Математические структуры и моделирование
2009, вып. 20, с. 48–51

УДК 514.12

КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКИ

А.Н. Романов

В статье рассматриваются лоренцевы многообразия, которые, в отличие от римановых, имеют метрики сигнатуры $(- + +...+)$. Приложения лоренцевой геометрии, рассматривающей лоренцевы многообразия, используются в разделах теоретической физики, изучающих свойства пространства-времени.

В статье будут рассматриваться лоренцевы многообразия, в которых условие конечности лоренцевой функции расстояния является инвариантом относительно конформных преобразований метрики (терминология взята из [1]).

В дальнейшем будем использовать следующее утверждение (см. [1], теорема 3.30):

Лемма 1. *Пространство-время (M, g) глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно сильно причинно и (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$.*

Здесь через $C(M, g)$ обозначен класс лоренцевых метрик на многообразии M, глобально конформных метрике $g : g' \in C(M, g) \Leftrightarrow g' = \Omega g$ для некоторой гладкой функции $\Omega : M \to (0, \infty)$.

Разделим лоренцевы многообразия на два непересекающихся класса: A и B. Класс B характеризуется следующим свойством. Пусть между точками $p, s \in M$ выполнены следующие соотношения: $s \in cl(J_p^+)$, но $s \notin J_p^+$. Таким образом любую окрестность U_s точки $s \in M$ можно достичь направленной в будущее причинной кривой γ, выходящей из p, однако сама точка s остаётся недостижимой. Допустим теперь, что имеет место следующая ситуация: существует настолько малая окрестность U_s точки s, что для того, чтобы достичь её направленной в будущее причинной кривой, выходящей из p, необходимо, чтобы, во-первых, эта кривая γ целиком находилась бы в некотором (фиксримановором) компактном множестве K, а, во-вторых, её риманова длина (измеренная в любой заранее выбранной римановой метрике) была бы больше любого заранее заданного положительного числа N. Другими словами, чтобы «подойти» достаточно

Омский государственный университет.
E-mail: aroms@bk.ru

близко к точке s, причинная кривая γ должна совершить достаточно большое количество «оборотов» во множестве K.

Если такая ситуация имеет место в некотором многообразии (M, g), то будем относить его к классу B, в противном случае будем считать данное лоренцево многообразие относящимся к классу A.

В качестве гипотезы можно выдвинуть предположение, что к классу B относятся лишь многообразия, не являющиеся причинными, то есть содержащие замкнутые причинные кривые. Однако это утверждение требует отдельного доказательства. В дальнейшем же будут приведены результаты, касающиеся только лоренцевых многообразий, принадлежащих классу A (даже если это не будет отдельно оговорено).

Следующее утверждение позволяет делать некоторые выводы о топологии лоренцева многообразия, исходя из его причинной структуры.

Лемма 2. *Пусть пространство-время (M, g) принадлежит классу A. Если для некоторых точек $p, s \in M$ множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто в M, а $I_p^+ \cap I_s^- \neq \emptyset$, то тогда (замкнутое) множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным.*

Доказательство. Допустим, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно. Так как множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто, то существует точка $q \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ такая, что $q \notin J_p^+ \cap J_s^-$. В этом случае $q \notin J_p^+$ (случай $q \notin J_s^-$ доказывается аналогично).

Рассмотрим последовательность точек $q_n \subset J_p^+ \cap J_s^-$ такую, что $q_n \to q$, т.е. сходящуюся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M).

Таким образом, имеем:

$$q_n : p \leq q_n, q_n \to q.$$

Так как $p \leq q_n$, то $\forall n$ существует причинная кривая γ_n, идущая из p в q_n. Продолжим γ_n до непродолжаемой причинной кривой. Любая окрестность точки q содержит все точки q_n, начиная с некоторого n. А так как $q_n \in \gamma_n$, то q является точкой накопления последовательности причинных непродолжаемых кривых γ_n. Отсюда следует (см. [1], предложение 2.18), что существует причинная непродолжаемая кривая γ, являющаяся предельной для последовательности γ_n, и такая, что $q \in \gamma$. Выберем параметризацию γ так, что $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ и $\gamma(0) = q$, причем уменьшение параметра t кривой γ соответствует движению по ней в прошлое.

Рассмотрим часть кривой γ, идущую в прошлое от точки $q :\ \gamma(-\infty, 0]$. Заметим, что для любой точки $a \in \gamma(-\infty, 0]$ выполняется соотношение: $a \in cl(J_p^+)$. Действительно, т.к. γ – предельная кривая последовательности γ_n, то существует подпоследовательность $\gamma_m \subset \gamma_n$ такая, что для любой точки $a \in \gamma$ каждая ее окрестность U_a пересекает все, за исключением конечного числа, кривые из γ_m. Взяв точки r_m т.ч.: $r_m \in \gamma_m, r_m \in U_a$, получим сходящуюся к a последовательность $r_m : r_m \to a$. Если выполнено еще соотношение $r_m \in J_p^+$, то получим, что $a \in cl(J_p^+)$. В данном случае включение $r_m \in J_p^+$ выполняется всегда. В самом деле, если $r_m \notin J_p^+$, то это означает, что кривая γ (вместе с кривыми γ_m)

покинула область $cl(J_p^+)$. Однако выйти из $cl(J_p^+)$ γ может лишь через точку p, так как все γ_m «фокусируются» в p (по их определению), а γ – предельная кривая для последовательности γ_m. Но такого быть не может, так как это означало бы существование отрезка (лежащего на кривой γ), соединяющего точки p и q и являющегося частью причинной кривой (γ – причинна), что противоречит выбору точки $q: q \notin J_p^+$.

Таким образом, мы показали, что $\forall a \in \gamma(-\infty, 0]$, $a \in cl(J_p^+)$. Ясно, что выполнено также включение $a \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ (т.к. из $a \leq q, q << r \Rightarrow, a << r$, т.е. $a \in int\, J_s^-$). В результате имеем: часть кривой γ, идущая в прошлое от точки q, целиком находится во множестве $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, которое по сделанному предположению является компактным.

По построению кривой γ (см. [1], предложение 2.18), последовательность γ_m сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из $\mathbf{R}$ в случае, если кривые γ и γ_m параметризованы длиной дуги, вычисленной относительно (полной) римановой метрики.

Так как ни для какого значения параметра $t \leq 0$ кривая γ не покидает множества $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, а последовательность γ_m сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из $\mathbf{R}$ (то есть кривые γ_m «повторяют» движение γ), то получаем следующую ситуацию: если взять достаточно малую окрестность U_q точки q, то длины кривых γ_m, достигающих этой окрестности, с необходимостью должны быть больше любого наперёд заданного положительного числа N. Однако это означает, что пространство-время (M, g) принадлежит классу B, в то время как по условию (M, g) принадлежит классу A.

Полученное противоречие опровергает сделанное предположение о том, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно и тем самым доказывает лемму. ■

Следующее утверждение взято из [1].

Лемма 3. *Пусть (M, g) – пространство-время. Если для некоторых точек $p, s \in M$ множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным, то существует лоренцева метрика $g' \in C(M, g)$, глобально конформная метрике g, такая, что $d(a, b) = \infty$ для некоторых точек $a, b \in M$.*

Теперь применим полученные результаты к исследованию причинной структуры пространства-времени (M, g), для которого условие конечности расстояния является инвариантом при конформных преобразованиях метрики g.

Теорема 1. *Пусть (M, g) – различающее пространство-время. Если пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$, то пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим.*

Доказательство. Покажем сначала, что (M, g) является причинно простым, (т.е. различающим с дополнительным условием, что множества J_p^+ и J_p^- замкнуты для всех $p \in M$).

Покажем, что множество J_p^+ замкнуто для любой точки $p \in M$ (замкнутость J_p^- доказывается аналогично).

Допустим обратное: $\exists$ точка $q \in cl(J_p^+) \setminus J_p^+$. Возьмем в I_q^+ произвольную точку r. Покажем, что множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не пусто. Так как $q \in cl(J_p^+)$, то $\exists$ последовательность точек $q_n \subset J_p^+$, сходящаяся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M). Так как $q \in I_r^-$ а множество I_r^- открыто (см [1], лемма 2.5), то для достаточно больших $n\, q_n \in I_r^-$, т.е.$q_n << r$. Тогда из соотношений $p \leq q_n, q_n << r$ получаем: $p << q_n$ т.е. $r \in I_p^+$. Таким образом, имеем: множество $I_p^+ \cap I_r^-$ не пусто.

Получаем: $J_p^+ \cap J_r^- \neq \emptyset$ (т.к. $I_p^+ \subset J_p^+, I_r^- \subset J_r^-, I_p^+ \cap I_r^-$).

Множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не замкнуто в M $(q \in I_r^- = intJ_r^-)$:

$$(q \in I_r^- = intJ_r^-) : q \in int(J_r^-)\, ,\, q \in cl(J_p^+),\, q \notin J_p^+ \;\Rightarrow\, q \in cl(J_p^+ \cap J_r^-) \setminus (J_p^+ \cap J_r^-).$$

Тогда по лемме 2 получаем, что множество $cl(J_p^+ \cap J_r^-)$ некомпактно. Следуя лемме 3, можно найти метрику $g' \in C(M,g)$ такую, что пространство-время (M,g') не удовлетворяет условию конечности лоренцева расстояния, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, множества J_p^+ и J_p^- замкнуты и пространство-время (M,g) является причинно простым. Причинная простота пространства-времени (M,g) автоматически влечёт за собой его сильную причинность. Теперь, по лемме 1, сразу получаем желаемый результат: пространство-время (M,g) является глобально гиперболическим. ■

Литература

1. Бим, Дж. Глобальная лоренцева геометрия / Дж. Бим, П. Эрлих. – М.: Мир, 1985.
2. Пенроуз, Р. Структура пространства-времени / Р. Пенроуз. – М.: Мир, 1972.
3. Malament, D.B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spasetime / D.B. Malament // J. Math. Phys. – 1977. – V. 18, N. 7. – P. 1399-1404.