе α_1, α_2, α_3 получим $H_{\alpha_1} \cap int P_e \neq \varnothing$; $H_{\alpha_2} \cap \partial P_e \setminus \{e\} \neq \varnothing$; $H_{\alpha_3} \cap G_3 \setminus (P_e \cup P_e^-) \neq \varnothing$. Поэтому $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ не будет действовать транзитивно ни на $int(P_e)$, ни на $\partial P_e \setminus \{e\}$, ни на $G_3 \setminus (P_e \cup P_e^-)$. По определению 10 это означает, что порядок $\mathcal{P}$ не будет ни int −, ∂ −, ext − однородным. ■

Возникает вопрос: для каких групп Ли G_3 порядок $\mathcal{P}$ будет int − однородным, ∂ − однородным, ext − однородным? Ответ дает

Теорема 2. *Пусть G_3 – связная односвязная разрешимая группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g. Пусть на G_3 задан аффинный причинный порядок $\mathcal{P}$ относительно канонической аффинной структуры. Тогда на группах Ли G_3 типов I, VI_0, VII_0 класса 1 существующий порядок будет int − однородным, ∂ − однородным, ext − однородным (при этом метрика g - плоская). В остальных случаях порядок не является однородным ни в одном из указанных смыслов.*

Как было замечено выше, аффинное преобразование, сохраняющее изотропные векторы, будет конформным.

Верна следующая

Теорема 3. *Пусть H – группа Ли аффинных преобразований относительно канонической аффинной структуры, сохраняющих изотропные векторы левоинвариантной лоренцевой метрики g на G_3. Тогда*

1) для группы Ли G_3I $H \subset Hom(G_3)$;

2) для групп Ли $G_3II - G_3VII$ класса 1 $H \subset Isom(G_3)$, за исключением того случая, когда метрика плоская; в этом случае $H \subset Hom(G_3)$;

3) для групп Ли G_3II, G_3III, G_3V, G_3VII класса 2 $H \subset Hom(G_3)$;

4) для группы Ли G_3IV класса 2 $H \subset Isom(G_3)$;

5) для группы Ли G_3VI $H \subset Hom(G_3)$, за исключением того случая, когда метрика имеет вид $g_{ij}(x^3) = e^{-x^3}a_{ij}$, где $a_{ij} = const$. В этом случае $H \subset Conf(G_3)$.

Аналогичная теорема приведена в [2] для $f\colon G_3 \to G_3$, являющегося аффинным преобразованием относительно некоторой аффинной структуры на связной односвязной группе Ли G_3.

4. Доказательство Теоремы 2 и Теоремы 3

4.1. Доказательство Теоремы 2

Изложим краткую схему доказательства.

Нам надо найти группу $Aut(\mathcal{P})_e$ для группы G_3. Используя Предложение 1, замечаем, что $f \in Aut(\mathcal{P})_e \Leftrightarrow f^i = \sum\limits_{k=1}^{3} a^i_k x^k$. Для преобразований такого вида векторы Киллинга имеют вид $\xi^i = \sum\limits_{k=1}^{3} b^i_k x^k$. Обозначим через $b^i_j = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$.

В ходе доказательства используются виды левоинвариантных метрик, полученные С.П. Гавриловым [5]. Компоненты метрики g на группе G_3 зависят только от x^3 (для любого класса). Поэтому уравнения Киллинга для векторов ξ^i имеют вид

$$b^3_s \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3} + g_{in} b^n_k + g_{kn} b^n_i = \lambda g_{ik}. \tag{1}$$

Интегрируя уравнения (1), находим векторы Киллинга $\xi^i_{(n)}$, $n = 1, \dots, r$, где r - размерность $Aut(\mathcal{P})_e$. Далее используется метод, изложенный в [6, с. 181]. Идея этого метода заключается в следующем. Интегрируя систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt_n} = \xi^i_{(n)}(x), \\ \quad x^i(0) = x^i_0, \end{cases} \tag{2}$$

получаем x^i как функцию от t_n и x^i_0, т.е. $x^i = h(t_n, x^i_0)$. Затем, делая замену x^i на $\bar{x}^i$ и x^i_0 на x^i, имеем окончательно $x^i = h(t_n, x^i)$. Это однопараметрическая группа преобразований из $Aut(\mathcal{P})_e$, соответствующая $\xi^i_{(n)}$. Теперь останется проверить действие группы $Aut(\mathcal{P})_e$ на $int(P_e)$, $\partial P_e \setminus \{e\}$, $G_3 \setminus (P_e \cup P^-_e)$.

Перейдем к подробному доказательству.

Сначала будем рассматривать группы G_3 класса 1.

1. G_3I

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1$, $g_{22} = V_2$, $g_{33} = V_3$, $V_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Известно, что на группе Ли G_3I аффинный причинный порядок будет int − однородным, ∂ − однородным, ext − однородным.

2. G_3III

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 e^{-2x^3}$, $g_{22} = V_2$, $g_{33} = G_{33}$. Выпишем уравнения Киллинга (1)

$$-b_i^3 x^i V_1 + V_1 b_1^1 = \frac{\lambda}{2} V_1,$$
$$V_1 e^{-2x^3} b_2^1 + V_2 b_1^2 = 0,$$
$$V_1 e^{-2x^3} b_3^1 + G_{33} b_1^3 = 0,$$
$$V_2 b_2^2 = \frac{\lambda}{2} V_2,$$
$$V_2 b_3^2 + G_{33} b_2^3 = 0,$$
$$b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Нетрудно заметить, что они выполняются, если $b_1^1 = 0$, $b_1^2 = 0$, $b_1^3 = 0$, $b_2^1 = 0$, $b_2^2 = 0$, $b_2^3 = 0$, $b_3^1 = 0$, $b_3^2 = 0$, $b_3^3 = 0$, $\lambda = 0$. Следовательно, $\xi^i = (0,0,0)$. Интегрируя систему (2), получаем

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1, \\ \bar{x}^2 = x^2, \\ \bar{x}^3 = x^3. \end{cases}$$

Откуда видно, что $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит только из тождественного преобразования. В таком случае, согласно Предложению 2, аффинный причинный порядок не будет ни $int-$, ни $\partial-$, ни $ext-$ однородным.

3. G_3IV

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 e^{-2x^3}$, $g_{12} = -V_1 x^3 e^{-2x^3}$, $g_{22} = (G_{22} + V_2 (x^3)^2) e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

Повторяя аналогичные вычисления и рассуждения, делаем вывод, что аффинный причинный порядок не является $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным и $\lambda = 0$.

4. G_3V

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 e^{-2x^3}$, $g_{22} = V_2 e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

Запишем уравнения Киллинга:

$$-b_i^3x^i + b_1^1 = \frac{\lambda}{2},$$
$$V_1b_2^1 + V_2b_1^2 = 0,$$
$$V_1e^{-2x^3}b_3^1 + G_{33}b_1^3 = 0,$$
$$-b_i^3x^i + b_2^2 = \frac{\lambda}{2},$$
$$V_22e^{-2x^3}b_3^2 + G_{33}b_2^3 = 0,$$
$$b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Откуда получаем: $b_1^1 = 0$, $b_i^3 = 0$, $b_3^1 = 0$, $b_2^2 = 0$, $\lambda = 0$, $b_1^2 = -\dfrac{V_1}{V_2}b_2^1$. Тогда $\xi^i = (b_2^1x^2, -\dfrac{V_1}{V_2}b_2^1x^1, 0)$. В этом случае вектор Киллинга имеет вид $\xi^i_{(1)} = \left(x^2, -\dfrac{V_1}{V_2}x^1, 0\right)$. Рассмотрим систему (2). В зависимости от знака отношения $\dfrac{V_1}{V_2}$ возможны два варианта.

1) $\dfrac{V_1}{V_2} = -1$, тогда

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 \operatorname{ch} t + x^2 \operatorname{sh} t, \\ \bar{x}^2 = x^1 \operatorname{sh} t + x^2 \operatorname{ch} t, \\ \bar{x}^3 = x^3. \end{cases}$$

2) $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$, имеем

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 \cos t + x^2 \sin t, \\ \bar{x}^2 = -x^1 \sin t + x^2 \cos t, \\ \bar{x}^3 = x^3. \end{cases}$$

Группа $Aut(\mathcal{P})_e$ (в зависимости от знака $\dfrac{V_1}{V_2}$) состоит из полученных преобразований. И в том, и в другом случае, используя Предложение 2, получаем, что порядок не будет $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным.

5. G_3VI

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{12} = G_{12}e^{-(1+\alpha)x^3}$, $g_{22} = V_2e^{-2\alpha x^3}$, $g_{33} = G_{33}$, $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Повторяя аналогичные вычисления и рассуждения, получаем, что $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит только из тождественного преобразования и, следовательно, порядок не будет $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным.

6. G_3VI_0

6.1. $G_3VI_{0_1}$

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{12} = G_{12}$, $g_{22} = V_2e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$. После вычислений получаем $\xi^i = (0, 0, 0)$.

Значит, аффинный порядок не является $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным и $\lambda = 0$.

6.2. $G_3VI_{0_2}$

Метрика имеет вид $g_{12} = 1$, $g_{33} = G_{33}$. Выпишем уравнения Киллинга

$$
\begin{gathered}
b_1^2 = 0,\\
b_2^2 + b_1^1 = \lambda,\\
b_3^2 + G_{33}b_1^3 = 0,\\
b_2^1 = 0,\\
b_3^1 + G_{33}b_2^3 = 0,\\
b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.
\end{gathered}
$$

Следовательно, $b_2^2 = \lambda - b_1^1$, $b_1^3 = -\dfrac{1}{G_{33}}b_3^2$ и $b_2^3 = -\dfrac{1}{G_{33}}b_3^1$.

Тогда $\xi^i = (b_1^1x^1 + b_3^1x^3,\ (\lambda - b_1^1)x^2 + b_3^2x,\ -\dfrac{1}{G_{33}}b_3^2x^1 - \dfrac{1}{G_{33}}b_3^1x^2 + \dfrac{\lambda}{2}x^3)$.

Запишем векторы Киллинга:

$\xi^i_{(1)} = (x^1,\ -x^2,\ 0)$, $\xi^i_{(2)} = (x^3,\ 0, -\dfrac{1}{G_{33}}x^2)$, $\xi^i_{(3)} = (0,\ x^3, -\dfrac{1}{G_{33}}x^1)$,

$\xi^i_{(4)} = (0,\ x^2,\ \dfrac{1}{2}x^3)$.

Интегрируя систему (2) для каждого $\xi^i_{(n)}$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, получаем

$$
\begin{cases}
\bar{x}^1 = x^1e^{\varphi},\\
\bar{x}^2 = x^2e^{-\varphi},\\
\bar{x}^3 = x^3;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\bar{x}^1 = x^1 + x^3t - \dfrac{1}{2G_{33}}x^2t^2,\\
\bar{x}^2 = x^2,\\
\bar{x}^3 = x^3 - \dfrac{1}{G_{33}}x^2t;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\bar{x}^1 = x^1,\\
\bar{x}^2 = x^2 + x^3\mu - \dfrac{1}{2G_{33}}x^1\mu^2,\\
\bar{x}^3 = x^3 - \dfrac{1}{G_{33}}x^1\mu;
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1, \\ \bar{x}^2 = x^2 e^{\phi}, \\ \bar{x}^3 = x^3 e^{\frac{\phi}{2}}. \end{cases}$$

Группа $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит из композиций полученных преобразований. Ясно, что $Aut(\mathcal{P})_e$ будет действовать транзитивно на $int(P_e)$, $\partial P_e \setminus \{e\}$, $G_3 \setminus (P_e \cup P_e^-)$. Следовательно, на группе $G_3VI_{0_2}$ порядок является int – однородным, ∂ – однородным, ext – однородным одновременно (причем метрика плоская).

7. G_3VII

Выпишем метрику
$g_{11} = \dfrac{1}{2}e^{-2\alpha x^3}(V_1 + G_{22} + (V_1 - G_{22})\cos 2\beta x^3)$,
$g_{12} = \dfrac{1}{2}e^{-2\alpha x^3}(V_1 - G_{22})\sin 2\beta x^3$,
$g_{22} = \dfrac{1}{2}e^{-2\alpha x^3}(V_1 + G_{22} - (V_1 - G_{22})\cos 2\beta x^3)$,
$g_{33} = G_{33},\ \ 0 < \beta < 1,\ \alpha = \sqrt{1-\beta^2}$.
Обозначим $V_1 + G_{22} = B$, $V_1 - G_{22} = C$.
Тогда уравнения Киллинга имеют вид

$$-b_i^3 x^i(\alpha(B + C\cos 2\beta x^3) + \beta C\sin 2\beta x^3) + (B + Cb_1^1\cos 2\beta x^3) +$$
$$+ Cb_1^2 \sin 2\beta x^3 = \frac{\lambda}{2}(B + C\cos 2\beta x^3),$$

$$-2b_i^3 x^i(\alpha C\sin 2\beta x^3 - \beta C\cos 2\beta x^3) + (B + C\cos 2\beta x^3)b_2^1 + C(b_1^1 + b_2^2)\sin 2\beta x^3 +$$
$$+(B - C\cos 2\beta x^3)b_1^2 = \lambda C\sin 2\beta x^3,$$

$$(B + C\cos 2\beta x^3)b_3^1 + Cb_3^2\sin 2\beta x^3 + 2G_{33}e^{2\alpha x^3}b_1^3 = 0,$$

$$-b_i^3 x^i(\alpha(B - C\cos 2\beta x^3) - \beta C\sin 2\beta x^3) + Cb_2^1\sin 2\beta x^3 +$$
$$+(B - C\cos 2\beta x^3)b_2^2 = \frac{\lambda}{2}(B - C\cos 2\beta x^3),$$

$$Cb_3^1\sin 2\beta x^3 + (B - C\cos 2\beta x^3)b_3^2 + 2G_{33}e^{2\alpha x^3}b_2^3 = 0,$$

$$b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Получаем два возможных случая:
A) $C = 0,\ b_3^1 = 0,\ b_1^3 = 0$;
B) $B = 0,\ b_3^1 = 0,\ b_1^3 = 0,\ b_3^2 = 0$.

Рассмотрим случай A).

Имеем: $C = 0,\ b_3^1 = 0,\ b_1^3 = 0$. Нетрудно заметить, что $b_3^2 = 0, b_2^3 = 0, b_2^1 = -b_1^2$, $b_3^3 = 0$, $\lambda = 0$, $b_1^1 = 0$, $b_2^2 = 0$. Окончательно получаем $\xi^i = (b_2^1 x^2,\ -b_2^1 x^1,\ 0)$. Вектор Киллинга имеет вид $\xi^i_{(1)} = (x^2,\ -x^1,\ 0)$. Интегрируя систему (2), получаем

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 \cos t + x^2 \sin t, \\ \bar{x}^2 = -x^1 \sin t + x^2 \cos t, \\ \bar{x}^3 = x^3. \end{cases}$$

Группа $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит из преобразований данного вида. Эти преобразования подходят под условия Предложения 2. Следовательно, порядок не будет $int -$, $\partial -$, $ext -$ однородным.

Рассмотрим случай B).

Имеем: $B = 0,\ b_3^1 = 0,\ b_1^3 = 0,\ b_3^2 = 0$. Находим $b_2^3 = 0$, $b_3^3 = 0$, $\lambda = 0$, $b_1^1 = 0,\ b_1^2 = 0, b_2^2 = 0,\ b_2^1 = 0$.
В итоге получаем $\xi^i = (0, 0, 0)$. Вывод: порядок не будет $int -$, $\partial -$, $ext -$ однородным.

8. $G_3 VII_0$

Метрика имеет вид

$$g_{11} = \frac{1}{2}(V_1 + G_{22} + (V_1 - G_{22}) \cos 2x^3),$$

$$g_{12} = \frac{1}{2}(V_1 - G_{22}) \sin 2x^3,$$

$$g_{22} = \frac{1}{2}(V_1 + G_{22} - (V_1 - G_{22}) \cos 2x^3),$$

$$g_{33} = G_{33}.$$

Обозначим $V_1 + G_{22} = B$, $V_1 - G_{22} = C$.
Выпишем уравнения Киллинга:

$$-b_i^3 x^i C \sin 2x^3 + (B + C \cos 2x^3) b_1^1 + C b_1^2 \sin 2x^3 = \frac{\lambda}{2}(B + C \cos 2x^3),$$

$$2b_i^3 x^i C \cos 2x^3 + (B + C \cos 2x^3) b_2^1 + C(b_1^1 + b_2^2) \sin 2x^3 + \\ +(B - C \cos 2x^3) b_1^2 = \lambda(C \sin 2x^3),$$

$$(B + C \cos 2x^3) b_3^1 + C b_3^2 \sin 2x^3 + 2G_{33} b_1^3 = 0,$$

$$b_i^3 x^i C \sin 2x^3 + C b_2^1 \sin 2x^3 + (B - C \cos 2x^3) b_2^2 = \frac{\lambda}{2}(B - C \cos 2x^3),$$

$$Cb_3^1 \sin 2x^3 + (B - C\cos 2x^3)b_3^2 + 2G_{33}b_2^3 = 0,$$

$$b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Уравнения выполняются при условии, что $Cb_3^1 = 0$, $Bb_3^1 + 2G_{33}b_1^3 = 0$, $Cb_3^2 = 0$. Это возможно, если:
A) $b_3^1 = 0$, $b_1^3 = 0$, $b_3^2 = 0$;
B) $C = 0$, $b_1^3 = -b_3^1 \dfrac{V_1}{G_{33}}$.

Рассмотрим случай A).
Имеем: $b_3^1 = 0$, $b_1^3 = 0$, $b_3^2 = 0$. Следовательно, $b_1^1 = 0$, $b_1^2 = 0$, $b_2^1 = 0$, $b_2^2 = 0$, $b_2^3 = 0$, $b_3^3 = 0$ и $\lambda = 0$. Значит, $\xi^i = (0,0,0)$. Порядок не будет $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным.
Рассмотрим случай B).
$C = 0$, $b_1^3 = -b_3^1 \dfrac{V_1}{G_{33}}$. Имеем: $b_1^1 = \dfrac{\lambda}{2}$, $b_2^1 = -b_1^2$, $b_2^2 = \dfrac{\lambda}{2}$, $b_2^3 = -\dfrac{V_1}{G_{33}} b_3^2$, $b_3^3 = \dfrac{\lambda}{2}$.
Обозначим $D = \sqrt{-\dfrac{V_1}{G_{33}}}$. Тогда
$\xi^i = (\dfrac{\lambda}{2}x^1 + b_2^1 x^2 + b_3^1 x^3,\ -b_2^1 x^1 + \dfrac{\lambda}{2}x^2 + b_3^2 x^3,\ D^2 b_3^1 x^1 + D^2 b_3^2 x^2 + \dfrac{\lambda}{2}x^3)$.
Векторы Киллинга имеют вид $\xi^i_{(1)} = (x^1,\ x^2,\ x^3)$, $\xi^i_{(2)} = (x^2,\ -x^1,\ 0)$, $\xi^i_{(3)} = (x^3,\ 0,\ D^2x^1)$, $\xi^i_{(4)} = (0,\ x^3,\ D^2x^2)$. Интегрируя систему (2) для каждого $\xi^i_{(n)}$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, получаем

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 e^t, \\ \bar{x}^2 = x^2 e^t, \\ \bar{x}^3 = x^3 e^t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 \cos\mu + x^2 \sin\mu, \\ \bar{x}^2 = -x^1 \sin\mu + x^2 \cos\mu, \\ \bar{x}^3 = x^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 \operatorname{ch} D\varphi + \dfrac{x^3}{D} \operatorname{sh} D\varphi, \\ \bar{x}^2 = x^2, \\ \bar{x}^3 = D(x^1 \operatorname{sh} D\varphi + \dfrac{x^3}{D} \operatorname{ch} D\varphi); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1, \\ \bar{x}^2 = x^2 \operatorname{ch} D\psi + \dfrac{x^3}{D} \operatorname{sh} D\psi, \\ \bar{x}^3 = D(x^2 \operatorname{sh} D\psi + \dfrac{x^3}{D} \operatorname{ch} D\psi). \end{cases}$$

Группа $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит из группы Лоренца и подобий. Известно, что группа Лоренца действует транзитивно на $int(P_e)$, $\partial P_e \setminus \{e\}$, $G_3 \setminus (P_e \cup P_e^-)$. Следовательно, на группе G_3VII_0 в случае, когда $G_{22} = V_1$, аффинный причинный порядок является $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным.

Теперь рассмотрим разрешимые группы Ли G_3 класса 2.

9. G_3III

Метрика имеет вид $g_{13}=1$, $g_{22}=V_2e^{-2x^3}$.
Запишем уравнения Киллинга:

$$2b_1^3=0,$$
$$V_2e^{-2x^3}b_1^2+b_2^3=0,$$
$$b_3^3+b_1^1=\lambda,$$
$$-b_i^3x^i+b_2^2=\frac{\lambda}{2},$$
$$V_2e^{-2x^3}b_3^2+b_2^1=0,$$
$$2b_3^1=0.$$

Решая уравнения, получаем: $b_1^1=\lambda$, $b_1^2=0$, $b_1^3=0$, $b_2^1=0$, $b_2^2=\dfrac{\lambda}{2}$, $b_3^1=0$, $b_3^2=0$, $b_3^3=0$ и $\lambda=const$. Тогда окончательно имеем, что $\xi^i=(\lambda x^1,\ \dfrac{\lambda}{2}x^2,\ 0)$. Вектор Киллинга будет иметь следующий вид $\xi^i_{(1)}=(x^1,\ \dfrac{1}{2}x^2,\ 0)$. Интегрируя систему (2), получаем

$$\begin{cases}\bar{x}^1=x^1e^t,\\ \bar{x}^2=x^2e^{\frac{t}{2}},\\ \bar{x}^3=x^3.\end{cases}$$

Группа $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит из полученных преобразований. Используя Предложение 2 можно сделать вывод, что аффинный причинный порядок не является $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным.

10. G_3V

Метрика имеет вид $g_{13}=e^{-x^3}$, $g_{22}=V_2e^{-2x^3}$.
Рассмотрим уравнения Киллинга:

$$2e^{-x^3}b_1^3=0,$$
$$e^{-x^3}b_2^3+V_2e^{-2x^3}b_1^2=0,$$
$$-b_i^3x^i+b_1^1+b_3^3=\lambda,$$
$$-b_i^3x^i+b_2^2=\frac{\lambda}{2},$$
$$V_2e^{-2x^3}b_3^2+e^{-x^3}b_2^1=0,$$
$$2e^{-x^3}b_3^1=0.$$

Следовательно, $b_1^1 = \lambda$, $b_1^2 = 0$, $b_1^3 = 0$, $b_2^1 = 0$, $b_2^2 = \dfrac{\lambda}{2}$, $b_3^1 = 0$, $b_3^2 = 0$, $b_3^3 = 0$ и $\lambda = const$. Тогда окончательно имеем, что $\xi^i = (\lambda x^1,\ \dfrac{\lambda}{2}x^2,\ 0)$. Повторяя рассуждения, получаем, что аффинный причинный порядок не является является $int-$, $\partial-$, $ext-$ однородным.

Теорема 2 доказана.

В остальных связных односвязных разрешимых группах Ли аффинный причинный порядок не существует [1].

4.2. Доказательство теоремы 3

Как известно, аффинное преобразование, сохраняющее изотропные векторы, будет конформным. Для группы Ли конформных преобразований вида

$$f^i = \sum_{k=1}^{3} a_k^i x^k + \alpha^i$$

векторы Киллинга имеют вид

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{3} b_k^i x^k + \beta^i.$$

Обозначим $b_j^m = \dfrac{\partial \xi^m}{\partial x^3}$. Напомним, что метрика на группах Ли зависит только от x^3. Тогда уравнения Киллинга для векторов ξ^i можно записать в следующем виде:

$$(b_s^3 x^s + \beta^3)\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3} + g_{in} b_k^n + g_{km} b_i^m = \lambda g_{ik}.$$

Для доказательства теоремы надо найти λ. Если $\lambda = 0$, то $H \subset Isom(G_3)$; если $\lambda = const$, то $H \subset Hom(G_3)$; если $\lambda = \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ - некоторая функция x, то $H \subset Conf(G_3)$.

Сначала рассмотрим группы Ли G_3 класса 1.
Левоинвариантные метрики на группах Ли G_3 класса 1 имеют вид:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x^3) & g_{12}(x^3) & 0 \\ g_{12}(x^3) & g_{22}(x^3) & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix}.$$

Выпишем уравнение Киллинга для пары (ik) равной (33): $b_3^3 = \dfrac{\lambda}{2}$. Следовательно, $\lambda = const$, и $H \subset Hom(G_3)$.

Рассмотрим группы, у которых метрика не является плоской.

1. G_3II

Метрика имеет вид $g_{11} = G_{11}$, $g_{12} = -G_{11}x^3$, $g_{22} = V_2 + G_{11}(x^3)^2$, $g_{33} = G_{33}$. Рассмотрим уравнения Киллинга , соответствующие парам (ik) : (11), (12), (22):

$$b_1^1 - x^3 b_1^2 = \frac{\lambda}{2},$$
$$-(b_i^3 x^i + \beta^3)G_{11} + G_{11}b_2^1 - G_{11}x^3(b_1^1 + b_2^2) + (V_2 + G_{11}x^{3^2})b_1^2 = -\lambda G_{11}x^3,$$
$$(b_i^3 x^i + \beta^3)G_{11}x^3 - G_{11}x^3 b_2^1 + (V_2 + G_{11}x^{3^2})b_2^2 = \lambda(V_2 + G_{11}x^{3^2}).$$

Решая уравнения, получаем, что $b_2^2 = \dfrac{\lambda}{2}$, и $b_2^2 = 0$, следовательно, $\lambda = 0$, т.е. $H \subset Isom(G_3II)$.

2. G_3III

2.1. G_3III_1

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 e^{-2x^3}$, $g_{12} = G_{12}e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2$, $g_{33} = G_{33}$. Выпишем уравнения Киллинга для пары (ik) равной (11), (33)

$$-(b_i^3 x^i + \beta^3)V_1 + +V_1 b_1^1 + G_{12}e^{-x^3}b_1^3 = \frac{\lambda}{2}V_1,$$
$$b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Нетрудно заметить, что $b_i^3 = 0$, $i = 1,2,3$. Тогда $\lambda = 0$, и $H \subset Isom(G_3III_1)$.

2.2. G_3III_2

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 e^{-2x^3}$, $g_{12} = e^{-x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

2.3. G_3III_3

Метрика имеет вид $g_{11} = e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2$, $g_{33} = G_{33}$.

2.4. G_3III_4

Метрика имеет вид $g_{12} = e^{-x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

Повторяя аналогичные вычисления и рассуждения, получаем $\lambda = 0$ и $H \subset Isom(G_3III_2)$, $H \subset Isom(G_3III_3)$, $H \subset Isom(G_3III_4)$.

Вывод: для группы Ли G_3III $H \subset Isom(G_3)$.

3. G_3IV

3.1. G_3IV_1

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 e^{-2x^3}$, $g_{12} = -V_1 x^3 e^{-2x^3}$, $g_{22} = (G_{22} + V_2(x^3)^2)e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

В ходе доказательства Теоремы 2 получили, что $\lambda = 0$ и, следовательно, $H \subset Isom(G_3IV_1)$.

3.2. G_3IV_2

Метрика имеет вид $g_{12} = e^{-2x^3}$, $g_{22} = -2x^3e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.
Рассмотрим уравнения Киллинга, соответствующее парам $(ik) : (11), (12), (33)$:

$$2e^{-2x^3}b_1^2 = 0,$$
$$-2(b_i^3x^i + \beta^3) + b_1^1 + b_2^2 - 2x^3b_1^2 = \lambda,$$
$$b_3^3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Нетрудно заметить, что $b_1^2 = \dfrac{\lambda}{2}$, $b_i^3 = 0$, $i = 1, 2, 3$, следовательно, $\lambda = 0$, значит, $H \subset Isom(G_3IV_2)$.

Вывод: для группы Ли G_3IV $H \subset Isom(G_3IV)$.

4. G_3V

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{22} = V_1x^3e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

В ходе доказательства Теоремы 2 получили, что $\lambda = 0$. Откуда следует, что $H \subset Isom(G_3V)$.

5. G_3VI

5.1. G_3VI_1

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{12} = G_{12}e^{-(1+\alpha)x^3}$, $g_{22} = V_2e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

В ходе доказательства Теоремы 2 получили, что $\lambda = 0$ и, следовательно, $H \subset Isom(G_3VI_1)$.

5.2. G_3VI_2

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{12} = e^{-(1+\alpha)x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

5.3. G_3VI_3

Метрика имеет вид $g_{12} = e^{-(1+\alpha)x^3}$, $g_{22} = V_2e^{-2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

Повторяя аналогичные вычисления, получаем $\lambda = 0$ и $H \subset Isom(G_3VI_2)$, $H \subset Isom(G_3VI_3)$.

Вывод: для группы Ли G_3VI класса 1 $H \subset Isom(G_3VI)$.

6. G_3VI_0

6.1. $G_3VI_{1_0}$

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{12} = G_{12}$, $g_{22} = V_2e^{2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

В ходе доказательства Теоремы 2 получили $\lambda = 0$. Следовательно, $H \subset Isom(G_3VI_{1_0})$.

6.2. $G_3VI_{0_3}$

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1e^{-2x^3}$, $g_{12} = 1$, $g_{33} = G_{33}$.

6.3. $G_3VI_{0_4}$

Метрика имеет вид $g_{12} = 1$, $g_{22} = V_2e^{2x^3}$, $g_{33} = G_{33}$.

Повторяя аналогичные вычисления, получаем $\lambda = 0$ и, следовательно, $H \subset Isom(G_3VI_{0_3})$, $H \subset Isom(G_3VI_{0_4})$.

Вывод: для группы Ли G_3VI_0 класса 1, если метрика не плоская, то $H \subset Isom(G_3VI_0)$.

7. G_3VII

В ходе доказательства Теоремы 2 получили $\lambda = 0$. Следовательно, $H \subset Isom(G_3VII)$.

8. G_3VII_0

В случае, когда метрика не плоская, в ходе доказательства Теоремы 2 получили, что $\lambda = 0$. Значит, $H \subset Isom(G_3VII_0)$.

Рассмотрим группы Ли класса 2.

9. G_3II

Метрика имеет вид $g_{13} = 1$, $g_{22} = V_2$, $g_{23} = -x^3$.
Выпишем уравнение Киллинга для пары (ik) равной (11), (13)

$$b_1^3 = 0,$$
$$b_1^1 + b_3^3 + V_2b_1^2 - x^3b_1^3 = \lambda.$$

Получаем, что $\lambda = const$, значит, $H \subset Hom(G_3II)$.

10. G_3III

10.1. G_3III_1

Метрика имеет вид $g_{11} = V_2(e^{-x^3} - 1)$, $g_{12} = e^{-x^3} - 1$, $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2$.
Уравнение Киллинга для пары (ik) равной (11), (12), (33):

$$(e^{-x^3} - 1)b_2^1 + V_2 b_2^2 = \frac{\lambda}{2} V_2,$$
$$(e^{-x^3} - 1)b_3^1 + V_2 b_3^2 + G_{13}e^{-x^3} b_2^1 = 0,$$
$$2(e^{-x^3} - 1)b_3^1 = 0.$$

Следовательно, $\lambda = const$, и $H \subset Hom(G_3III_1)$.

10.2. G_3III_2

Метрика имеет вид $g_{13} = 1$, $g_{22} = V_2 e^{-2x^3}$.
В ходе доказательства Теоремы 2 получили, что $\lambda = const$. Откуда следует, что $H \subset Hom(G_3III_3)$.

10.3. G_3III_3

Метрика имеет вид $g_{13} = e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2$.
Выпишем уравнение Киллинга для пары пары (ik) равной (22)

$$V_2 b_2^2 = \frac{\lambda}{2} V_2.$$

Получаем, что $\lambda = const$ и $H \subset Hom(G_3III_3)$.

Вывод: для группы Ли G_3III класса 2 $H \subset Hom(G_3III)$.

11. G_3IV

11.1. G_3IV_1

Метрика имеет вид $g_{11} = V_1 {x^3}^2 e^{-2x^3}$, $g_{12} = -V_2 x^3 e^{-2x^3}$, $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$,
$g_{22} = V_2 e^{-2x^3}$.
Выпишем уравнения Киллинга

$$V_2(b_i^3 x^i + \beta^3)(x^3 - {x^3}^2) + V_2 {x^3}^2 b_1^1 - V_2 x^3 b_1^2 + G_{13} e^{x^3} b_1^3 = \frac{\lambda}{2} V_2 {x^3}^2,$$
$$-(b_i^3 x^i + \beta^3)V_2(1 - 2x^3) + V_2 {x^3}^2 b_2^1 - V_2 x^3 (b_1^1 + b_2^2) + V_2 b_1^2 +$$
$$+ G_{13} e^{x^3} b_2^3 = -\lambda V_2 x^3,$$
$$-(b_i^3 x^i + \beta^3)G_{13} + V_2 {x^3}^2 e^{-x^3} b_3^1 - V_2 x^3 e^{-x^3} b_3^2 + + G_{13}(b_1^1 + b_3^3) = \lambda G_{13},$$
$$-(b_i^3 x^i + \beta^3)V_2 - V_2 x^3 b_3^1 + V_2 b_2^2 = \frac{\lambda}{2} V_2,$$
$$-V_2 x^3 e^{-2x^3} b_3^1 + V_2 e^{-2x^3} b_3^2 + G_{13} e^{-x^3} b_2^1 = 0,$$
$$2G_{13} e^{-x^3} b_3^1 = 0.$$

Получаем, что $\lambda = 0$ и $H \subset Isom(G_3IV_1)$.

11.2. G_3IV_2

Метрика имеет вид $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$, $g_{22} = -V_2e^{-2x^3}$, $g_{23} = -G_{13}x^3e^{-x^3}$.
Повторяя аналогичные вычисления, получаем $H \subset Isom(G_3IV_2)$.
Вывод: для группы Ли G_3IV класса 2 $H \subset Isom(G_3IV)$.

12. G_3V

В ходе доказательства Теоремы 2 получили $\lambda = const$. Следовательно, $H \subset Hom(G_3V)$.

13. G_3VI

13.1. G_3VI_1

Метрика имеет вид $g_{11} = V_2(e^{-x^3} - e^{-\alpha x^3})$, $g_{12} = e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3}$, $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2e^{-2\alpha x^3}$.
Уравнения Киллинга имеют вид:

$$-(b_i^3x^i + \beta^3)V_2(e^{-x^3} - e^{-\alpha x^3})(e^{-x^3} - \alpha e^{-\alpha x^3}) + V_2(e^{-x^3} - e^{-\alpha x^3})b_1^1 +$$

$$+(e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3})b_1^2 + G_{13}e^{-x^3}b_1^3 = \frac{\lambda}{2}V_2(e^{-x^3} - e^{-\alpha x^3})^2,$$

$$-(b_i^3x^i + \beta^3)((1+\alpha)e^{-(1+\alpha)x^3} - 2\alpha e^{-2\alpha x^3}) + V_2(e^{-x^3} - e^{-\alpha x^3})^2 b_2^1 +$$

$$+(e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3})(b_1^1 + b_2^2) + G_{13}e^{-x^3}b_2^3 + V_2e^{-2\alpha x^3}b_1^2 = \lambda(e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3}),$$

$$-(b_i^3x^i + \beta^3)G_{13}e^{-x^3} + V_2(e^{-x^3} - e^{-\alpha x^3})^2 b_3^1 + (e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3})b_3^2 +$$

$$+G_{13}e^{-x^3}(b_1^1 + b_3^3) = \lambda G_{13}e^{-x^3},$$

$$-(b_i^3x^i + \beta^3)\alpha V_2e^{-2x^3} + (e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3})b_2^1 + V_2e^{-2\alpha x^3}b_2^2 = \frac{\lambda}{2}V_2e^{-2\alpha x^3},$$

$$(e^{-(1+\alpha)x^3} - e^{-2\alpha x^3})b_3^1 + V_2e^{-2\alpha x^3}b_3^2 + G_{13}e^{-x^3}b_2^1 = 0,$$

$$2G_{13}e^{-x^3}b_3^1 = 0.$$

Решая получившиеся уравнения, находим, что $\lambda = const$.
Тогда $H \subset Hom(G_3VI_1)$.

13.2. G_3VI_2

Метрика имеет вид $g_{13} = G_{13}e^{-\alpha x^3}$, $g_{22} = V_2 e^{-2x^3}$.
Повторяя аналогичные вычисления, получаем $H \subset Hom(G_3VI_2)$.

13.3. G_3VI_3

Метрика имеет вид $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2 e^{-2\alpha x^3}$.
Выпишем уравнения Киллинга:

$$\begin{gathered}
2G_{13}e^{-x^3}b_3^1 = 0,\\
V_2 x^3 e^{-2\alpha x^3} b_1^2 + G_{13}e^{-x^3}b_2^3 = 0,\\
-(b_i^3 x^i + \beta^3)G_{13}e^{-x^3} + G_{13}e^{-x^3}(b_1^1 + b_3^3) = \lambda G_{13}e^{-x^3},\\
-\alpha(b_i^3 x^i + \beta^3)V_2 e^{-2\alpha x^3} + V_2 e^{-2\alpha x^3} b_2^2 = \frac{\lambda}{2} V_2 e^{-2\alpha x^3},\\
V_2 e^{-2\alpha x^3} b_3^2 + G_{13}e^{-x^3} b_2^1 = 0,\\
2G_{13}b_3^1 = 0.
\end{gathered}$$

Уравнения имеют решения в двух случаях, если $b_i^3 = 0$ или $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
В первом очевидно, что $\lambda = const$ и $H \subset Hom(G_3VI_1)$.
Во втором случае получаем $\lambda = \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ - некоторая функция x, следовательно, $H \subset Conf(G_3VI_3)$.

14. G_3VI_0

14.1. $G_3VI_{0_1}$

Метрика имеет вид $g_{11} = V_2(e^{-x^3} - e^{x^3})^2$, $g_{12} = 1 - e^{2x^3}$, $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2 e^{2x^3}$.

14.2. $G_3VI_{0_2}$

Метрика имеет вид $g_{13} = G_{13}e^{x^3}$, $g_{22} = V_2 e^{-2x^3}$.

14.3. $G_3VI_{0_3}$

Метрика имеет вид $g_{13} = G_{13}e^{-x^3}$, $g_{22} = V_2 e^{2x^3}$.
Повторяя аналогичные вычисления, получаем $H \subset Hom(G_3VI_0)$.

15. G_3VII

Метрика имеет вид $g_{11} = \dfrac{1}{2}V_2 e^{-2\alpha x^3}(1 - \cos 2\beta x^3)$, $g_{12} = -\dfrac{1}{2}V_2 e^{-2\alpha x^3}\sin 2\beta x^3$, $g_{13} = G_{13}e^{-\alpha x^3}\cos\beta x^3$, $g_{22} = \dfrac{1}{2}V_2 e^{-2x^3}(1 + \cos 2\beta x^3)$, $g_{23} = G_{13}e^{-\alpha x^3}\sin\beta x^3$.

16. G_3VII_0

Метрика имеет вид $g_{11} = \dfrac{1}{2}V_2(1 - \cos 2x^3)$, $g_{12} = -\dfrac{1}{2}V_2 \sin 2x^3$, $g_{13} = G_{13}\cos x^3$, $g_{22} = \dfrac{1}{2}V_2(1 + \cos 2x^3)$, $g_{23} = G_{13}\sin x^3$.

Повторяя аналогичные вычисления, получаем $H \subset Hom(G_3VII_0)$.

Теорема 3 доказана.

Литература

1. Абдрахимова, Н.Р. Классификация аффинных порядков на трехмерных связных односвязных разрешимых группах Ли / Н.Р. Абдрахимова. // IX Всесоюзная геометрическая конференция. Тезисы докладов. – Кишинев. – 1988. – С. 3.
2. Абдрахимова, Н.Р. Синтетическая теория аффинных лоренцевых многообразий и упорядоченных групп Ли / Н.Р. Абдрахимова, А.К. Гуц, Н.Л. Шаламова // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303, N. 4. – С. 777–781.
3. Александров, А.Д. Конусы с транзитивной группой / А.Д. Александров // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 189, N. 4. – С. 695–698.
4. Винберг, Э.Б. Теория однородных выпуклых конусов / Э.Б. Винберг // Тр. ММО. – 1963. – Т. 12. – С. 302–358.
5. Гаврилов, С.П. Левоинвариантные метрики на однородных разрешимых группах Ли./ С.П. Гаврилов // Теория относительности и гравитация. – Казань: КГУ. – 1985. – N. 22. – С. 31–64.
6. Гуц, А.К. Порядковые и пространственно-временные структуры на однородных многообразиях / А.К. Гуц // Дис. док. физ.-мат. наук. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР – 1987. – 204 с.
7. Yamagychi, S. On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups / S. Yamagychi // Mem. of Faculty of Scince Kyuchu Univ. – 1979. – V. A33. – P. 209–218.
8. Milnor, J. On fundamental groups of complete affinely flat manifolds / J. Milnor // Advances in Math. – 1977. – V. 25., N. 2. – P. 178-187.