Математические структуры и моделирование
2009, вып. 20, с. 74–77

УДК 530.12:531.51

СЕМЕЙСТВО Ω-ОБРАЗНЫХ КРИВЫХ, МОДЕЛИРУЮЩЕЕ ОТДЕЛЕНИЕ СФЕРЫ S^1

Е.В. Палешева

В работе приводится построение семейства Ω-образных C^1-кривых, с помощью которых можно построить модель отделения от кривой второго порядка сферы S^1. Каждая кривая образована склеиванием окружности с гиперболой. В точках склеивания вторая производная терпит разрыв.

Введение

Ранее в работах [1–4] была предложена процедура создания 4-мерной кротовой норы. Для этого необходимо произвести разрыв замкнутого 3-мерного пространства на два куска, 4-мерное пространство-время становится 2-связным. В [5] было проведено исследование вопроса, связанного с образованием в пространстве-времени 4-мерной ручки (кротовой норы) с топологической точки зрения. Так как до сих пор не были получены решения уравнений Эйнштейна, содержащие 4-мерные кротовые норы, мы попытаемся восполнить этот пробел. В данной работе приводится семейство кривых, с помощью которого можно построить модель разрыва одномерного пространства на два несвязных куска. На завершающем этапе будет получена прямая, склеенная с окружностью в одной точке. При этом первоначальной кривой является прямая линия. Указанное семейство мы назовем Ω-образным. На этапе построения Ω-образного семейства приводится семейство ω-кривых, в дальнейшем будем их использовать для моделирования аналогичного разрыва 2-мерных и 3-мерных пространств, на которых определим метрический тензор. Для построения семейства Ω-образных кривых произведем склейку гиперболы и окружности в заданной области.

1. Семейства гипербол и касательных окружностей

Рассмотрим кривую второго порядка $G(\lambda, \mu; x, y) = 0$, $y > 0$, где

$$G(\lambda, \mu; x, y) = (\lambda^2 - \mu^2)y^2 + 2\lambda\mu xy - \lambda^4. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что данная кривая является гиперболой. Ее асимптоты представлены уравнениями $y = 0$, $y = 2\mu x/\lambda(\mu^2 - 1)$, фокальная ось задается

Омский государственный университет.
E-mail: paleshevа@cmm.univer.omsk.su

соотношением $y = \lambda x/\mu$, а точка ее пересечения с кривой имеет координаты $(\lambda\mu/\sqrt{\lambda^2+\mu^2},\ \lambda^2/\sqrt{\lambda^2+\mu^2})$. Следует заметить, что данная гипербола может быть также представлена как $x_{\lambda\mu}(y)$ однозначным образом для любого $y > 0$:

$$x_{\lambda\mu}(y) = \frac{\lambda^4 - (\lambda^2-\mu^2)y^2}{2\mu\lambda y}, \quad y > 0. \tag{2}$$

При этом в точке $(\lambda\sqrt{\mu^2-\lambda^2}/\mu,\ \lambda^2/\sqrt{\mu^2-\lambda^2})$ кривая $x_{\lambda\mu}(y)$ имеет минимум при условии $\lambda < \mu$ и значение указанной функции в данной точке наименьшее. Других экстремумов функция (2) не имеет.

Рассмотрим окружность $S^1(\lambda,\mu,\nu;x,y) = 0$, где

$$S^1(\lambda,\mu,\nu;x,y) = x^2 + \left(y - \frac{(\mu^2+\lambda^2)^2\nu^4 - \lambda^8}{4\mu^2\lambda^2\nu^3}\right)^2 - \tag{3}$$
$$- \frac{(\lambda^4 + (\mu^2-\lambda^2)\nu^2)^2}{4\mu^2\lambda^2\nu^2} - \frac{\left((\mu^2-\lambda^2)^2\nu^4 - \lambda^8\right)^2}{16\mu^4\lambda^4\nu^6}.$$

Элементарными вычислениями проверяется, что данная окружность является касательной к рассмотренной гиперболе в точке $M_\nu = (x_{\lambda\mu}(\nu),\nu)$. Следует также заметить, что в точке пересечения гиперболы со своей фокальной осью касательная окружность принимает вид: $x^2 + y^2 = \lambda^2$.

2. Семейство Ω-образных кривых

Вначале построим семейство кривых, которые будем называть ω-кривыми, оно будет определено при $x \geq 0$, $y > 0$. В дальнейшем семейство двумерных поверхностей, моделирующее отрыв сферы S^2 от плоскости, можно получить вращением соответствующих ω-кривых вокруг оси OY.

2.1. Построение ω-кривых

Определим функцию $\omega(\lambda,\mu,\nu;x,y)$ по следующему правилу:

$$\omega(\lambda,\mu,\nu;x,y) = \begin{cases} G(\lambda,\mu;x,y), & \text{если } 0 < y \leq \nu, \\ S^1(\lambda,\mu,\nu;x,y), & \text{если } y > \nu. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $G(\lambda,\mu;x,y)$ и $S^1(\lambda,\mu,\nu;x,y)$ функции (1) и (3) соответственно. При этом $x \geq 0$. Тогда неявная функция $\omega(\lambda,\mu,\nu;x,y) = 0$ определит ω-кривую при фиксированных параметрах λ, μ и ν. При условии $\lambda,\mu,\nu > 0$ и $x,y > 0$ данные кривые непрерывны по построению вместе со своими первыми производными. Вторая производная в точке склеивания является разрывной. Вид приведенной ω-кривой при $\mu = 0$ получаем предельным переходом. Если $\mu \to 0$, то функция $\omega(\lambda,\mu,\nu;x,y) = 0$ вырождается в прямую $y = \lambda$.

Построение семейства кривых, с помощью которых в дальнейшем можно получить семейство поверхностей, моделирующих отрыв сферы S^2 от плоскости, проводится путем изменения параметров μ, λ, ν в три этапа.

(1) **Выдавливание полуокружности из прямой.** Положим $\lambda = \lambda_0 > 0$ и $\nu = \lambda_0^2/\sqrt{\lambda_0^2+\mu^2}$, т.е. окружность[1] и гипербола касаются друг друга в точке, лежащей на фокальной оси гиперболы. Уравнение кривой принимает вид

$$\omega\left(\lambda_0, \mu, \frac{\lambda_0^2}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu^2}}; x, y\right) = 0, \quad \mu \in [0, \mu_1]. \tag{5}$$

Параметр μ меняем от $\mu_0 = 0$ (график соответствует прямой) до значения $\mu = \mu_1 > \lambda_0$, при котором $\nu = \lambda_0^2/\sqrt{\lambda_0^2+\mu_1^2}$.

(2) **Образование «перемычки».** Увеличиваем ν от $\nu_1 = \lambda_0^2/\sqrt{\lambda_0^2+\mu_1^2}$ до $\nu_2 = 2\lambda_0^2/\sqrt{\mu_1^2-\lambda_0^2}$ при постоянных $\lambda = \lambda_0$ и $\mu = \mu_1$. На этом этапе центр окружности смещается вверх по оси OY. Радиус окружности сначала уменьшается до значения $\lambda_0\sqrt{\mu_1^2-\lambda_0^2}/\mu_1^2$ (которое соответствует касанию в точке экстремума), а затем увеличивается. При этом точка касания лежит выше точки экстремума, таким образом образуется перемычка. Конечное значение ν_2 в два раза больше ординаты точки экстремума гиперболы[2]. Кривая имеет вид

$$\omega\left(\lambda_0, \mu_1, \nu; x, y\right) = 0, \quad \nu \in [\nu_1, \nu_2]. \tag{6}$$

(3) **Стягивание «перемычки» в точку.** Уменьшаем λ от λ_0 до $\lambda_1 = 0$ при $\mu = \mu_1$, а также $\nu = 2\lambda^2/\sqrt{\mu_1^2-\lambda^2}$. Радиус окружности и абсцисса точки касания уменьшаются. Уравнение кривой при $\lambda_1 \neq 0$ имеет вид

$$\omega\left(\lambda, \mu_1, \frac{2\lambda^2}{\sqrt{\mu_1^2-\lambda^2}}; x, y\right) = 0, \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]. \tag{7}$$

Осуществляя предельный переход кривой (7) при $\lambda \to 0$ получим

$$\begin{cases} y = 0, & \text{если } y = 0, \\ x^2 + \left(y - \frac{15}{32}\,\mu_1\right)^2 = \left(\frac{15}{32}\,\mu_1\right)^2, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Напомним, что здесь везде $x \geq 0$. Таким образом, получена полуокружность, склеенная с полупрямой $y = 0$ в точке с координатами $(0, 0)$.

2.2. Построение $\mathbf{\Omega}$-образных кривых

Симметрично продолжая функцию (4) на область $x < 0$, получим

$$\Omega(\lambda, \mu, \nu; x, y) = \begin{cases} G(\lambda, \mu; x, y), & \text{если } 0 < y \leq \nu \text{ и } x \geq 0, \\ S^1(\lambda, \mu, \nu; x, y), & \text{если } y > \nu, \\ G(\lambda, \mu; -x, y), & \text{если } 0 < y \leq \nu \text{ и } x < 0. \end{cases}$$

[1]На этом этапе окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = \lambda_0^2$.

[2]В качестве ν_2 можно выбрать любую величину больше ординаты точки экстремума.

В качестве семейства Ω-образных кривых рассмотрим соответственно симметричное продолжение построенного в предыдущем параграфе семейства ω-кривых на область $x < 0$. При этом все этапы изменения параметров λ, μ и ν остаются без изменения.

В итоге построенное семейство Ω-образных кривых при непрерывном изменении параметров описывает следующие действия. Из прямой $y = \lambda > 0$ постепенно выдавливается с образованием «перемычки» окружность. В результате получается окружность

$$x^2 + \left(y - \frac{15}{32}\mu_1\right)^2 = \left(\frac{15}{32}\mu_1\right)^2,$$

склеенная с прямой $y = 0$ в точке с координатами $(0, 0)$. Теперь останется только оторвать окружность от данной прямой.

Заключение

В данной статье нами было построено семейство Ω-образных C^1-гладких кривых, моделирующих отделение сферы S^1 от прямой. «Перемычка» была стянута в точку, но отрыв полученной окружности от прямой мы не производили. Полученное в данной работе семейство C^1-гладких ω-кривых можно применить для построения поверхностей, моделирующих отрыв сферы соответствующей размерности. Необходимо только предварительно выполнить вращение вокруг заданной оси. Впоследствии на данных поверхностях можно также определить метрический тензор.

Литература

1. Гуц, А.К. Изменение топологии физического пространства в замкнутой вселенной / А.К. Гуц // Известия вузов. Физика. – 1982. N. 5. – С. 23-26.
2. Гуц, А.К. Нарушение связности физического пространства / А.К. Гуц // Известия вузов. Физика. – 1983. N. 8. – С. 3-6.
3. Гуц, А.К. Теория машины времени / А.К. Гуц //В сб.: Фундаментальная и прикладная математика. – Омск: изд-во ОмГУ, 1994. С. 57-66.
4. Гуц, А.К. Элементы теории времени / А.К. Гуц. – Омск: изд-во Наследие. Диалог-Сибирь, 2004. 364 с.
5. Гуц, А.К. Машина времени, разрывы пространства и 4-мерные кротовые норы / А.К. Гуц, Е.В. Палешева // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. – 2005. – N. 7. – С. 138-142.