

## КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ГОСУДАРСТВА

**А. А. Лаптев, Ю. С. Трофимчук**

Описаны реализация и исследование математической модели регионального развития государства.

### **Введение**

Модель регионального развития государства основана на идее о функционировании государства-империи посредством становления административных центров [2, 3, 9].

Модель построена на основе следующих предположений:

1. Развитие государства рассматривается через изменение численности населения, добычу и воспроизводство ресурсов, территориальное изменение, появление и распад административных центров.
2. Ресурс — пространственная характеристика. Это некоторое усреднённое значение по всем ресурсам. Не производится деление ресурсов на составляющие. Рассматриваются только природные (возобновляемые и невозобновляемые) ресурсы, их добыча и возобновление.
3. Количество административных центров ограничено. За каждым административным центром закреплена своя территория. Считается, что территория принадлежит государству, если на неё распространено влияние какого-либо административного центра данного государства.
4. Политическое влияние центра (управление периферией) — пространственная характеристика. Она показывает степень влияния центра на зависимые от него территории. Власть как бы распространяется по территории.
5. Сила, мощь административного центра — это характеристика каждого центра.
6. Изменение границ и изменение властных центров — некоторая внешняя функция центра государства-империи.
7. Внешние параметры для административного центра — это уровень развития политической и экономической систем. Они определяются с помощью математической модели социогенеза [9].

Математическая модель развития государства построена и описана ранее [6, 7, 9]. Требовалось реализовать программно данную математическую модель и исследовать готовую компьютерную модель. Первый из двух этапов включает реализацию решения системы дифференциальных уравнений с помощью численных методов, отображение изменения характеристик на географической карте и в виде графиков их зависимости от времени. После компьютерного моделирования необходимо также оценить адекватность модели исследуемым социальным процессам.

## 1. Компьютерная реализация модели

Для компьютерной реализации потребовалось несколько упростить математическую модель — функциональные коэффициенты заменены постоянными, некоторые коэффициенты и зависимости исключены (1). *Мощь административного центра* описывается функцией  $M_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i$  — номер центра), *численность населения* — функцией  $N_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , *природный ресурс* — функцией  $R^*(x, y, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , *добытый ресурс* — функцией  $R_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , *политическое влияние центра* — функцией  $P_i(x, y, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Развитие государства рассматривается в некоторой области  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ .  $b_M^n, b_M^R, b_M^N, d_M^n, d_M^R, d_M^N, f_G, \alpha_{ij}, d_r^i, k_K, k_r, r_0, p, L$  — постоянные коэффициенты, характеризующие конкретный административный центр.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_i}{dt} = b_M^n \cdot b_M^R \cdot b_M^N \cdot M_i - d_M^n \cdot d_M^R \cdot d_M^N \cdot M_i, \\ \frac{\partial P_i}{\partial t}(x, y, t) = \Delta P_i + f_G M_i - \nabla R^* \cdot \nabla P_i - \sum_j \alpha_{ij} P_j \cdot P_i, \\ \frac{\partial R^*}{\partial t}(x, y, t) = \sum_i (-d_r^i \cdot k_K \cdot P_i(x, y, t) \cdot R^*(x, y, t)) + k_r, \\ \frac{dR_i}{dt}(t) = \iint_{\Omega} (d_r^i \cdot k_K \cdot P_i(x, y, t) \cdot R^*(x, y, t)) dx dy - r_0 \cdot N_i, \\ \frac{dN_i}{dt} = p \cdot N_i - L \cdot N_i^2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Первое, четвёртое и пятое уравнения системы (1) решаются методом Рунге–Кутты четвёртого порядка [1]. Второе и третье уравнения системы решаются методом сеток (разностных схем) [4, 5]. Граничные условия во втором уравнении задавались в виде  $\frac{\partial P_i}{\partial n} = 0$ . Использована явная схема с порядком аппроксимации по пространственной координате  $\theta(h)$  и по времени  $\theta(\tau)$ .

Методы, необходимые для решения системы (1), и интерфейс программы выполнены с помощью пакета Microsoft Visual Studio.

Численные методы реализованы двумя основными функциями: решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты и метод сеток для параболического уравнения [4, 5, 8, 10].

Решение уравнений и вывод результатов на карте территорий выполняются параллельно и в программе реализованы отдельными потоками. В главном потоке выполняются все вычисления. Из него запускается интерфейсный поток, в котором создаётся отдельное диалоговое окно для вывода карты распределения ресурса  $R^*$  и отрисовки на ней изменений политического влияния

$P_i$  для каждого центра. В то время как в интерфейсном потоке выполняется вывод в виде изображения числовых значений, записанных в память в предыдущий момент времени, в главном потоке вычисляются значения для вывода в интерфейсном потоке в следующий момент времени. Отрисовка графиков зависимости численности населения  $N(t)$ , мощи  $M_i(t)$  и добытого ресурса  $R_i(t)$  от времени  $t$  для каждого административного центра производится в главном потоке.

Ввод исходных данных осуществляется через интерфейс пользователя (см. рис. 1 и 2), который позволяет задать начальные условия и коэффициенты для уравнений системы (1), а также длительность эксперимента, число шагов по времени, масштаб для графиков, размер стороны квадрата для вывода карт. Ввод коэффициентов, начальных условий и загрузка карт осуществляется через диалоговые окна (см. рис. 2).

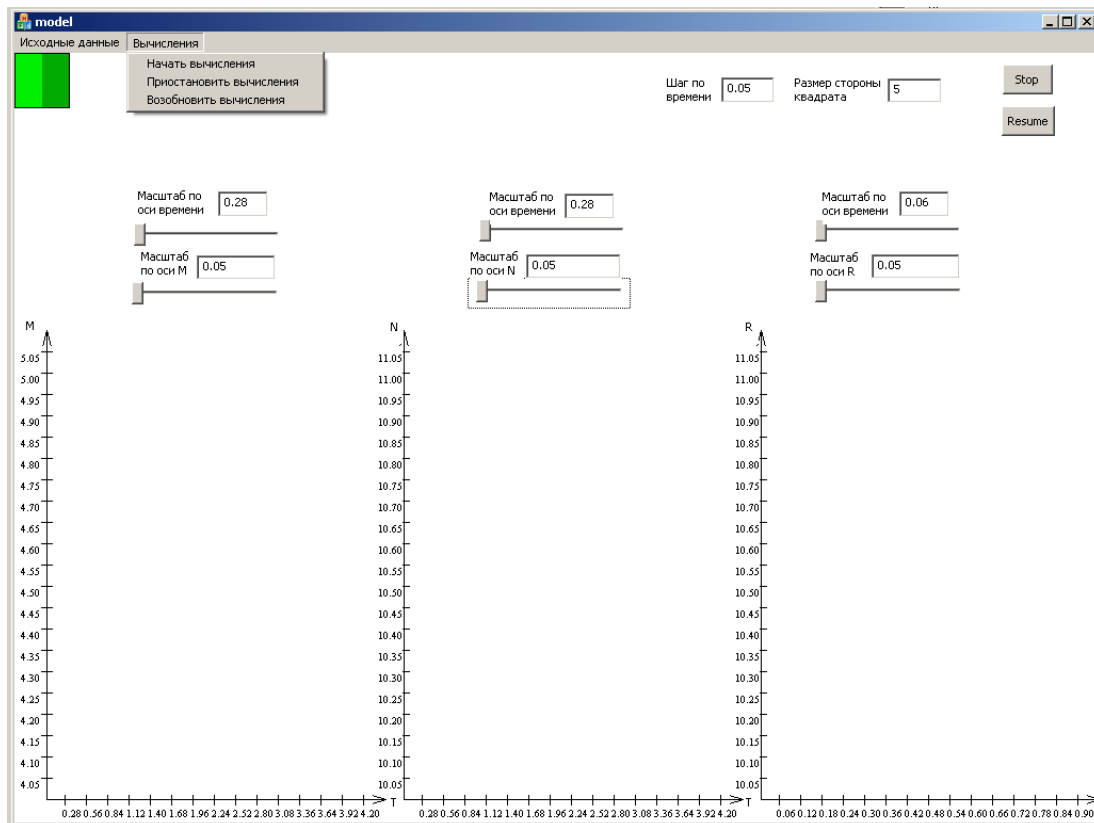


Рис. 1. Главное окно программы

При запуске вычислений в главном окне начинается отрисовка графиков. Одновременно открывается диалоговое окно, в которое выводится шкала значений ресурса  $R^*$ , карта распределения ресурса  $R^*$ , меняющаяся со временем. На ней осуществляется вывод распространяющегося политического влияния  $P_i$  для каждого центра разными цветами (см. рис. 3). Также для лучшей наглядности рядом (справа) снова отображается изменяющаяся карта ресурса.

Кoeffициенты уравнений

$dM/dt = b_m * b_m(N) * b_m(R) - d_m * d_m(N) * d_m(R)$	$dN/dt = p * N - L * N^2$
Начальное условие M0: <input type="text" value="4"/>	Начальное условие N0: <input type="text" value="10"/>
b <sub>m</sub> = <input type="text" value="1.5"/> d <sub>m</sub> = <input type="text" value="1.25"/>	p = <input type="text" value="3"/>
b <sub>m</sub> (N) = <input type="text" value="2"/> d <sub>m</sub> (N) = <input type="text" value="1.5"/>	L = <input type="text" value="0.008"/>
b <sub>m</sub> (R) = <input type="text" value="3"/> d <sub>m</sub> (R) = <input type="text" value="4"/>	$dR/dt = \text{Sum}(d * K_k * P_i * R_i) - r_0 * N_i$
$dP/dt = A * \text{div grad } P + F_g * M - B * \text{grad } R * \text{grad } P - \text{Sum}(\alpha * P_i * P_j)$	Начальное условие R0: <input type="text" value="10"/>
A = <input type="text" value="1"/> alpha = <input type="text" value="0.01"/>	r0 = <input type="text" value="0.001"/>
B = <input type="text" value="20"/>	d = <input type="text" value="10"/>
Fg = <input type="text" value="8"/>	$dR^*/dt = \text{Sum}(-d * K_k * P_i * R^*) + K_r$
<input type="button" value="OK"/>	<input type="button" value="Cancel"/>
	Kk = <input type="text" value="0.05"/>
	Kr = <input type="text" value="0.005"/>

Рис. 2. Окно ввода коэффициентов

## 2. Моделирование

Для проверки адекватности модели были проведены эксперименты с одним и двумя политическими центрами.

Изначально тестирование проводилось на однородной карте (значение ресурса одинаково во всех точках). На этом этапе проводилась проверка работы сеточного метода для параболического уравнения: в начальный момент задавались ненулевые значения политического влияния только в центральной точке.

С течением времени эта область начинает разрастаться, а значения в центре — увеличиваться (цвета темнее). Поскольку ресурс распределён равномерно, влияние распространяется симметрично относительно начальных значений. При этом ресурс постепенно как бы «съедается», начиная от центра, в местах распространения политического влияния, т.е. значения ресурса  $R^*$  в этих местах уменьшаются. В то же время ресурс возобновляется, и области, на которые влияние ещё не распространено, закрашиваются в цвет, который в шкале соответствует большим значениям ресурса.

Так как ресурс по карте распределён равномерно на конечных этапах эксперимента (см. рис. 4), политическое влияние достигает всех четырёх границ квадратной карты практически одновременно.

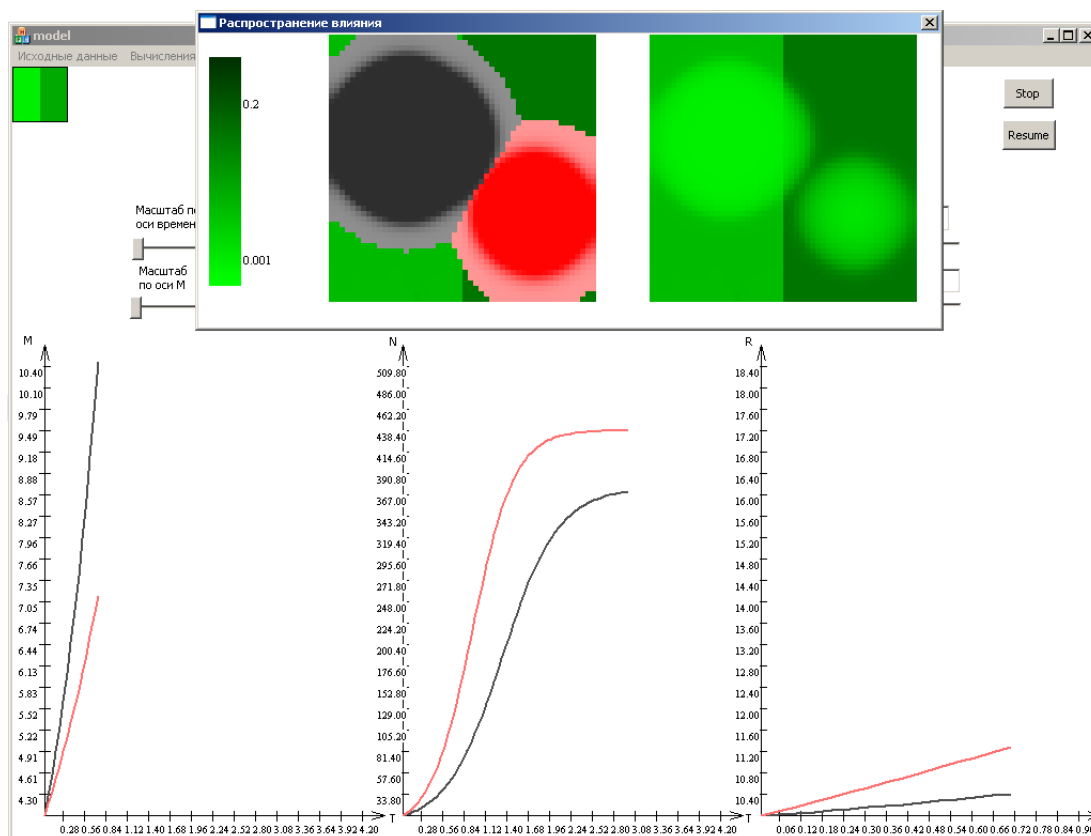


Рис. 3. Главное окно программы в процессе расчета

При неравномерном распределении начального ресурса распространение влияния больше направлено в ту сторону, где ресурсов больше.

Приведённые результаты позволяют сделать вывод об адекватности компьютерной модели математическим соотношениям: полученное решение параболического уравнения соответствует решениям в аналогичных задачах (например, в задачах теплопроводности).

Добавим в модель ещё один центр. Значения коэффициентов для первого и второго центров немного изменены. Карту ресурсов сделаем неоднородной.

На рис. 5 можно наблюдать начальные этапы эксперимента. У первого центра больше, чем у второго, значения начальных данных, также больше «подпитка» в центре и быстрее возрастает функция мощи. Второй центр начал своё развитие на той части карты ресурсов, где их значения больше. Поэтому второй центр на начальном этапе практически догнал первый по площади занятых территорий.

При столкновении влияние первого административного центра начинает распространяться на территории второго. Причём захватывается территория наиболее богатая природными ресурсами. Поскольку за время до столкновения ресурсы на территории второго центра заметно истощились, первый распространяет влияние по периферии второго в местах, ещё не до конца освоенных «хозяевами». Постепенно оба центра захватывают каждый свою часть территории. Первый — за счёт мощи центра и более высокого влияния вначале

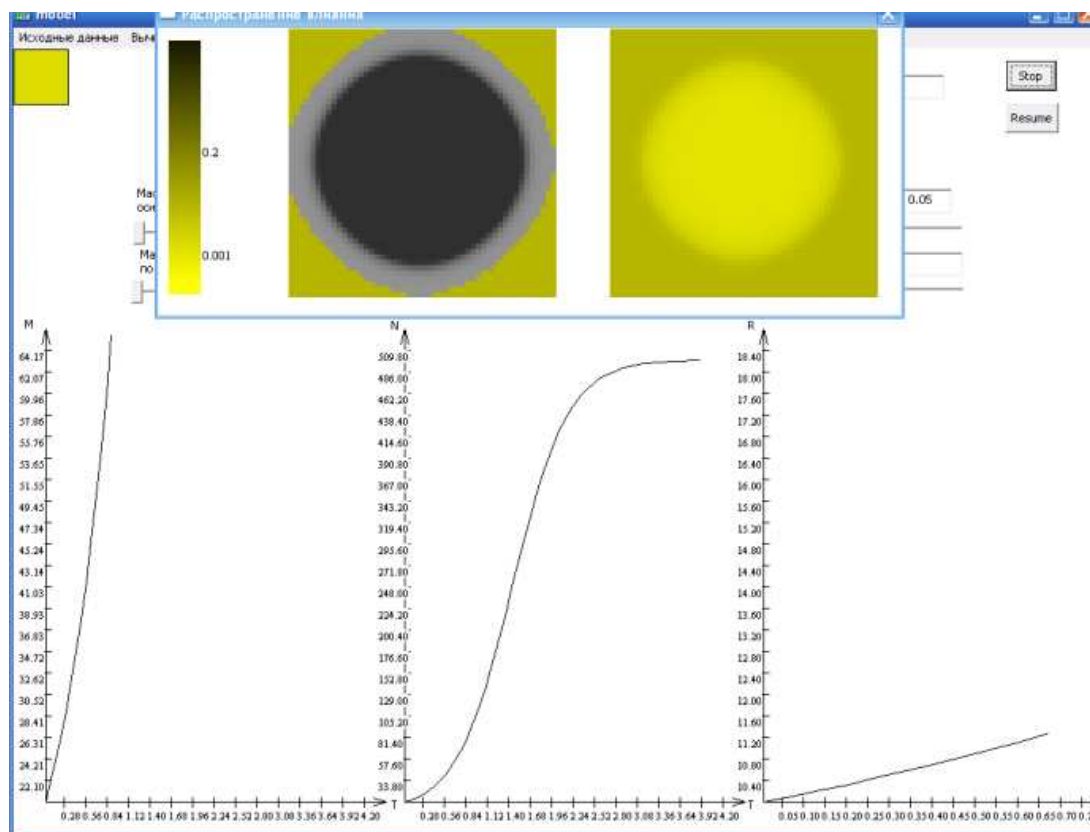


Рис. 4. Моделирование с равномерной картой ресурсов

развития центра, второй — за счёт близкой географической расположенности к территориям, богатым природными ресурсами. При этом первый центр всё-таки отвоёвывает большую часть территории (см. рис. 6).

### 3. Проверка адекватности и интерпретация работы модели

Строя компьютерную имитацию, мы неминуемо упрощаем и искажаем социальные явления. Построенная компьютерная модель была упрощена при постановке задачи.

Скорость распространения территориального влияния административного центра зависит от мощности центра, от распределения ресурса по территории и от существования или несуществования границ с другими административными центрами. Такая зависимость моделирует реальное развитие при разных территориальных характеристиках.

В модели учитываются пространственные (площадь территорий), политические (границы), частично географические (ресурсы) факторы. Но не учитывается плотность населения, поскольку из уравнения, описывающего изменение мощности административного центра, были исключены коэффициенты, определяющие функциональную зависимость от численности населения данного центра.

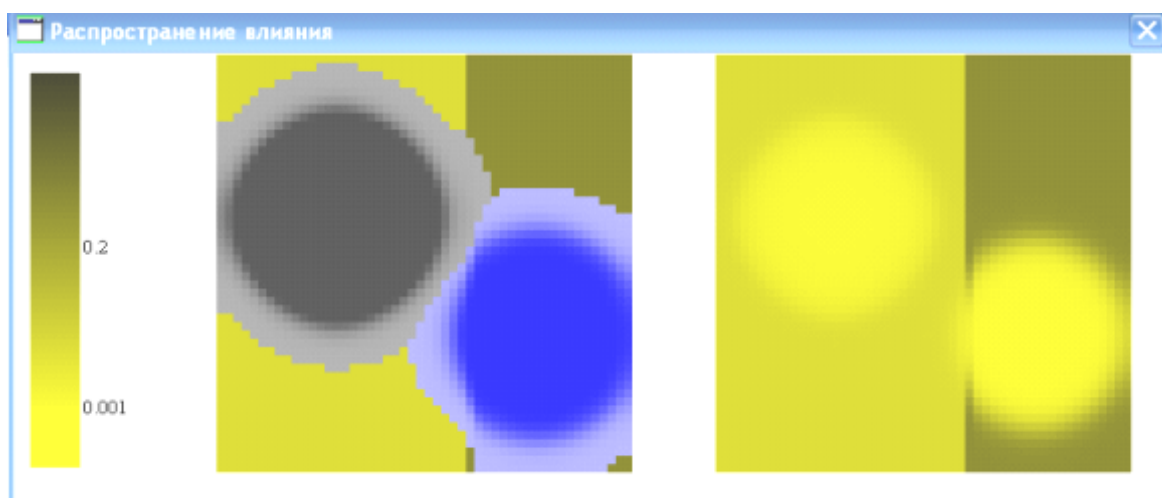


Рис. 5. Моделирование взаимодействия двух административных центров

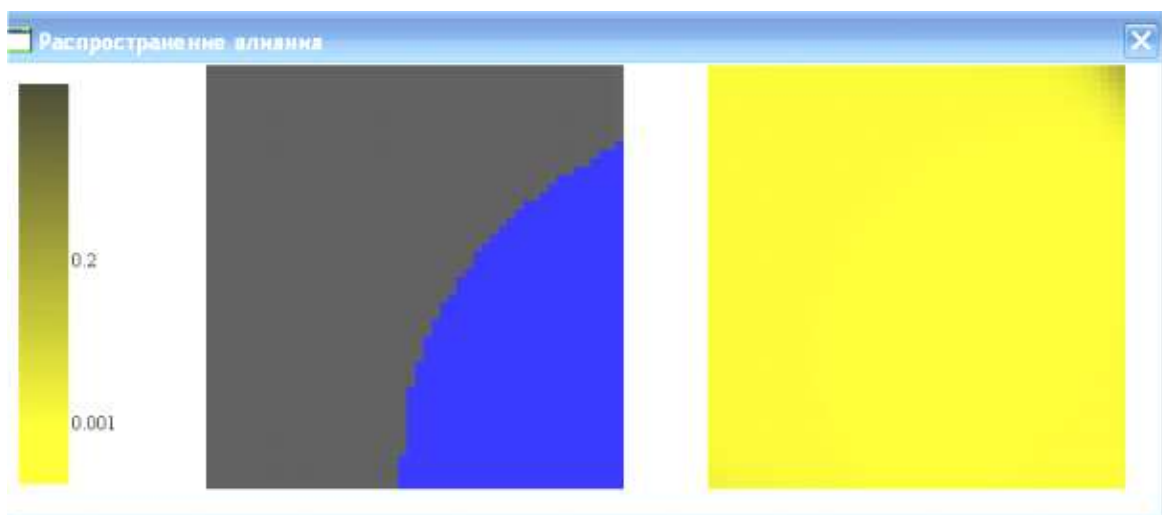


Рис. 6. Финальная часть моделирования взаимодействия двух административных центров

В модели от численности населения центра зависит только скорость расхода ресурса. И действительно, в реальном мире рост населения вызывает рост потребностей в ресурсах. Но одновременно растущее население способствует распространению его по всё большей территории, расширению административных центров. Недосток же людских ресурсов приводит к ограничению территориального роста центра.

Увеличение количества добытого ресурса должно приводить к поддержанию и росту населения, а значит, и к распространению территориального влияния, росту мощи центра. Но со временем природные ресурсы истощаются. Понятно, что распространение влияния происходит в направлении увеличения количества ресурса, если рассматривать предположение, что центральная власть империи ставит под контроль более важные ресурсы [3, с. 32]. Вышеупомянутый рост мощи и населения с ростом добытого ресурса в модели пока не отражён.

Возможные функциональные зависимости от добытого ресурса исключены из уравнения численности населения и мощности административного центра для упрощения модели.

В случае столкновения административных центров, попытки нескольких центров захватить влияние на одной территории происходит частичное или полное вытеснение одного из них. При этом территориальный рост центра-победителя замедляется. Такое поведение модели напоминает захват государством-империей заселённых территорий.

Функциональные зависимости от внешней функции центра  $C(t)$  из компьютерной модели были исключены. Однако в центре распространения влияния постоянно происходит «подпитка», чтобы, даже если ресурсы в центре истощены, определённая степень влияния в нём сохранялась. Но центр в империи должен не только сохранять, но и оказывать влияние на развитие регионов, допустим, определять, сколько природных ресурсов добывать.

Функциональная зависимость, отражающая влияние центра на количество добываемых природных ресурсов, из уравнения ресурса также исключена. В компьютерной модели не учитывается экономическое и политическое развитие системы, которое в административном центре может влиять на численность населения и на мощность центра. В действительности же при определении исходных данных из реальных исторических источников рост населения может оказаться незначительным, если не принимать во внимание уровень развития экономической системы.

Таким образом, в модели можно наблюдать лишь тенденцию к территориальному расширению центров, захват новых территорий, освоение и добычу ресурсов. Но сохранение или потерю влияния внутри центра при изменении численности населения, его ресурсообеспеченности, политической или экономической ситуации в нём увидеть в данной компьютерной модели нельзя.

Центр существует и развивается только благодаря максимизации объёма контролируемых ресурсов. Влияние в местах, где ресурсы истощены, поддерживается в модели искусственно (задана возрастающая функция мощности центра). Количество добытого ресурса центром не регулируется. Нельзя увидеть сохранение или потерю влияния в зависимости от численности населения, уровня развития экономической и политической системы.

Поэтому для большей адекватности модели реальному процессу развития административных центров необходимо определить и добавить в модель функциональные зависимости от численности населения, добытого ресурса, уровня развития экономической и политической системы, внешней функции центра туда, откуда они были исключены.

Тогда, если проводить компьютерное моделирование поведения нескольких центров, можно будет увидеть различия (возможно, значительные) в их развитии, в зависимости от всех этих факторов, взятых из реальных исторических источников.

Тем не менее модель соответствует нашим представлениям о территориальном развитии административных центров империи, их столкновении между собой и выборочном освоении природных ресурсов.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. 624 с.
2. Замятина Н. Ю. Модели политического пространства // Полис. 1999. № 4. С. 29–41.
3. Каспэ С. И. Империи: генезис, структура, функции // Полис. 1997. № 5. С. 31–48.
4. Кирьянов Д. В., Кирьянова Е. Н. Вычислительная физика. М.: Полибук Мульти-медиа, 2006. 352 с.
5. Коробицын В. В. Математическое моделирование этнических полей: дис.... канд. физ.-мат. наук. Тюмень: Тюмен. гос. ун-т, 2002. 141 с.
6. Лаптев А. А. Подходы к построению пространственной модели развития государства // Шестые апрельские экономические чтения. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. С. 29–32.
7. Лаптев А. А. Пространственная модель развития государства // Развитие оборонно-промышленного комплекса на современном этапе: материалы научно-технической конференции. Часть 1. Омск: ОмГТУ, 2003. С. 124–126.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
9. Математическое моделирование социальных систем / А. К. Гуц [и др.]. Омск: Ом. гос. ун-т, 2000. 256 с.
10. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Паскаль, Фортран и Бейсик. Томск: Раско, 1991. 272 с.