Математические структуры и моделирование
2010, вып. 21, с. 55–64

УДК 519.68:530.15

АРХИТЕКТУРА, ПРОЦЕССОР И РАБОТА КВАНТОВОГО КОМПЬЮТЕРА

А.К. Гуц

Краткое изложение устройства квантового компьютера и организации вычислений на нем.

Теория квантового компьютера основывается на *квантовой механике*, созданной в 20-е годы XXI века австрийцем Эрвином Шрёдингером и немцем Вернером Гейзенбергом.

Идея использовать квантовую механику для построения квантового компьютера независимо высказана россиянином Юрием Маниным [4] и американцем Ричардом Фейнманом [5, 6].

1. Архитектура квантового компьютера

Квантовый компьютер имеет архитектуру аналогичную классическому компьютеру. Он состоит из:

– регистров памяти,

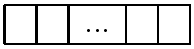
– процессора, построенного из логических элементов и производящего вычисления,

– устройства ввода информации,

– устройства вывода полученной в ходе вычислений информации.

2. Регистры

Память компьютера разбита на регистры. Регистры состоят из некоторого количества разрядов. Регистр из m разрядов изобразим как



Квадратик изображает разряд

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
E-mail: aguts@mail.ru

2.1. Бит и классический регистр

Классический разряд □ хранит единицу информации – *бит* информации – 0 или 1.

Запишем разряд в символическом виде

$$|n_k\rangle, \quad n_k = 0, 1.$$

Тогда классический регистр можно представить как

$$|n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle. \tag{1}$$

Для технической реализации бита используются разные физические устройства.

Пример 1. Высокий потенциал в точке схемы – 1, низкий – 0.

Пример 2. Ферромагнитное колечко намагничено в одном направлении – 1, в другом – 0.

Состояние классического регистра в момент времени t

Разряд классического регистра находится только в одном из двух возможных состояний – $|0\rangle$ или $|1\rangle$.

Поэтому состояние регистра – это

$$|n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle.$$

Например, состояние

$$|\underbrace{01001011100011...}_{m}\rangle.$$

2.2. Кубит и квантовый регистр

Квантовый разряд □ хранит единицу информации – квантовый бит, или *кубит* информации – 0 или 1.

Квантовый разряд в символическом виде выглядит так же, как классический:

$$|n_k\rangle, \quad n_k = 0, 1.$$

И поэтому квантовый регистр представляется в виде

$$|n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle. \tag{2}$$

Для технической реализации кубита предлагаются разные физические устройства, основой которых является любая двухуровневая (квантовомеханическая) система (спин, фотон, атом, молекула, ион).

Пример 1. Проекция спина атома $(+1)$ принимается для кубита за состояние $|0\rangle$, а проекция (-1) – за состояние $|1\rangle$.

Пример 2. Берётся раствор молекул и помещается при комнатной температуре во внешнее магнитное поле. При этом атомные ядра, обладающие ядерным спином, т.е. являющиеся как бы маленькими магнитами, займут одно из двух положений – по полю – это $|0\rangle$ и против него – это $|1\rangle$.

Состояние квантового регистра в момент времени t

Разряд квантового регистра находится в состоянии

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Поэтому состояние квантового m-разрядного регистра – это *когерентная суперпозиция* всех *базисных состояний*:

$$|\psi(t)\rangle \equiv \sum_{n_{m-1}=0}^{1} \sum_{n_{m-2}=0}^{1} ... \sum_{n_0=0}^{1} c_{n_{m-1}n_{m-2}...n_0}|n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle, \tag{3}$$

$$c_{n_{m-1}n_{m-2}...n_0} \in \mathbb{C}.$$

Числа $|c_{n_{m-1}n_{m-2}...n_0}|^2$ интерпретируются как вероятность пребывания регистра в состоянии $|n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle$.

Например, состояние

$$|\psi(t)\rangle \equiv c_1|\underbrace{01001011100011...}_{m}\rangle +$$

$$+c_2|\underbrace{11001011100011...}_{m}\rangle + ...$$

Комментарий. Состояние 1-разрядного регистра квантового компьютера

в момент времени t подобно одновременному пребыванию кота в живом и мёртвом состоянии:

Рис. 1. Живо-мёртвое состояние кота

Иначе говоря, в квантовом мире альтернативы могут существовать одновременно.

Если предположить, что квантовый компьютер находится сразу во множестве параллельных вселенных, то в одной вселенной кот жив, а в другой мёртв. Наблюдатель видит только того кота, в какой вселенной живет сам; параллельный, другой мир он не видит. Такой подход называется эвереттовской интерпретацией квантовой механики [2].

3. Процессор

Процессор компьютера служит для того, чтобы менять состояние регистров.

Делается это посредством физического воздействия на биты в классическом компьютере и на кубиты – в квантовом; в результате и те и другие меняют свое состояние.

> **Пример**. Если кубит представляет собой атом, то регистр – это квантовая система из m атомов. Воздействие на эту систему осуществляется с помощью специально подобранных импульсов лазеров. Лазерные импульсы влияют на электронные состояния атомов.
>
> Лазерными импульсами управляет уже классический компьютер, входящий в состав того устройства, которое мы назвали квантовым компьютером.

3.1. Классический процессор

Процессор классического компьютера состоит из схем, собранных из логических элементов.

Логический элемент – это простейшее устройство ЭВМ, выполняющее одну определенную логическую операцию над входными сигналами согласно правилам алгебры логики.

Для логических элементов независимо от их физической реализации приняты дискретные значения входных и выходных сигналов; обычно это два уровня, которые условно принимаются за 0 и 1.

На рис. 2 изображен логический элемент «НЕ», который переводит 0 в 1 и 1 в 0.

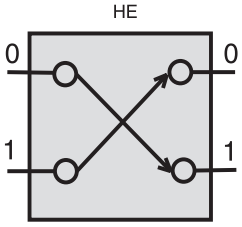


Рис. 2. Логический элемент «НЕ»

Логические элементы – это технические устройства, реализующие некоторые логические операции классической логики. Так, элемент «НЕ» соответствует операции $\neg$, элемент «ИЛИ» – операции $\vee$ и т.д. Установлено, однако, что элементная база классического компьютера основывается всего на двух логических элементах, например на «НЕ» и «исключающее ИЛИ-НЕ».

Процессор преобразует, меняет содержание разрядов регистра посредством каждого входящего в него логического элемента U:

$$U : |n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle \to |n'_{m-1}n'_{m-2}...n'_0\rangle. \qquad (4)$$

3.2. Квантовый процессор

Квантовый процессор также состоит из логических элементов, называемых *гейтами.*

На рис. 3 изображен квантовый логический элемент «$\sqrt{\text{НЕ}}$», который переводит 0 в 1 и 1 в 0, а также 0 в 0 и 1 в 1, но лишь с вероятностью $p_{ij} = 1/2,\ (i, j = 0, 1)$.

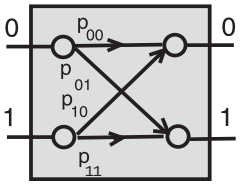


Рис. 3. Логический элемент с **вероятностями** p_{ij} переходов $i \to j$.

В теории квантового компьютера существует бесконечное количество логических элементов. Однако доказано, что квантовый компьютер может быть построен всего из двух логических элементов: однокубитового $\widehat{Q}(\theta, \varphi)$ и 2-кубитового «$\widehat{CNOT}$» (управляемое «НЕ»).

Квантовый процессор преобразует, меняет содержание разрядов квантового регистра посредством каждого входящего в него логического элемента (гейта) $\widehat{U}$:

$$\widehat{U} : \sum_{n_{m-1}=0}^{1} \sum_{n_{m-2}=0}^{1} ... \sum_{n_0=0}^{1} c_{n_{m-1}n_{m-2}...n_0} |n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle \to$$

$$\rightarrow \sum_{n_{m-1}=0}^{1} \sum_{n_{m-2}=0}^{1} ... \sum_{n_0=0}^{1} c_{n_{m-1}n_{m-2}...n_0} |n'_{m-1}n'_{m-2}...n'_0\rangle. \quad (5)$$

Как видно из формулы (5), **в один шаг изменены сразу все 2^m значений базисных состояний**. Это *эффект параллелизма* в работе квантового компьютера, не имеющий места для классических компьютеров. Для такой производительности за один шаг потребовалось бы 2^m классических процессоров. Если $m = 16$, то $2^{16} = 65536$!

Состояние (3) называется *сцепленным*, если оно не может быть представлено в виде

$$|x_1\rangle...|x_m\rangle, \quad (6)$$

где $|x_j\rangle = \alpha_j|0\rangle + \beta_j|1\rangle$ $(j = 1, ..., m)$.

Если состояние регистра (3) не является сцепленным, то это означает фактическое наличие в распоряжении для вычислений классического регистра вида (6), а значит, только он и преобразуется на данном такте работы квантового компьютера. Отсутствуют другие, параллельные базовые состояния, и, следовательно, отсутствует эффект квантового параллелизма, существенно ускоряющего работу компьютера и определяющего беспрецедентную эффективность квантовых вычислений.

4. Условия для того, чтобы появился квантовый компьютер

Для того чтобы квантовый компьютер стал реальным инструментом для вычислений, необходимо решить следующие технические проблемы:

- Создать физическое устройство, содержащее достаточно большое число N $>$ 100 кубитов;
- Научиться приводить входной регистр в исходное основное базисное состояние
$$|\underbrace{00...0}_{m}\rangle;$$
- Обеспечивать большое время декогеренции (не менее, чем в 104 раза больше времени выполнения основных квантовых операций (время такта)).

  Декогеренция – это взаимодействие системы кубитов с окружающей средой. Она приводит к разрушению суперпозиций квантовых состояний и делает невозможным выполнение квантовых алгоритмов.

- Обеспечить возможность измерения состояния квантовой системы на выходе, то есть при выводе результата.

Рис. 4. Устройство квантового компьютера [1].

5. Вычисление на квантовом компьютере

5.1. Ввод начальных данных

Дано базовое состояние регистра (памяти):

$$|\underbrace{00...0}_{m}\rangle \equiv \underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes ... \otimes |0\rangle}_{m}. \tag{7}$$

С помощью последовательного применения к состоянию (7) гейтов

$$\widehat{U}^{(1)}, \widehat{U}^{(2)}, ..., \widehat{U}^{(m)},$$

$$\widehat{U}^{(k)} = \widehat{I} \otimes ... \otimes \widehat{I} \otimes \underbrace{\widehat{U}_1}_{k} \otimes \widehat{I} \otimes ... \otimes \widehat{I},$$

где $\widehat{U}^{(k)}$ действует только на k-й кубит посредством гейта $\widehat{U}_1$, преобразующего однокубитовое состояние, квантовый регистр приводится в m-кубитовое состояние, являющееся *когерентной суперпозицией* всех базисных состояний:

$$\widehat{U}^{(m)}\widehat{U}^{(m-1)}...\widehat{U}^{(1)} : |\underbrace{00...0}_{m}\rangle \to \widehat{U}^{(m)}\widehat{U}^{(m-1)}...\widehat{U}^{(1)}|\underbrace{00...0}_{m}\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{2^m-1} c_n|n\rangle \equiv$$

$$\equiv \sum_{n_{m-1}=0}^{1} \sum_{n_{m-2}=0}^{1} ... \sum_{n_0=0}^{1} c_{n_{m-1}n_{m-2}...n_0}|n_{m-1}n_{m-2}...n_0\rangle, \tag{8}$$

где

$$n = (n_{m-1}n_{m-2}...n_0)_2 = \sum_{l=1}^{m} n_{m-l}2^{m-l}$$

– двоичное представление числа n и

$$\sum_{n=0}^{2^m-1} |c_n|^2 = 1.$$

Состояние (8) является начальным. Ввод информации завершен.

Пример. Если

$$\widehat{U}_1|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \widehat{U}_1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

то

$$\widehat{U}^{(m)}\widehat{U}^{(m-1)}...\widehat{U}^{(1)}|\underbrace{00...0}_{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{n=0}^{2^m-1}|n\rangle. \tag{9}$$

(Здесь все m-кубитовые базовые состояния $|n\rangle$ равновероятны).

Состояние (9) является начальным. Ввод информации завершен.

5.2. Вычисление

Вычисление – это преобразование $\widehat{U}_F$ начального состояния (8):

$$\widehat{U}_F\left(\sum_{n=0}^{2^m-1}c_n|n\rangle\right) = \sum_{n=0}^{2^m-1}c_n\widehat{U}_F|n\rangle = \sum_{n=0}^{2^m-1}c_n|F(n)\rangle. \tag{10}$$

В случае (9) имеем

$$\widehat{U}_F\left(\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{n=0}^{2^m-1}|n\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{n=0}^{2^m-1}|F(n)\rangle. \tag{11}$$

Конкретная реализация преобразования $\widehat{U}_F$ представляет собой запрограммированный квантовый алгоритм вычисления значений функции F.

Как видно из формулы (10), **в один шаг вычислены сразу все значения функции** F. Это *эффект параллельности* квантовых вычислений, о котором мы говорили в § 2.2.

5.3. Вывод результата

Вывод результата в квантовом компьютеринге – это *измерение* квантового состояния (10):

$$\sum_{n=0}^{2^m-1}c_n|F(n)\rangle \to |F(n)\rangle.$$

В силу принципа квантовой механики вмешательство измеряющего устройства (устройство вывода данных) означает декогеренцию, т.е. разрушение когерентного состояния (10). Мы получаем значение $F(n)$ лишь с вероятностью $|c_n|^2$.

В нашем примере (8) с равной вероятностью $1/2^m$ любое значение $F(n)$!

Получаемый на выходе результат вычислений вследствие декогеренции, как видим, носит *вероятностный характер*! Иначе говоря, то, что получено на выходе, – состояние (регистра) $|F(n)\rangle$ – верно лишь с некоторой вероятностью $|c_n|^2$.

«Наблюдение (части) памяти – не то же самое, что «печать результата». Мы должны спланировать серию прогонов одной и той же квантовой программы и последующую классическую обработку наблюдаемых результатов, и мы можем только надеяться получить желаемый результат с вероятностью, близкой к единице» [3, с.271].

6. Исправление квантовых ошибок

Классические компьютеры надежны, поскольку производимые вычисления можно защитить от *сбоев*, т.е. от ошибок, возникающих вследствие воздействия окружающей среды.

Взаимодействие квантового компьютера с окружающей средой ведет к декогеренции, которая разрушает когерентную суперпозицию и тем самым останавливает то, что делает квантовые вычисления привлекательными по сравнению с классическими, – их параллельность.

Возникновение декогеренции – то же, что появление сбоев в работе классических ЭВМ, поэтому борьбу с декогеренцией, её преодоление называют *исправлением квантовых ошибок.*

Декогеренцию, а также *квантовый шум*, т.е. взаимодействие m-кубита $|q\rangle$ со средой $\mathcal{E}$, можно представить в виде:

$$|q\rangle|\mathcal{E}_0\rangle \to \sum_k \widehat{E}_{i_k}|q\rangle|\mathcal{E}_k\rangle, \tag{12}$$

где

$|\mathcal{E}_0\rangle$ – состояние среды до взаимодействия,
$\widehat{E}_j$ – j-й оператор ошибки (тип ошибки, один из трех, т.е. $j = 1, 2, 3$),
$|\mathcal{E}_k\rangle$ – k-е состояние среды после взаимодействия.

Исправление квантовых ошибок – это процесс Cr, организованный в ходе работы квантового компьютера, который переводит состояния вида $\widehat{E}_{i_k}|q\rangle$ в $|q\rangle$.

В результате имеем восстановление чистого состояния регистра $|q\rangle$:

$$\sum_k \widehat{E}_{i_k}|q\rangle|\mathcal{E}_k\rangle \xrightarrow{Cr} |q\rangle|\mathcal{E}_f\rangle,$$

свободного от помех (сцепленности со средой).

Разработаны различные методы исправления квантовых ошибок.

7. Классический компьютер вычисляет всё, что вычисляет квантовый

Изменения во времени состояния регистра $|\psi(t)\rangle$ квантового компьютера описываются с помощью основного уравнения квантовой механики – уравнения Шрёдингера:

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \widehat{H}|\psi(t)\rangle.}$$

Здесь $\widehat{H}$ – гамильтониан, реализующий конкретный вычислительный (квантовый) алгоритм.

Как известно, решение уравнения Шрёдингера можно записать в виде

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t \widehat{H}dt}|\psi(0)\rangle.$$

Это квантовая эволюция начального регистра $|\psi(0)\rangle$. Отсюда видно, что найти $|\psi(t)\rangle$ можно, производя классические вычисления экспоненты от матрицы. Это крайне трудоёмкие вычисления, но, в принципе, выполнимые. Следовательно, классический компьютер может вычислить всё, что вычисляет квантовый компьютер, и нет никакого шанса построить квантовый компьютер, вычисляющий классически невычислимые функции.

Литература

1. Валиев К.А., Кокин А.А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. М.: Ижевск: РХД, 2001.
2. Гуц А.К. Основы квантовой кибернетики: Учебное пособие. Омск: Полиграфический центр КАН, 2008. 204 с
3. Манин Ю.И. Классическое и квантовое вычисление и факторизация Шора / Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
4. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980.
5. Фейнман Р. Моделирование физики на компьютерах / Сб.: Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ред. ж-ла «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевск, 1999. С.96-124.
6. Фейнман Р. Квантовомеханические компьютеры / Сб.: Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Ред. ж-ла «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевск, 1999. С.125-156.